

3 POLARIZZAZIONE

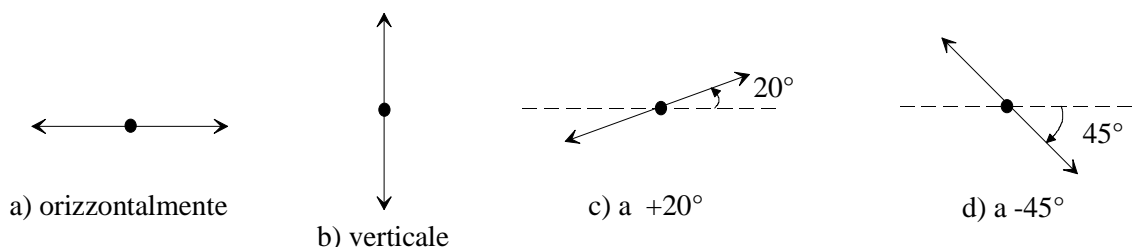
Il fenomeno della polarizzazione nel caso delle onde luminose riveste una notevole importanza dal punto di vista applicativo, in quanto su questa proprietà si basano tutte le tecniche di analisi “*ellissometriche*”. L’interazione di una radiazione luminosa polarizzata con la materia, in particolare attraverso la riflessione, può determinare una variazione dello stato di polarizzazione della radiazione incidente. Dall’analisi dello stato di polarizzazione della luce riflessa possibile risalire a proprietà della superficie riflettente (indice di rifrazione, spessore di strati sottili depositati, rugosità, etc.).

Possiamo ricordare che un’onda si dice “*polarizzata*”, quando la vibrazione del vettore elettrico \vec{E} associato alla radiazione presenta qualche preferenza circa la direzione, sempre comunque in un piano ortogonale al vettore d’onda \vec{k} . Più in generale la possibilità di essere polarizzata è una caratteristica che hanno solo le onde trasversali.

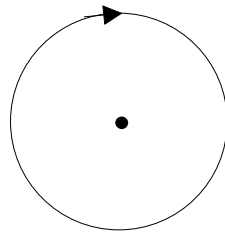
3.1 Generalità sulla polarizzazione della luce

Per descrivere lo stato di polarizzazione si fa riferimento, per convenzione, al solo vettore elettrico \vec{E} . Negli esempi la luce si propaga in direzione perpendicolare al foglio in verso uscente (●). Gli stati di polarizzazione possono essere di tre tipi:

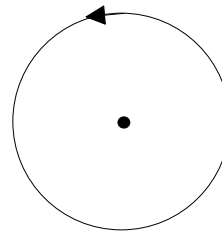
- a) **rettilineo** o **lineare**: la direzione del vettore \vec{E} è costante nel tempo. L’estremo del vettore \vec{E} , in un dato punto, descrive nel tempo un segmento. Convenzionalmente viene rappresentata con un segmento con doppia freccia



- b) **circolare**: l’estremo del vettore \vec{E} , in un dato punto, descrive nel tempo una circonferenza. Si distingue tra polarizzazione circolare destrorsa o sinistrorsa a seconda che l’estremo del vettore \vec{E} , visto da un osservatore verso cui si propaga l’onda, descriva nel tempo una circonferenza in senso orario o antiorario

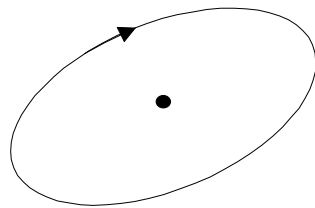


a) destrorsa

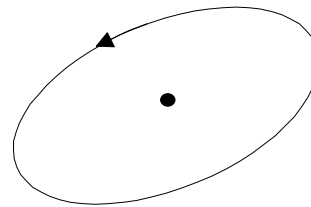


a) sinistrorsa

c) **ellittico**, quando l'estremo del vettore \vec{E} , in un dato punto, descrive nel tempo una ellisse; anche in questo caso si distingue tra polarizzazione ellittica destrorsa o sinistrorsa a seconda che l'estremo del vettore \vec{E} , visto da un osservatore verso cui si propaga l'onda, descriva nel tempo una circonferenza in senso orario o antiorario

