1 FONDAMENTI SULLE ONDE E.M. OTTICHE

I fenomeni ottici possono essere divisi in quattro aree: ottica geometrica, ottica fisica (ondulatoria), ottica quantistica e ottica statistica.

Attraverso l'ottica geometrica vengono affrontati in particolare i fenomeni legati alla formazione delle immagini nei quali è possibile trascurare i fenomeni di diffrazione. Inoltre sempre attraverso l'ottica geometrica possono essere studiate le caratteristiche e dei sistemi e degli strumenti ottici, nonché i limiti dell'approssimazione gaussiana (sistemi ottici non centrati e policromia della luce. Le leggi più importanti che vengono utilizzate sono le leggi delle riflessione rifrazione

Mediante l'ottica fisica possono essere descritti i fenomeni della diffrazione, interferenza e polarizzazione e si fonda sulle equazioni di Maxwell. Secondo questa teoria la luce è descrivibile come sovrapposizione di onda elettromagnetiche trasversali di differente frequenza. La regione ottica copre uno stretta gamma di frequenze e.m. attorno ai 10^{14}- 10^{15} Hz. L'ottica fisica è alla base di interessanti aree di applicazioni come l'olografia, l'ottica di Fourier, le fibre ottiche, tutte le varie tecniche interferometriche.

Attraverso l'ottica quantistica vengono studiati i fenomeni di assorbimento ed emissione. Questi fenomeni non possono essere interpretati attraverso le equazioni di Maxwell, ma rientrano nel campo più generale dell'elettrodinamica quantistica e della teoria dei campi. L'idea di fondo è che l'interazione tra radiazione e materia avvenga solo attraverso scambi di "quanti" di campo elettromagnetico, cioè i ***fotoni***, di energia $E=h\nu$ o multipli interi e che tali differenze di energia, rispetto all'energia dello stato fondamentale in un atomo, venga emessa come radiazione elettromagnetica. Dal punto di vista quantistico, l'energia associata ad una radiazione può essere interpretata in termini di numero di fotoni. Esiste un limite per l'energia associata alla radiazione al di sotto del quale (basso numero di fotoni) sono predominanti gli aspetti quantistici. Il più importante strumento ottico quantistico è il laser.

L'ottica statistica costituisce in settore più nuovo dell'ottica e ha avuto uno sviluppo notevole proprio grazie laser, alla possibilità di utilizzare elettronica estremamente veloce e l'impiego di tecniche di digitalizzazione dei segnali. Per esempio attraverso l'ottica statistica è possibile risalire a proprietà di sistemi in evoluzione mediante misure di correlazione.

In questo corso ci occuperemo prevalentemente di ottica fisica. Analizzeremo fenomeni legati alla propagazione della radiazione luminosa in un mezzo omogeneo, che per semplicità possiamo assimilare al vuoto, e delle interazioni con la materia, utilizzando il modello classico ondulatorio.

Pertanto tratteremo la luce come ***un'onda elettromagnetica classica***, cioè una *perturbazione* di *natura elettromagnetica* che si propaga secondo un modello ondulatorio.

1,1 Equazione delle Onde

In generale la propagazione della radiazione elettromagnetica in un mezzo è descritta dalle ***equazioni di Maxwell*** che per il campo elettrico $\vec{E}$ ed il campo di induzione magnetica $\vec{B}$, in un mezzo omogeneo e isotropo di costante dielettrica ε, permeabilità magnetica μ e conducibilità σ, si scrivono:

$$div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$ Legge di Coulomb

$$div\,\vec{B} = 0$$ Non esistenza del monopolo magnetico

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ Legge di Faraday

$$rot\,\vec{B} = \mu\sigma\vec{E} + \mu\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$ Legge di Ampere con la Corrente di spostamento di Maxwell

In assenza di cariche spaziali ($\rho = 0$), di correnti ($\vec{j} = 0$) e per un mezzo non conduttore ($\sigma = 0$), diventano semplicemente:

$$div\,\vec{E} = 0, \qquad div\,\vec{B} = 0$$

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad rot\,\vec{B} = \mu\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Queste equazioni legano i vettori campo attraverso simultanee equazioni differenziali. Operando opportunamente è possibile scrivere nuove equazioni differenziali a cui ciascuno dei due vettori deve soddisfare separatamente, che possono essere scritte nella forma:

