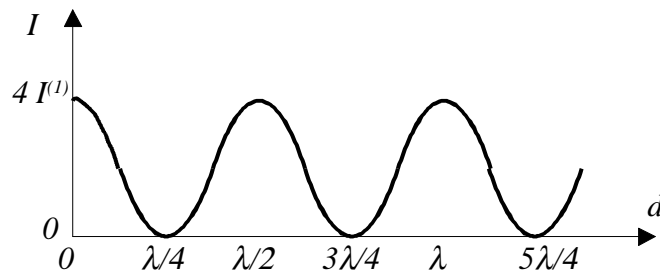


La (4,12) può esser scritta anche nella forma¹:
$$I(\tau) = 4 I^{(1)} \cos^2\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$$

Quindi sullo schermo la modulazione dell'intensità va come il *coseno quadrato del ritardo*, corrispondente alla metà della differenza dei bracci dell'interferometro.

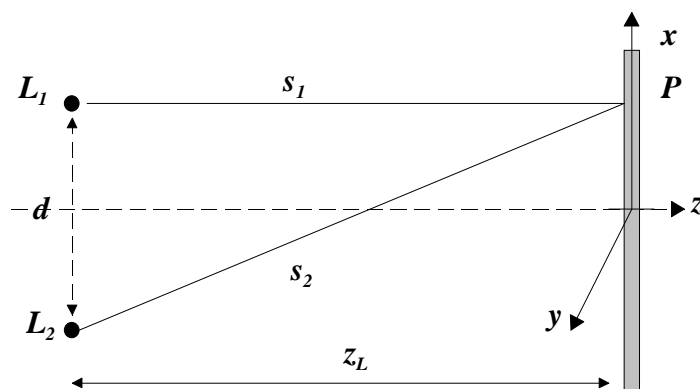
Si può notare che gli zeri della funzione $I(t)$ sui hanno in corrispondenza di ritardi pari $\omega \tau = n\pi$ con $n = 1,3,5 \dots$ e che corrispondono a spostamenti d del bracci Lço mobile pari a² interi dispari di $\lambda/4$ per cui possiamo valutare gli zeri del grafico di $I = I(d)$



Nel pattern di frange di interferenza ottenute con un interferometro di Michelson a braccio mobile, la distanza tra due frange scure (o chiare) corrisponde ad uno spostamento del braccio mobile pari a mezza lunghezza d'onda.

4,3 Coerenza spaziale

Consideriamo inizialmente l'interferenza di due onde sferiche, emesse da due sorgenti puntiformi L_1 e L_2 separate da una distanza d , e andiamo ad osservare la distribuzione di intensità su uno schermo posto a distanza z_L dall'asse delle due sorgenti come mostrato in figura.



¹ Dalle formule di bisezione $\cos(2a) = 2(\cos^2 a - 1)$

² $\tau = 2d/c$; $\lambda = 2\pi c/\omega \rightarrow c/\omega = \lambda/2\pi$
 $\omega\tau = 2d\omega/c = 2d \cdot 2\pi/\lambda$; $\omega\tau = n\pi = 2d \cdot 2\pi/\lambda = n\pi \rightarrow d = n \lambda/4$, $n = 1,3,5$

Procedendo in maniera analoga a quanto fatto nel caso di onde piane (Cap.I) si potrebbe dimostrare che l'espressione analitica (complessa) che rappresenta un'onda sferica monocromatica è data da:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{A}{r} e^{i(kr \pm \omega t + \varphi)}$$

Accettata questa osservazione, le onde sferiche generate da L_1 e L_2 saranno rispettivamente rappresentate da :

$$\mathbf{E}(s_1, t) = A(s_1) e^{i(k s_1 - \omega t + \varphi_1)} \quad \text{e} \quad \mathbf{E}(s_2, t) = A(s_2) e^{i(k s_2 - \omega t + \varphi_2)}$$