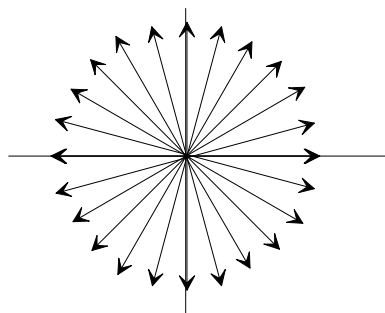


a) destrorsa



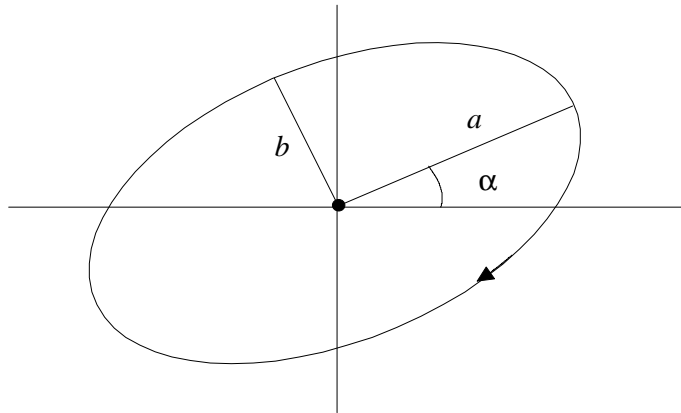
b) sinistrorsa

Nel caso di luce **non polarizzata** l'estremo del vettore \vec{E} , in un dato punto, vibra nel tempo in tutte le direzioni mantenendosi perpendicolare alla direzione di propagazione e può essere rappresentata come in figura



In generale il vettore \vec{E} che rappresenta l'onda in un dato punto dello spazio, giace comunque in un piano. Lo si può sempre scomporre secondo due direzioni tra loro ortogonali e ortogonali alla direzione di propagazione. Ne segue che un'onda polarizzata nello stato di polarizzazione più generale ellittico, lo si può pensare come la **sovrapposizione coerente, cioè con una relazione di fase fissa, di due onde, della stessa frequenza, polarizzate linearmente secondo due direzioni tra loro ortogonali.**

Le caratteristiche di uno stato di polarizzazione (eccentricità, direzione dell'asse principale, verso di percorrenza) dipendono dalle ampiezze delle due onde componenti e dalla loro relazione di fase, costante nel tempo.



Lo stato di polarizzazione più generale ellittico è caratterizzato dai seguenti parametri:

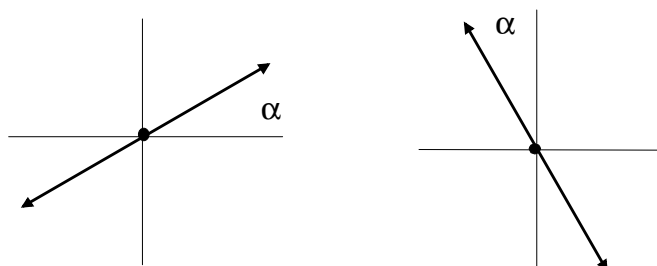
- l'angolo α (azimut); angolo formato tra il semiasse maggiore e l'asse x ; $-90^\circ \leq \alpha \leq +90^\circ$
- ellitticità**; è il rapporto b/a tra i due semiassi; si usa anche $\beta = \arctg(b/a)$; $\beta \leq +45^\circ$;
- elicità**; specifica il verso di rotazione dell'estremo del vettore \vec{E} ; si può avere elicità destrorsa o sinistrorsa

Lo stato di polarizzazione lineare è un caso particolare corrispondente ad ellitticità 0. Lo stato di polarizzazione circolare è un caso particolare corrispondente ad ellitticità 1

Si può osservare che:

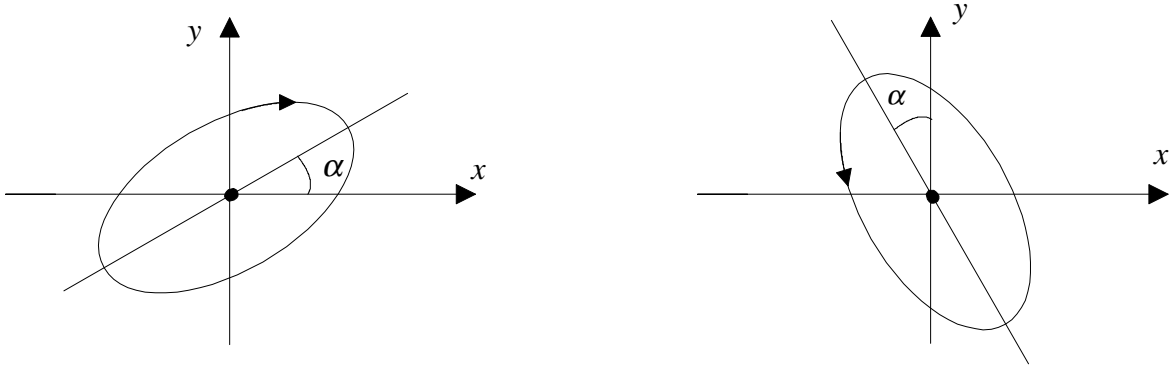
- la polarizzazione lineare comprende un numero infinito di forme che differiscono per *azimut* α ;
- la polarizzazione circolare comprende due tipi di forme differenti per *elicità*;
- la polarizzazione ellittica comprende infinite forme che differiscono per *azimut*, *ellitticità* ed *elicità*.