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0\ ; \qquad \nabla^2\vec{B} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{1,1}$$

$$\textit{dove}\quad \nabla^2 \quad \textit{è l'operatore Laplaciano:}\ \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Queste espressioni rappresentano equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine, lineare ed omogenee (quando si escludono le sorgenti della perturbazione) di tipo parabolico del tipo:

$$\nabla^2 V - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \tag{1,2}$$

che è dette ***equazione delle onde*** e descrive la propagazione, in un mezzo opportuno, di una perturbazione generica, descritta da una funzione scalare arbitraria $V = V(\vec{r}, t)$, che si propaga con velocità *v*. Una tale equazione compare in diversi settori della fisica; per esempio in acustica dove descrive la propagazione di un'onda sonora di bassa intensità; in meccanica dove descrive la propagazione di una perturbazione meccanica lungo una corda tesa pizzicata oppure le vibrazioni longitudinali e trasversali di una sbarra; in termodinamica dove descrive la conduzione del calore in un solido.

Le equazioni (1,1) rappresentano un sistema di 6 equazioni scalari. Ciascuna componente del campo elettromagnetico (E_x, E_y, E_z , B_x, B_y, B_z) obbedisce ad una equazione del tipo (1,2) dove la velocità di propagazione *v, che rappresenta la velocità della luce nel mezzo,* è data da: $v = c / \sqrt{\varepsilon\,\mu}$

Nel *vuoto* ($\varepsilon = \varepsilon_0$ = 8.85 · 10^{-12} s^2 c^2/ m^3 Kg; $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ m Kg/c^2), la velocità di propagazione della luce vale $c \cong 3 \cdot 10^8$ *m/s* ed è definita da : $c = 1 / \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$

Si possono introdurre delle grandezze che caratterizzano i mezzi dal punto di vista ottico. Si definisce "***indice di rifrazione assoluto***" ***n*** di un mezzo la quantità: $n = \sqrt{\varepsilon\,\mu}$; allora **c = n v**. Si definisce "***indice di rifrazione del mezzo 2 relativo al mezzo 1***", la quantità: $n_{1,2} = v_1 / v_2$ dove v_1 e v_2 sono le velocità di propagazione dell'onda nei due mezzi rispettivamente, quando la luce passa da un mezzo trasparente ad un altro (Legge delle rifrazione)

Uno degli obiettivi dell'ottica è risolvere l'equazione delle onde sotto diverse condizioni al contorno date da aperture od ostacoli sul cammino di propagazione della radiazione luminosa .

1,2 Onda uni-dimensionale

Per richiamare alcune proprietà fondamentali delle onde, analizziamo per semplicità formale il caso di onda scalare che si propaga nel vuoto,in assenza di cariche e di correnti, nella direzione *x* con vettore campo elettrico, associato all'onda luminosa, che vibra nel piano (*y,z*). Il campo elettrico *E(x,t)*, associato alla radiazione, deve soddisfare l'equazione omogenea delle onde del tipo

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \tag{1,3}$$

che se scritta nella forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)E(x,t) = 0$$

ci dice[1] che sia una $E_1(x,t) = f(x - v\,t)$ che una $E_2(x,t) = g(x + v\,t)$ possono essere soluzione dell'equazione d'onda uni-dimensionale (1,3) e, per la linearità dell'equazione delle onde, anche una qualunque loro combinazione lineare:

$$E(x,t) = a\,f(x - v\,t) + b\,g(x + v\,t)$$

con a e b costanti e f e g funzioni arbitrarie. La f rappresenta una perturbazione che si propaga nella direzione delle x *positive*, mentre la g rappresenta una perturbazione, anche di profilo diverso, che si propaga nella direzione delle x *negative*. E' il principio di sovrapposizione per le onde luminose

Assumendo che la radiazione si propaghi nella direzione positiva delle x, una soluzione particolarmente semplice dell'equazione delle onde è quella detta "***onda sinusoidale***" o "***onda armonica***". La più semplice onda armonica è data da una funzione sinusoidale, quindi periodica, di x e t della forma:

$$E(x\ t) = A \cos(\omega\, t - k\, x + \delta) \tag{1,4}$$

dove A è l'***ampiezza dell'onda*** e $(\omega\, t - k\, x)$ è la ***fase***. La costante k è nota come ***numero d'onda***. δ è una ***fase iniziale*** che con una opportuna scelta dei tempi può essere posta $= 0$.