Il campo totale in ogni punto P dello schermo sarà dato da:

$$\mathbf{E}(x, y, 0, t) = \mathbf{E}(s_1, t) + \mathbf{E}(s_2, t)$$

mentre l'intensità $I(x, y, 0)$ sarà:

$$\begin{aligned} I &= \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \rangle = \langle (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \rangle \cdot \langle (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^* \rangle = \\ &= A^2(s_1) + A^2(s_2) + 2A(s_1)A(s_2) \cos[k(s_2 - s_1) + \varphi_2 - \varphi_1] \end{aligned} \quad (4,11)$$

Se si pone nelle condizioni che $\frac{d}{z_L} \ll 1$ e limitandoci ad osservare sullo schermo la distribuzione di intensità su un'area tale che $\frac{x}{z_L} \ll 1$ e $\frac{y}{z_L} \ll 1$ è possibile esprimere s_1 e s_2 in termini di d , z_L , x e y in quanto si è in *condizioni parassiali* e gli angoli sono piccoli. Individuando un sistema di riferimento in cui $L_1 \equiv (d/2, 0, -z_L)$ e $L_2 \equiv (-d/2, 0, -z_L)$ possiamo scrivere:

$$s_1 = \sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 + z_L^2}, \quad s_2 = \sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 + z_L^2}$$

per cui la differenza di cammino ottico dei due fasci è data da:

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{2} \frac{x d}{z_L} + \frac{1}{2} \frac{x d}{z_L} = \frac{d}{z_L} x$$

cioè è *lineare con x*. Se inoltre le due onde lasciano L_1 e L_2 con la stessa intensità nell'approssimazione fatta avranno anche la ampiezza costante ed uguale attraverso lo schermo.

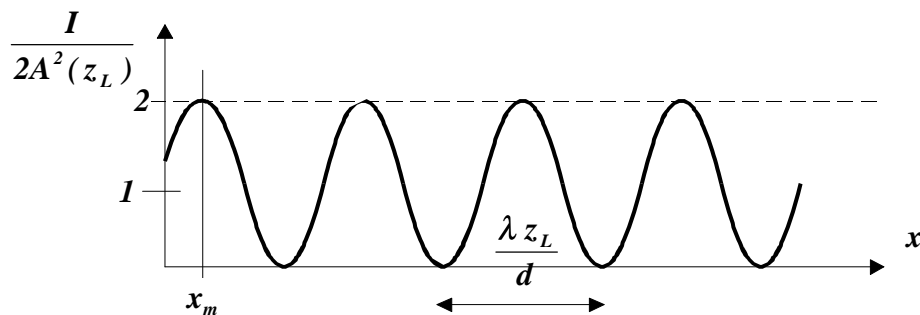
Infatti possiamo scrivere:

$$A(s_1) = \frac{A_0(L_1)}{s_1} = \frac{A_0}{s_1} \approx \frac{A_0}{z_L} = A(z_L), \quad A(s_2) = \frac{A_0(L_2)}{s_2} = \frac{A_0}{s_2} \approx \frac{A_0}{z_L} = A(z_L)$$

Introducendo questi parametri nell'espressione dell'intensità (4,11) troviamo la distribuzione di intensità sullo schermo:

$$I(x, y, 0) = 2A^2(z_L) \left[I + \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda z_L} x + \varphi_2 - \varphi_1\right) \right] \quad (4,12)$$

cioè si avrà un pattern di frange, modulato nella direzione x, che si stende nella direzione y, come indicato in figura:



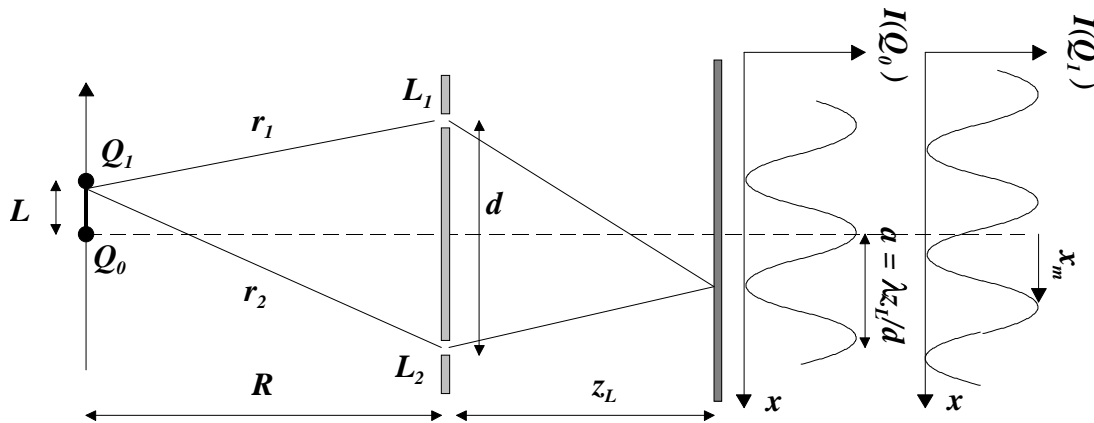
La separazione delle frange è la distanza tra due zeri della (4,12), ed è data da :

$$a = \frac{\lambda z_L}{d} \quad (4,13)$$

mentre il massimo più vicino all'asse ottico del sistema è spostato proporzionalmente a $(\varphi_1 - \varphi_2)$:

$$x_m = \frac{\lambda z_L}{d} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2\pi} \quad (4,14)$$

Dopo aver discusso la distribuzione di intensità prodotta su uno schermo da due sorgenti puntiformi di onde sferiche, affrontiamo il problema della *coerenza spaziale* considerando un dispositivo dove al posto delle due sorgenti si ha uno *schermo opaco con due aperture* L_1 e L_2 separate da una distanza d . Le due aperture sono illuminate dalla radiazione emessa da una *sorgente estesa di diametro L* e saranno sorgenti di due onde sferiche. Il dispositivo è mostrato in figura.



La una sorgente estesa di diametro L , non coerente che può essere pensata come composta da singoli punti indipendenti ciascuno sorgente di un'onda sferica. Vogliamo analizzare il pattern di interferenza prodotto sullo schermo dalla sovrapposizione delle onde emergenti dalle due aperture L_1 e L_2 . Supponiamo anche che il punto Q_0 stia sull'asse del sistema. L'onda sferica emessa da questo punto raggiunge le due aperture L_1 e L_2 con la stessa fase. Questo darebbe origine ad un pattern di frange simmetrico e con massimo di intensità sull'asse del sistema. Un punto Q_1 fuori asse produrrà invece un pattern di frange traslato lateralmente e perpendicolarmente all'asse. L'onda emessa da Q_1 avrà uno sfasamento rispetto a quella prodotta da Q_0 , dovuto al fatto che le due onde originate da L_1 e L_2 hanno percorso cammino diverso ; lo sfasamento sarà pari a:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2)$$

e, come accennato nel caso dell'interferenza di onde sferiche dalla teoria della diffrazione per onde sferiche ,il pattern di frange avrà uno spostamento laterale dato da:

$$x_m = \frac{1}{\lambda} \frac{z_L}{d} (r_1 - r_2)$$

Pensiamo ora che Q_1 e Q_0 emettano contemporaneamente. Se tra le due onde si ha uno sfasamento fissato e costante, il pattern risultante sarà simile a quello di Q_1 e Q_0 separatamente, ma semplicemente spostato lateralmente; i massimi di uno non coincidono con i massimi dell'altro.