Due stati di **polarizzazione lineare** si dicono **ortogonali** se differiscono per *azimut* di 90° .



Due stati di *polarizzazione circolare* si dicono *ortogonali* se sono un o *destrorso* e l'altro *sinistrorso*.

Due stati di *polarizzazione ellittica* sono *ortogonali* se gli *azimut dei semiassi maggiori* differiscono di 90° , hanno *stessa ellitticità* ma *opposta elicità* .



Un'onda non polarizzata si può ancora pensare come sovrapposizione di due onde polarizzate linearmente secondo direzioni tra loro ortogonale, ma con differenza di fase che varia a caso nel tempo. Si ha *sovrapposizione incoerente*.

3,2 Rappresentazione matematica della polarizzazione della luce

Esaminiamo la rappresentazione matematica dei vari stati di polarizzazione partendo dal caso più generale che è quello di onda *piana polarizzata ellitticamente*.

Ricordiamo l'espressione dell'onda armonica che si propaga nel vuoto:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \delta)} = \vec{A}(\vec{r}) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta)} \quad (3,1)$$

o separando la parte spaziale da quella temporale:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) e^{i g(\vec{r})} e^{-i \omega t}$$

La funzione scalare della posizione $g(\vec{r})$ è data da $g(\vec{r}) = \vec{k} \cdot \vec{r} - \delta$; le superfici $g(\vec{r}) = \text{cost}$ sono le superfici su cui l'onda ha fase costante.

Fissiamo un sistema di riferimento nel quale la direzione e verso dell'asse z coincide con la direzione e verso del vettore d'onda \vec{k} . In un tale sistema di riferimenti vettore campo elettrico \vec{E}

associato all'onda ha solo componenti x e y . In particolare per il vettore ampiezza $\vec{A}(\vec{r})$, possiamo scrivere:

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_x e^{i\delta_x} \vec{i} + A_y e^{i\delta_y} \vec{j}$$

con A_x e A_y sono costanti reali positive; δ_x e δ_y , fasi iniziali che dipendono dalla scelta dei tempi.

Nel sistema di riferimento fissato le componenti x e y del vettore campo elettrico \vec{E} associato all'onda, possono essere scritte nella forma:

$$E_x(z, t) = A_x \cos(\omega t - kz + \delta_x), \quad E_y(z, t) = A_y \cos(\omega t - kz + \delta_y)$$

Indicando con τ la parte variabile del fattore di fase, cioè $\tau = \omega t - kz$, possiamo scrivere che il luogo geometrico dei punti in un piano (x, y) ad un determinato z , dove le componenti del vettore \vec{E} sono date da:

$$\begin{cases} E_x = A_x \cos(\tau + \delta_x) \\ E_y = A_y \cos(\tau + \delta_y) \\ E_z = 0 \end{cases} \quad (3,2)$$

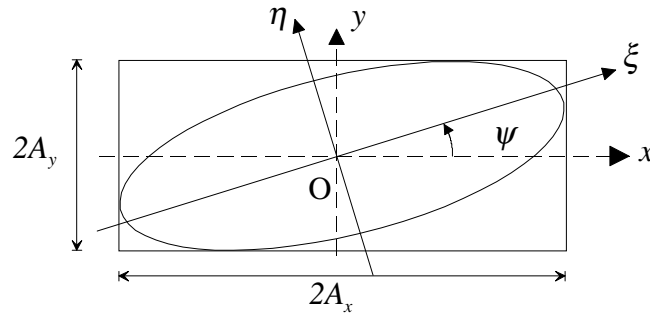
che rappresenta l'equazione parametrica della curva descritta nel tempo dall'estremo del vettore campo elettrico \vec{E} associato all'onda, in un determinato punto dello spazio. Indicando con

$$\delta = \delta_y - \delta_x$$

la differenza di fase tra le componenti del vettore \vec{E} , eliminando τ dalla (3,2) otteniamo:

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 - 2 \frac{E_x}{A_x} \frac{E_y}{A_y} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (3,3)$$