Si indica con λ il periodo spaziale, noto come ***lunghezza d'onda***; ponendo che per un incremento di x pari a λ, il valore di $E(x,t)$ rimanga inalterato, vale le relazioni: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

Si indica con T (***periodo***) il periodo temporale; k e T sono legato dalla relazione: $k\,c\,T = 2\pi$

---

1 $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right) f(x - vt) = \frac{\partial}{\partial x}[f(x - vt)] + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}[f(x - vt)] = f(x - vt) + \frac{1}{v}(-v) f(x - vt) = 0$

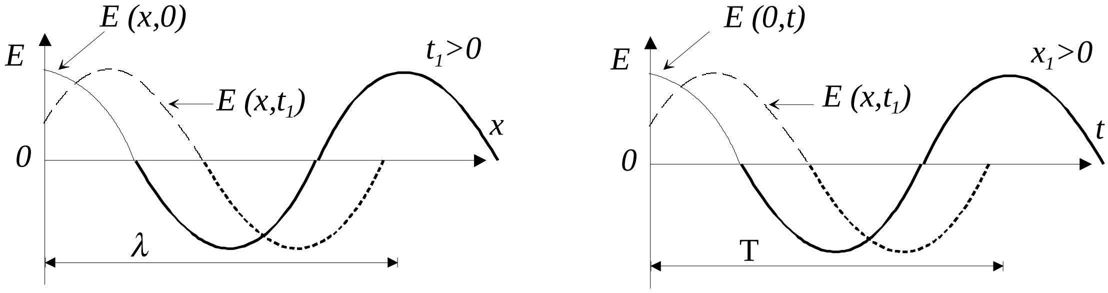
$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right) g(x + vt) = \frac{\partial}{\partial x}[g(x + vt)] - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[g(x + vt)] = g(x + vt) - \frac{1}{v}(v) g(x + vt) = 0$

Se si introduce la ***frequenza*** ν, numero di vibrazioni al secondo ($\nu = \dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{T}}$) , e la ***frequenza angolare*** $\omega = 2\pi\,\nu$, possiamo anche scrivere le relazioni: $\lambda = \boldsymbol{c}\; \boldsymbol{2\pi} \,/\, \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{c} = \lambda\,\nu$

La (1,4) scritta esplicitamente in termini della lunghezza d'onda e del periodo, con $\delta = 0$, diventa:

$$\boldsymbol{E(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}\,t - \frac{2\pi}{\lambda}\,x\right)}$$

che possiamo rappresentare in due grafici rispetto a *x* (a) ed a *t* (b) separatamente:



a) *b)*

Un punto di fase costante si muove con la velocità dell'onda: $c = \dfrac{\lambda}{T} = \nu\,\lambda = \dfrac{\omega}{k}$

ed è detta ***velocità di fase*** dell'onda. Coincide con la velocità di propagazione dell'onda nel mezzo.

1,3 Onda Piana

Tra le varie soluzioni dell'equazione delle onde, assume una rilevanza fondamentale l'***onda piana*** che è quell'onda la cui fase ad un tempo fissato t è costante in ogni piano perpendicolare alla direzione di propagazione.Vogliamo trovare l'espressione dell'onda piana che si propaga in una direzione individuata dal versore $\vec{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{s_x}, \boldsymbol{s_y}, \boldsymbol{s_z})$. Se indichiamo con $\vec{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ il vettore posizione che individua un punto generico P e definiamo *vettore d' onda* $\vec{\boldsymbol{k}}$ (o *vettore propagazione)* in un mezzo come $\vec{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{k}\,\vec{\boldsymbol{s}}$ di modulo $\boldsymbol{2\pi/\lambda}$. Osserviamo che l'equazione:

$$\vec{\boldsymbol{k}} \cdot \vec{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{cost}$$

rappresenta piani paralleli e perpendicolari a $\vec{k}$ e alla direzione di propagazione $\vec{s}$.

Si definisce ***onda piana (armonica)*** l'onda che si propaga nella direzione $\vec{k}$, rappresentata da una funzione *armonica rispetto al tempo di fase costante*, ad ogni *t* fissato, su piani $\vec{k}\cdot\vec{r} = cost$, ortogonali al vettore $\vec{k}$ cioè:

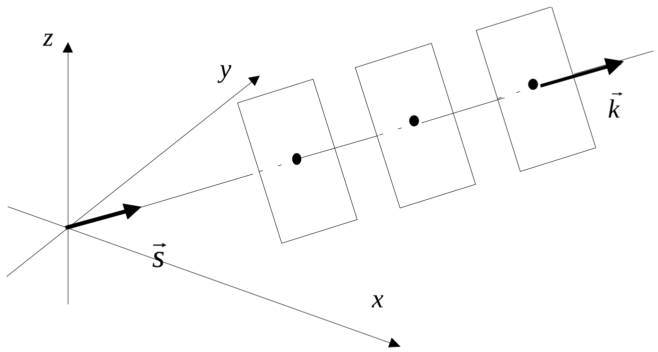
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{A}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) = \vec{A}\cos\left[\omega\left(t - \frac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{v}\right)\right] \quad (1,5)$$

Il vettore $\vec{A}$, il cui modulo rappresenta l'ampiezza dell'onda, rappresenta anche la "***polarizzazione***" dell'onda, cioè la direzione lungo cui vibra il campo elettrico associato alla perturbazione luminosa. Il vettore $\vec{A}$ giace interamente su piani perpendicolari al vettore $\vec{k}$.