Quando la sorgente è incoerente le fluttuazioni di fase tra due sorgenti sono statisticamente distribuite e quello che si osserverà sarà solamente la somma delle intensità dei due campi in quanto il termine di interferenza in media vale zero. Allora la condizione per avere un pattern di

frange visibile è che i due sistemi di frange prodotte da Q_1 e Q_0 non siano troppo spostati lateralmente in modo che un massimo di uno non cada in un minimo dell'altro. Questa condizione, quando si avessero solo le due sorgenti puntiformi Q_1 e Q_0 separate da L , è verificata se vale la relazione:

$$|x_m| < \frac{a}{2} \quad \text{con} \quad a = \lambda \frac{z_L}{d} \quad (\text{separazione tra le frange})$$

il che comporta anche che :

$$|r_1 - r_2| < \frac{\lambda}{2} \quad (4,15)$$

che può essere espressa in termini dei parametri geometrici del dispositivo sperimentale

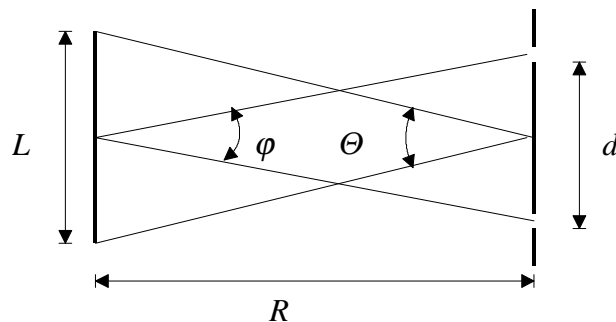
$$|r_1 - r_2| < \frac{dL}{R} \quad \text{da cui la condizione} \quad \frac{dL}{R} < \frac{\lambda}{2}$$

Ora se consideriamo anche tutti i punti Q_i da Q_0 a Q_1 della superficie estesa dobbiamo aggiungere i pattern di frange di tutti i punti che risulteranno tanto più spostati quanto più sono distanti dall'asse. Il massimo spostamento si ha per Q_1 e quindi possiamo prendere come condizione di coerenza spaziale la relazione

$$\frac{dL}{R} \leq \frac{\lambda}{2}$$

Possiamo introdurre anche due nuovi parametri φ e Θ che sono gli angoli sotto cui la sorgente vede le due aperture viceversa e definite da:

$$\frac{d}{R} = 2 \tan \frac{\varphi}{2} \cong \varphi \cong \text{sen } \varphi \quad \text{e} \quad \frac{L}{R} = 2 \tan \frac{\Theta}{2} \cong \Theta \cong \text{sen } \Theta$$



per cui la condizione di correlazione per la dimensione lineare della sorgente (fissati i due punti) o per la distanza tra i due punti (fissata la dimensione lineare della sorgente) diventa

$$L \sin \varphi \leq \frac{\lambda}{2} \quad \text{o} \quad d \sin \Theta \leq \frac{\lambda}{2}$$

È opportuno osservare che le proprietà di coerenza sono state determinate considerando solo il campo sulle due aperture. Tutti gli altri elementi del sistema sono puramente accessori: lo schermo per esempio serve solo per raccogliere il pattern su cui misurare l'intensità. La sovrapposizione è fatta sullo schermo, ma i campi delle due onde sono gli stessi di quelli sulle aperture a meno di un semplice ritardo temporale.

Se consideriamo il pattern di interferenza nella zona prossima all'asse del sistema, il cammino dalle aperture allo schermo può essere ritenuto ragionevolmente uguale per i due fronti d'onda, per cui il pattern di frange conterrà informazioni circa la confrontabilità delle forme d'onda $V(r_1, t)$ e $V(r_2, t)$ nella posizione delle due aperture r_1 e r_2 rispetto alla sorgente senza ritardo di tempo. Questa informazione è contenuta nella *funzione di cross-correlazione* o *mutua correlazione*