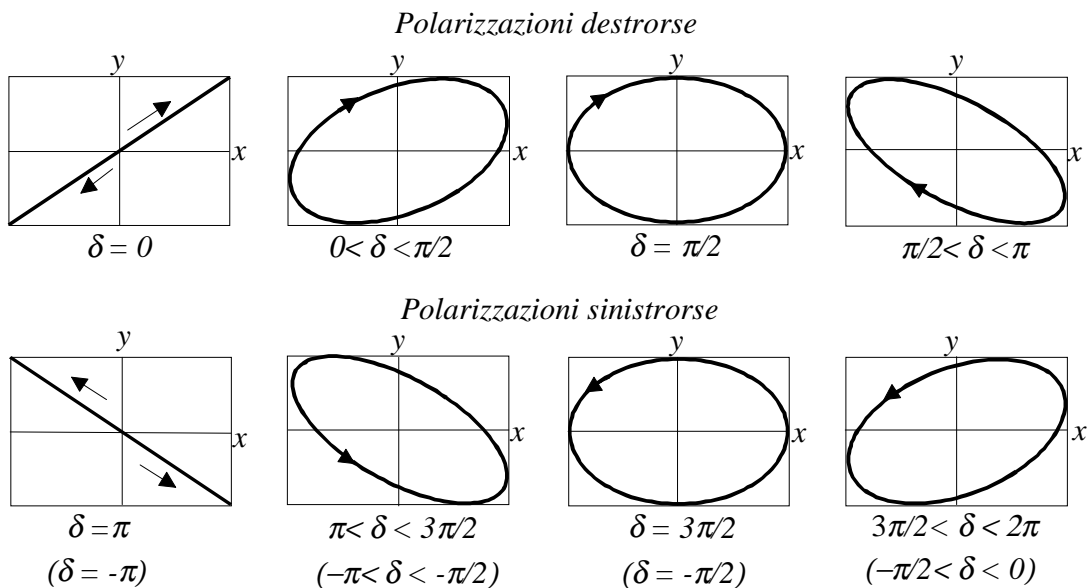
che è l'equazione di una ellisse. Possiamo quindi dire che l'estremo del vettore campo elettrico \vec{E} associato all'onda descrive nel tempo una ellisse che giace nel piano dell'onda (cioè nel piano perpendicolare al vettore \vec{k}). Una tale ellisse può essere interpretata come la composizione di due vibrazioni della stessa frequenza con differenti ampiezze e differenza di fase, tra le componenti $E_x(t)$ ed $E_y(t)$, fissata. In generale gli assi dell'ellisse non coincidono con gli assi del sistema di riferimento a causa del termine incrociato della (3,3). Si può vedere che l'ellisse è iscritta in un rettangolo di lati $2A_x, 2A_y$.



L'elicità sulla ellisse può essere determinata esaminando l'equazione parametrica (3,2) in un fissato piano, per esempio nel piano $z = 0$. In questo piano, l'equazione diventa:

$$\begin{cases} E_x = A_x \cos \omega t \\ E_y = A_y \cos(\omega t + \delta) \end{cases} \quad \text{con} \quad \delta = \delta_y - \delta_x \quad (-\pi < \delta < \pi) \quad (3,4)$$

e dipende dalla fase δ . La componente con fase più grande è detta *in anticipo*, quella con fase più piccola *in ritardo*. Ricordiamo che per convenzione una polarizzazione è destrorsa o sinistrorsa a seconda che l'estremo del vettore \vec{E} , visto da un osservatore verso cui si propaga l'onda, descriva nel tempo una circonferenza in senso orario o antiorario. Per $0 < \delta < \pi$ si ha **polarizzazione destrorsa**, per $-\pi < \delta < 0$ (oppure $\pi < \delta < 2\pi$) si ha **polarizzazione sinistrorsa**. In figura sono mostrati vari stati di polarizzazione ellittica, la luce si propaga in verso uscente dal foglio.



Dalla (3,4) si può osservare come sia possibile ricavare gli stati di *polarizzazione lineare* e *circolare* come caso particolare di quello ellittico.

L'ellisse si riduce ad un segmento quando

$$\delta = m \pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad \text{e} \quad \frac{E_y}{E_x} = (-1)^m \frac{A_y}{A_x}$$

e si dice che il vettore \vec{E} è **polarizzata linearmente**.

L'ellisse diventa una circonferenza quando

$$\delta = m \pi/2 \quad (m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots) \quad \text{e} \quad E_x = E_y$$

(infatti la (2,3) diventa: $E_x^2 + E_y^2 = A^2$) e si dice che il vettore \vec{E} è **polarizzata circolarmente**

Quando $\delta = \pi/2 + 2m\pi$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) la polarizzazione è destrorsa e l'equazione parametrica per il vettore polarizzato circolarmente destrorso è data da:

$$\begin{cases} E_x = A \cos(\tau + \delta_x) \\ E_y = A \cos(\tau + \delta_x + \pi/2) = -A \sin(\tau + \delta_x) \end{cases} \quad (3,5)$$

Quando $\delta = -\pi/2 + 2m\pi$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) la polarizzazione è sinistrorsa e l'equazione parametrica per il vettore polarizzato circolarmente sinistrorsa è data da:

$$\begin{cases} E_x = A \cos(\tau + \delta_x) \\ E_y = A \cos(\tau + \delta_x - \pi/2) = A \sin(\tau + \delta_x) \end{cases} \quad (3,6)$$

Un qualunque stato di polarizzazione lo si può rappresentare matematicamente come la sovrapposizione (coerente, cioè con differenza di fase costante) di due stati di polarizzazione lineari tra loro ortogonale (o circolari opposti). Questi stati di polarizzazione sono anche noti come autostati della propagazione. Il particolare stato di polarizzazione dipende dalla differenza di fase tra le due componenti.