Il luogo geometrico dei punti dello spazio caratterizzati da uguale valore delle fase ad ogni istante t fissato, si dicono *superfici d'onda* (o *fronti d'onda*) della (1,5) e sono piani ortogonali alla direzione di propagazione $\vec{s}$ e quindi a $\vec{k}$.

Nel caso di onde sferiche le superfici a fase costante (fronti d'onda) saranno delle superfici sferiche. Il vettore $\vec{k}$ sarà punto per punto ortogonale a queste superfici. Ci possono essere casi assai più complessi (campi speckle) come per esempio la radiazione laser uscente da una fibra ottica il cui fronte d'onda ha fase costante su superfici nello spazio assai complesse

In figura è mostrata un'onda piana che si propaga nello spazio nella direzione $\vec{s}$



La periodicità spaziale di questi fronti d'onda è data da $n\lambda\,\dfrac{\vec{k}}{k}$.

Se indichiamo con α , β e γ sono i coseni direttori del vettore $\vec{k}$, si ha:

$$k_x = \alpha k; \qquad k_y = \beta k; \qquad k_z = \gamma k.$$

Ricordando che $\boldsymbol{k} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ possiamo scrivere:

$$\boldsymbol{k}_x = 2\pi \frac{\alpha}{\lambda} = 2\pi\ \boldsymbol{f}_x \quad ; \quad \boldsymbol{k}_y = 2\pi \frac{\beta}{\lambda} = 2\pi\ \boldsymbol{f}_y \quad ; \quad \boldsymbol{k}_z = 2\pi \frac{\gamma}{\lambda} = 2\pi\ \boldsymbol{f}_z$$

dove f_x, f_y e f_z sono dette "***frequenze spaziali***"

Dalla teoria elettromagnetica, attraverso le equazioni di Maxwell, è possibile ricavare delle relazioni che legano i vettori elettromagnetici $\vec{E}$, $\vec{B}$ e $\vec{k}$:

$$\vec{\boldsymbol{k}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = 0\ , \qquad\qquad \vec{\boldsymbol{k}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0 \qquad (1,6)$$

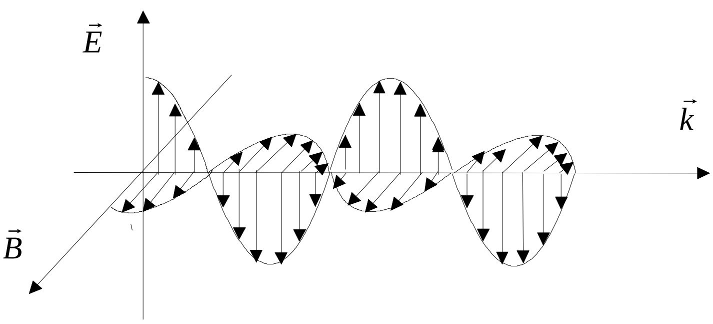
$$\vec{\boldsymbol{k}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}} = -\ \omega\ \varepsilon\mu\ \vec{\boldsymbol{E}}\ , \qquad\qquad \vec{\boldsymbol{k}} \wedge \vec{\boldsymbol{E}} = \omega\, \vec{\boldsymbol{B}} \qquad (1,7)$$

Le (1,6) mostrano che nelle onde elettromagnetiche i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ ***sono perpendicolari*** al vettore $\vec{k}$ e poiché i campi vibrano in direzione perpendicolare alla direzione di propagazione possiamo dire che ***la luce è rappresentata da un'onda trasversale***.

Le (1,7) ci mostrano che i vettori $\vec{E}$ e $\vec{B}$ ***sono perpendicolari tra di loro*** e ***oscillano in fase*** . Per i moduli vale la relazione:

$$\left| \vec{\boldsymbol{E}} \right| = \boldsymbol{v} \left| \vec{\boldsymbol{B}} \right| \qquad (1,8)$$

I tre vettori $\vec{E}$, $\vec{B}$ e $\vec{k}$ formano una terna cartesiana destrorsa. I vettori $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono polarizzati linearmente nella direzione in cui sono confinate le oscillazioni. Nella figura viene mostrata la distribuzione di campo, ad un fissato istante, nel caso di onda piana (funzioni di tipo armonico).