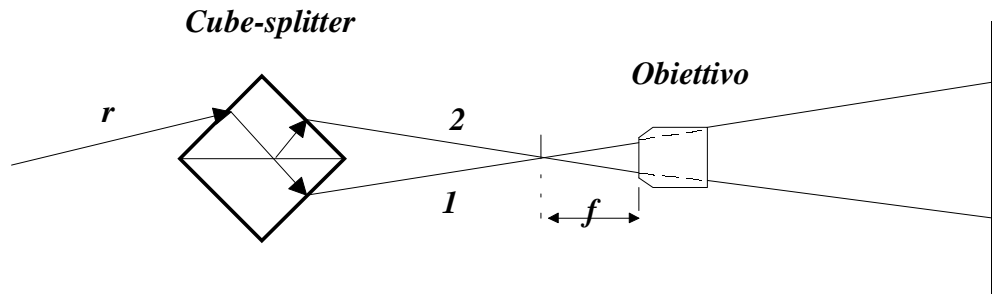
$$\Gamma(r_1, r_2, \theta) = \Gamma_{1,2}(\theta) = \langle V(r_1, t) \cdot V^*(r_2, t) \rangle$$

che è la *funzione di correlazione spaziale*.

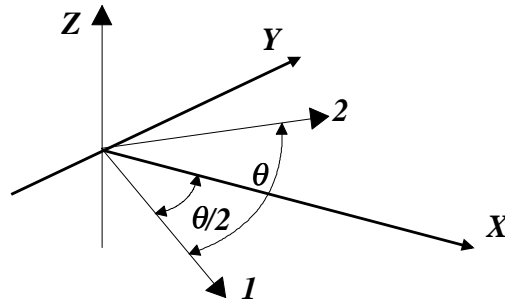
4,4 Interferenza

Perché due onde possano interferire, è necessario che la sorgente o i fronti d'onda che interagiscono abbiano sufficienti caratteristiche di coerenza. Per poter osservare l'eventuale pattern di frange o per poterlo raccogliere su di un supporto fisico, lastra o pellicola fotografica, telecamera, ecc., questo non deve avere un passo troppo piccolo in modo da poter essere risolto dal supporto su cui si registra. Per esempio il passo del reticolo non deve essere più grande della grana della pellicola fotografica che si utilizza. Vediamo allora quale condizione, circa l'inclinazione tra i due fasci che si sovrappongono, devono essere rispettate al fine di avere un pattern utilizzabile per eventuali applicazioni. Facciamo riferimento al più semplice caso di interferenza e mettiamoci nelle condizioni più favorevoli supponendo la sorgente assolutamente coerente (laser).

Un fascio laser incide su un cube-splitter come mostrato in figura. Dal cube-splitter emergono due fasci, che essendo derivati per divisione di ampiezza dallo stesso fascio sono assolutamente correlati e possono dare interferenza. L'interferenza avviene nel fuoco dell'obiettivo, fissato come origine del sistema di riferimento, di volume $< 1 \text{ mm}^3$.



Dal cube-splitter i due raggi si propagano nelle direzioni $\pm \theta/2$



Le frecce 1 e 2 sono le *normali ai fronti d'onda* e quindi la loro sovrapposizione sarà rappresentata da:

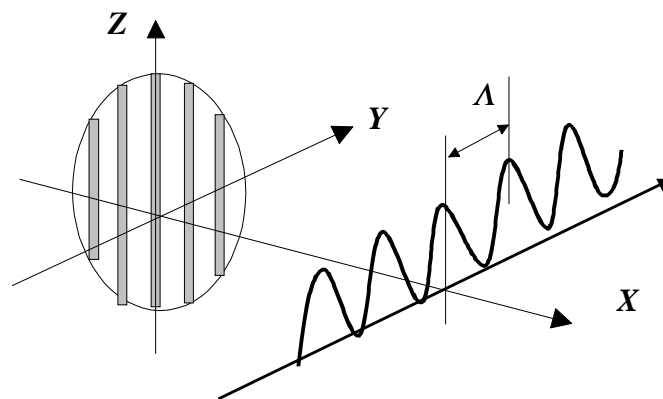
$$E(x, y, z, t) = A e^{ik\alpha x} (e^{-ik\beta y} + e^{ik\beta y}) e^{i\omega t} = 2A \cos(k\beta y) e^{ik\alpha x} e^{i\omega t}$$

α, β, γ ($\gamma = 0$) sono i coseni direttori.