Se per rappresentare i campi si utilizza il formalismo complesso, l'equazione (3,3), diventa:

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{A_y}{A_x} e^{i(\delta_x - \delta_y)} = \frac{A_y}{A_x} e^{-i\delta}$$

Dal valore di questo rapporto si determinano immediatamente la natura della polarizzazione e si ritrova nuovamente che la luce è:

$$\begin{aligned}
 \text{a) Polarizzazione lineare per } \delta = m\pi \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots & \quad \frac{E_y}{E_x} = (-1)^m \frac{A_y}{A_x} \\
 \text{b) Polarizzazione circolare destrorsa per } \delta = \pi/2, \quad E_x = E_y & \quad \frac{E_y}{E_x} = \frac{A_y}{A_x} e^{-i\pi/2} = -i \\
 \text{c) Polarizzazione circolare sinistrorsa per } \delta = -\pi/2, \quad E_x = E_y & \quad \frac{E_y}{E_x} = \frac{A_y}{A_x} e^{i\pi/2} = i
 \end{aligned}$$

In generale il rapporto $\frac{E_y}{E_x}$ ha parte immaginaria negativa, per la polarizzazione destrorsa, parte immaginaria è positiva, per la polarizzazione sinistrorsa.

3,3 Parametri caratteristici dello stato di polarizzazione ellittica

In generale gli assi dell'ellisse non coincidono con gli assi del sistema di riferimento ox, oy : E' possibile determinare gli assi dell'ellisse fissando un nuovo sistema di riferimento $o\xi, o\eta$, coincidente con gli assi dell'ellisse, eseguendo una rotazione di un angolo ψ ($0 \leq \psi < \pi$) del sistema ox, oy attorno all'asse z . Le componenti del campo elettrico \vec{E} rispetto agli assi dell'ellisse saranno:

$$\begin{cases} E_\xi = E_x \cos\psi + E_y \sin\psi \\ E_\eta = -E_x \sin\psi + E_y \cos\psi \end{cases}$$

e indicando con $2a$ e $2b$ la lunghezza degli assi dell'ellisse, l'equazione parametrica dell'ellisse (3,2) riferita ad $o\xi, o\eta$, diventa:

$$\begin{cases} E_\xi = a \cos(\tau + \delta) \\ E_\eta = \pm b \sin(\tau + \delta) \end{cases}$$

il doppio segno distingue i due possibili versi di rotazione dell'estremo del vettore \vec{E} . Con qualche passaggio trigonometrico si può scrivere l'equazione:

$$\tan 2\psi = \frac{2A_x A_y}{A_x^2 + A_y^2} \cos \delta$$

Indicando con $\frac{A_y}{A_x} = \tan \alpha$ il rapporto tra le ampiezze massime del campo elettrico \vec{E} riferite a ox, oy ($0 \leq \alpha \leq \pi/2$) e con $\mp \frac{b}{a} = \tan \chi$ il rapporto tra i semiassi dell'ellisse ($-\pi/4 \leq \chi \leq \pi/4$)

si ottiene:

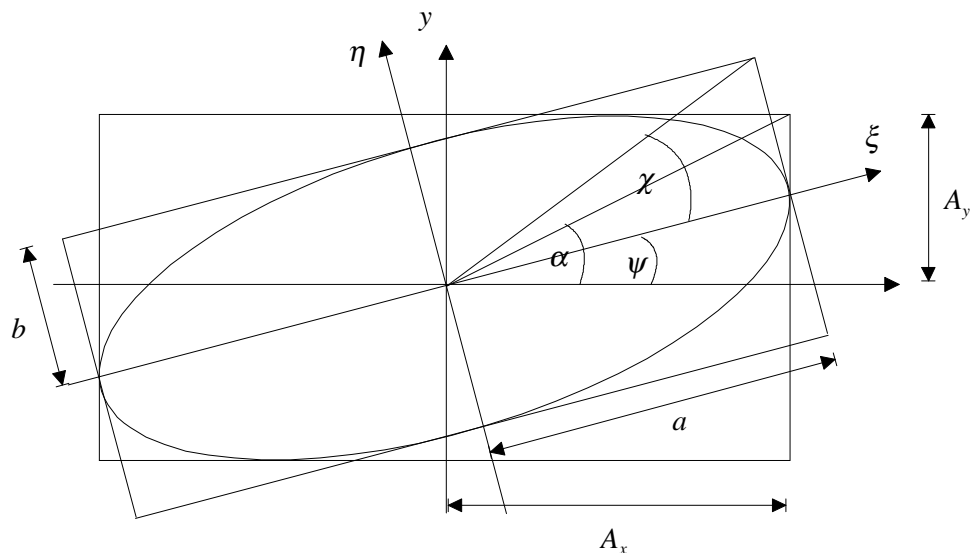
$$\text{sen } 2\chi = \text{sen}(2\alpha) \text{sen} \delta$$