Quella mostrata è "***un'onda piana monocromatica polarizzata linearmente***".

Quando si studiano problemi legati alla propagazione delle onde in mezzi lineari e si eseguono operazioni lineari (diffrazione , interferenza ecc.) sui vettori d'onda, può essere più conveniente utilizzare una notazione complessa per esprimere la funzione d'onda, del tipo

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{A}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t-\delta)} = \vec{A} e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\delta)} \qquad (1,10)$$

Al termine dei calcoli, il risultato va convertito in forma reale aggiungendo il complesso coniugato e dividendo per due. Qualche attenzione deve essere presa quando si eseguono operazioni non lineari sulle funzioni armoniche.

Le onde del tipo (1,5), cioè puramente sinusoidale, sono caratterizzate da una sola frequenza e sono dette "***monocromatihe***". Va osservato che tali onde hanno estensione spaziale e temporale infinite e quindi sono pure astrazioni matematiche. Tuttavia queste funzioni armoniche hanno una notevole importanza per il fatto che una qualsiasi forma d'onda, alla luce del principio di sovrapposizione, può essere espressa come opportuna combinazione di opportune onde armoniche.

1,4 Energia e intensità della luce

Quando una regione dello spazio viene illuminata, in ogni punto $\vec{r}$ si ha un campo elettrico $\vec{E}(t)$ (non elettrostatico) ed un campo di induzione magnetica $\vec{B}(t)$ che vibrano nel tempo. Dalla teoria elettromagnetica sappiamo che se in una certa regione di spazio, che per semplicità supponiamo vuoto, siamo in presenza di un campo elettrico $\vec{E}(t)$ e un campo di induzione magnetica $\vec{B}(t)$, in quella regione di spazio siamo in presenza di una densità di energia :

$$W = W_E + W_B = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

e tenendo conto della (1,8) nel vuoto $|\vec{E}| = c|\vec{B}|$ e della relazione $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ si ottiene :

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0}\frac{1}{c^2} E^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{\varepsilon_0\mu_0}{2\mu_0} E^2 = \varepsilon_0\, E^2 \qquad (1,11)$$

da cui si osserva in ogni punto dello spazio la densità di energia elettrica e magnetica è uguale.

L'onda che si propaga trasporta energia; l'energia si trasmette nella direzione in cui si propaga l'onda, cioè nella direzione del vettore $\vec{k}$ che coincide con la direzione di $\vec{E} \wedge \vec{B}$.

Consideriamo la quantità di energia che nell'unità di tempo attraversa l'unità di superficie (posta nel vuoto) perpendicolare alla direzione di propagazione. Coinciderà con l'energia che nell'unità di tempo attraversa la base di un cilindro di lunghezza *ct* (*t = 1 sec*) e sezione unitaria. Quindi il flusso di energia che accompagna la propagazione dell'onda, dato da *ctW* (*W* densità di energia; *t = 1 sec*) coincide con il "***vettore di Poynting***" definito da:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \varepsilon_0 c^2 \vec{E} \wedge \vec{B} \qquad (1,12)$$

Poiché $\vec{E}$, $\vec{B}$ e $\vec{S}$ oscillano nelle frequenze ottiche con $\nu = 10^{-14} \div 10^{-15}\ Hz$ non è possibile valutarne i valori istantanei ma solo il loro valore mediato sui tempi di osservazione τ di parecchi ordini di grandezza superiori al periodo T. Definiamo "***intensità di radiazione***" $\boldsymbol{I}$ il valore medio di $\vec{S}$ nell'intervallo di tempo τ.

Nel caso di onde piane di tipo armonico, polarizzate linearmente, cioè con vettori $\vec{E}$ e $\vec{B}$ con direzione costante nel tempo, che si propagano nel vuoto in direzione $\vec{k}$, possiamo scrivere:

$$I = <\left|\vec{S}\right|> = \frac{\varepsilon_0 c}{2} A^2 \qquad (1,13)$$

Si può notare come la I , a meno del fattore costante $\frac{\varepsilon_0 c}{2}$, è uguale a $\vec{E} \cdot \vec{E}^*$, cioè l' *intensità dell'onda* è proporzionale al quadrato dell'ampiezza del campo elettrico ad essa associata.