In particolare l'intensità nel piano (x, y) o su qualunque piano ad esso parallelo nel volume di sovrapposizione, sarà del tipo:

$$I = 4A^2 \cos^2(k\beta y) \quad (4,14)$$

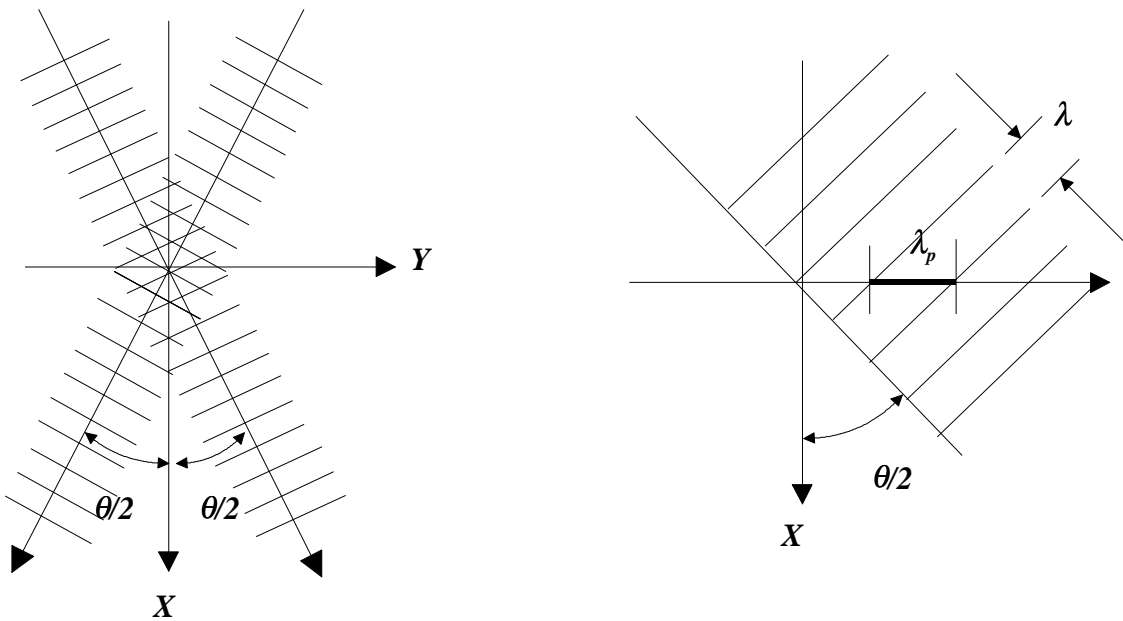
il cui andamento è mostrato in figura



Con riferimento alla figura, il cerchio rappresenta la traccia dell'onda e le strisce verticali rappresentano delle "lame di luce" la cui intensità è data dalla (4,14). Notiamo ancora come l'intensità abbia un andamento tipo \cos^2 .

Osserviamo che l'onda che si propaga nella direzione $+\theta/2$ rispetto all'asse X e il pattern di frange si osserva nel piano (Y,Z) . Quindi quella che ci interessa è la periodicità delle frange lungo Y . Se λ è la lunghezza d'onda, cioè la distanza tra due fronti d'onda della radiazione, si può vedere che la periodicità di tali frange, che è lungo l'asse Y , è data da

$$\lambda_p = \frac{\lambda}{\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$



e quindi la periodicità della funzione (4,14) è data da:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{2\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Questa è proprio la condizione che si deve osservare per essere sicuri di poter risolvere, sul supporto usato, il pattern di frange di interferenza. Questa sarà una condizione fondamentale nell'olografia