Riassumendo, i semiassi principali dell'ellisse a e b e l'angolo ψ ($0 \leq \psi < \pi$) che l'asse maggiore dell'ellisse forma con l'asse ox sistema di riferimento saranno ricavabili dal sistema :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = A_x^2 + A_y^2 \\ \tan 2\psi = \tan(2\alpha) \cos \delta \\ \text{sen } 2\chi = \text{sen}(2\alpha) \text{sen} \delta \end{cases}$$

con ($-\pi/4 \leq \chi \leq \pi/4$). Ovviamente se sono noti le lunghezze dei semiassi e l'orientazione dell'ellisse, dalle stesse relazioni si possono ricavare le ampiezze delle vibrazioni e la fase.

I parametri che caratterizzano lo stato di polarizzazione possono essere rappresentati nella seguente figura



Si può vedere anche che , i semiassi principali dell'ellisse a e b soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} a^2 = A_x^2 \cos^2 \psi + A_y^2 \sin^2 \psi + 2A_x A_y \cos \psi \text{sen} \psi \cos \delta \\ b^2 = A_x^2 \text{sen}^2 \psi + A_y^2 \cos^2 \psi - 2A_x A_y \cos \psi \text{sen} \psi \cos \delta \\ ab = \pm A_x A_y \text{sen} \delta \end{cases} \quad (3,7)$$

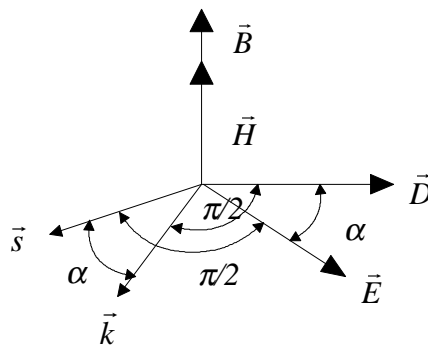
il segno \pm tiene conto segno della fase in quanto A_x , A_y , a e b sono tutti positivi. Dalla (3,7) si vede anche che l'intensità dell'onda è invariante per cambiamento di assi in quanto sommando membro a membro le prime due equazioni troviamo :

$$a^2 + b^2 = A_x^2 + A_y^2$$

3,4 Materiali anisotropi; birifrangenza e dicroismo

In natura esistono materiali, definiti *materiali anisotropi*, che non hanno le stesse caratteristiche in tutte le direzioni. Per esempio il legno e la mica presentano una evidente anisotropia meccanica. Esiste anche una *anisotropia ottica* ed è caratterizzata dal fatto che il mezzo reagisce in maniera differente a seconda della direzione e polarizzazione della luce incidente. Intuitivamente questo può essere spiegato utilizzando un modellino meccanico. Supponiamo che gli elettroni, presenti nel reticolo cristallino di una certa sostanza, se spostati dalla loro posizione di equilibrio, risentano di forze di richiamo la cui intensità dipende dalla direzione nella quale sono stati spostati. Allora, essendo la costante elastica di richiamo funzione della direzione in cui è avvenuto lo spostamento, la polarizzazione indotta nel mezzo dal campo elettrico dell'onda che si propaga, dipende dalla direzione di propagazione e dalla direzione in cui l'onda è polarizzata. In altre parole la *costante dielettrica* del mezzo, e quindi *l'indice di rifrazione*, può essere diverso e dipende dalla direzione del vettore elettrico e di conseguenza la velocità di propagazione dell'onda dipenderà dalla direzione di propagazione nel mezzo.

Secondo le leggi dell'elettromagnetismo in un mezzo non conduttore, sappiamo che al vettore elettrico \vec{E} si può associare un altro vettore \vec{D} , detto “*spostamento elettrico*” e proporzionale ad \vec{E} . Nei mezzi isotropi \vec{E} e \vec{D} risultano paralleli e legati dalla semplice relazione $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ (ϵ costante dielettrica del mezzo). Nei mezzi anisotropi questa relazione è più complicata e in generale i due vettori *non* sono paralleli.



Si può dimostrare che nei mezzi anisotropi il vettore d'onda \vec{k} risulta ortogonale a \vec{D} , mentre la direzione del vettore di Poynting, che possiamo indicare con \vec{s} , risulta ortogonale al vettore \vec{E} .

Una conseguenza di ciò è che se un'onda piana si propaga in un materiale anisotropo, la velocità di fase v_p , cioè la velocità con cui si propagano i fronti d'onda a fase costante, parallela al vettore d'onda \vec{k} , non coincide necessariamente con la velocità v_s con cui viene trasmessa l'energia, che avviene nella direzione \vec{s} del vettore di Poynting.

Si può anche dimostrare che nei mezzi non isotropi è possibile fissare un sistema di riferimento cartesiano che individua tre direzioni particolari, che vengono chiamate *assi principali* del cristallo e a cui corrispondono tre costanti dielettriche dette, *costanti dielettriche principali*. Se nel mezzo \vec{E} vibra secondo una di queste direzioni allora \vec{D} risulta ancora parallelo ad \vec{E} .

Dalla teoria della *propagazione di un'onda in un mezzo anisotropo* si può dimostrare che in questi cristalli, in corrispondenza di ogni fissata direzione di propagazione \vec{k} è possibile la propagazione di due onde piane monocromatiche, in stati di polarizzazione tra loro ortogonali e differente velocità di propagazione. Questo porta a quello che è chiamato fenomeno della "*birifrangenza*".

I cristalli trasparenti, per quanti riguarda le proprietà ottiche, possono essere suddivisi in tre gruppi.

Al primo gruppo appartengono i cristalli del *sistema cubico* e sono i cristalli isotropi.

Al secondo gruppo appartengono i cristalli che crescono nei *sistemi trigonale*, *tetragonale* ed *esagonale*. In tali cristallo esiste una direzione privilegiata attorno alla quale gli atomo si dispongono simmetricamente; questa direzione individua quello che viene definito "*asse ottico*" e i cristalli sono detti *uniassici*. La luce che si propaga nella direzione dell'asse ottico non subisce birifrangenza.

Al terzo gruppo appartengono i cristalli del *sistema ortorombico*, e *triclino* e sono detti *cristalli biassici*. Questi cristalli presentano *due assi ottici* e una propagazione assai complessa che non tratteremo.

Ci limitiamo quindi a considerare gli effetti di cristalli *uniassici*.

Il fenomeno della *birifrangenza* fu osservato per la prima volta in un cristallo di *calcite* ($CaCO_3$). Cristalli di calcite opportunamente tagliati secondo piani cristallini particolari possono dare origine a due raggi rifratti che si propagano in direzioni diverse (*birifrangenza*). Ruotando il cristallo attorno alla direzione del fascio incidente osserviamo che uno dei due fasci resta stazionario, mentre il secondo ruota durante la rotazione del cristallo e forma una circonferenza concentrica al primo; il primo fascio viene detto *raggio ordinario*, mentre il secondo viene detto *raggio straordinario*. Inoltre mentre l'indice di rifrazione del raggio ordinario non dipende dalla direzione del raggio incidente, l'indice di rifrazione del raggio straordinario varia con la direzione del raggio incidente. I piani passanti per l'asse ottico e contenenti il vettore d'onda della luce incidente sono detti *piani principali*. Il raggio ordinario oscilla perpendicolare al piano principale e

quindi alla direzione dell'asse ottico, mentre quello straordinario è polarizzato parallelamente ad una sezione del piano principale.

Un'altra proprietà di certi materiali anisotropi è il “*dicroismo*”, cioè la capacità di assorbire in maniera selettiva una delle due componenti, tra loro ortogonali, in cui può sempre essere scomposto il vettore elettrico associato all'onda, e che risultano essere polarizzate in stati di polarizzazione lineare ortogonale. Tipica sostanza *dicroica* è la *tormalina* la quale assorbe fortemente la componente del campo elettrico della radiazione incidente che vibra in direzione perpendicolare all'asse ottico. Una lamina di tormalina sufficientemente spessa trasmette quasi totalmente luce polarizzata linearmente nella direzione dell'asse ottico che diventa *l'asse di trasmissione* del polarizzatore. Generalmente il *dicroismo* è un fenomeno che dipende fortemente dalla lunghezza d'onda della luce incidente. Per esempio un cristallo di tormalina, che anche lo svantaggio di assorbire anche parte della radiazione che vibra in direzione parallela all'asse ottico, se illuminato con luce naturale, appare verde se guardato in direzione perpendicolare all'asse ottico e quasi totalmente nero se guardato lungo l'asse ottico. In questo caso infatti i campi elettrici, corrispondente alle diverse frequenze componenti la luce bianca incidente, sono tutti comunque perpendicolari all'asse stesso e quindi fortemente assorbiti.

3,5 Polarizzazione per dicroismo e birifrangenza

E' possibile ottenere luce polarizzata da una radiazione non polarizzata facendole attraversare mezzi otticamente anisotropi, opportunamente tagliati oppure mediante dispositivi (generalmente prismi) opportunamente assemblati. Analogamente è possibile modificare lo stato di polarizzazione di un'onda in uno stato di polarizzazione dello stesso tipo (per esempio lineare - lineare), oppure da un tipo ad un altro (lineare - ellittico o viceversa). Analizziamo alcuni dispositivi polarizzanti.

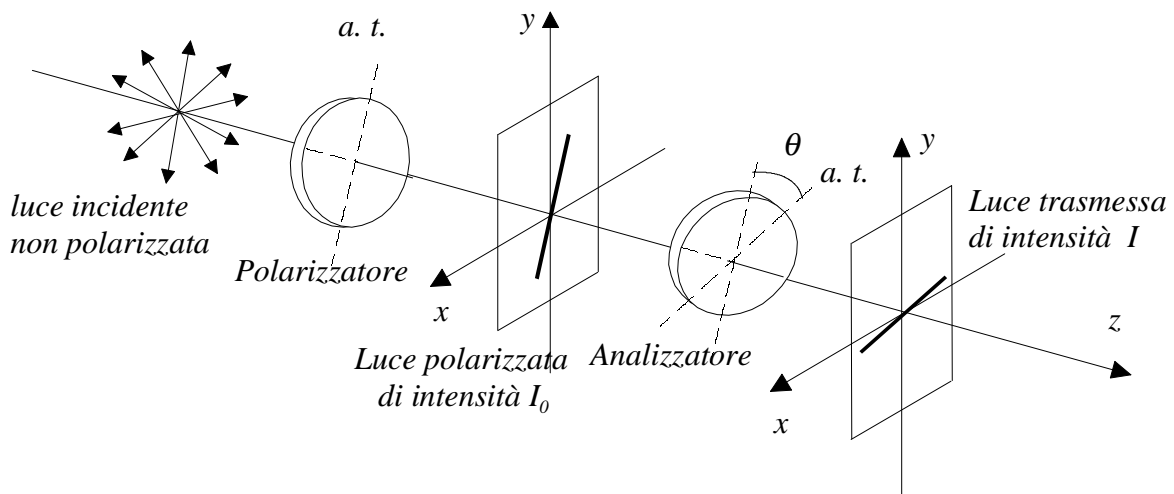
a) Polaroid

Il polarizzatore più comune è la “*lamina polaroid*”. È una lamina di materiale otticamente anisotropo e dicroico costituito da strati di molecole di un idrocarburo, l'alcool polivinilico, meccanicamente stirate in una direzione. I fogli così ottenute vengono immerse in soluzioni colorate ricche di iodio che impregna la plastica e si attacca alle molecole in modo che gli elettroni di conduzione delle molecole di iodio possono muoversi lungo le carene come se fossero dei conduttori. La componente del campo elettrico della luce incidente parallela alla catena esercita una forza su questi elettroni producendo una corrente. Il lavoro fatto ha come conseguenza l'assorbimento di questa componente del campo elettrico. La luce emergente da un foglio polaroid

risulta quindi *polarizzata linearmente in direzione perpendicolare alla catena di molecole*. Questa direzione (nel piano della lamina e perpendicolare alla catena delle molecole) è detta “*asse di trasmissione*”.

Un polaroid reale lascia passare una frazione $K_a\%$ della componente del campo elettrico parallelo al suo asse di trasmissione e assorbe quasi totalmente la componente del campo elettrico perpendicolare all'asse di trasmissione. I polarizzatori tipo polaroid vengono contraddistinti dalla sigla “*NH X*”, dove X rappresenta la percentuale dell'intensità incidente che viene trasmessa, quando incide luce non polarizzata. Un polarizzatore ideale, cioè che lascia passare completamente al componente del campo elettrico parallela all'asse di trasmissione e assorbe completamente quella perpendicolare, avrebbe la sigla “*NH 50*”. I polaroid più comuni sono del tipo “*NH 32*”. Per tali polaroid $K_a = 80\%$; l'intensità della luce trasmessa è il **32%** di quella incidente. Questo perché una percentuale (fino al 4%) della luce incidente viene riflessa da ciascuna delle due facce della lamina. La luce trasmessa, polarizzata quasi completamente in direzione dell'asse ottico può raggiungere al massimo il 40% dell'intensità luce incidente non polarizzata. I polaroid sono ottimi polarizzatori su tutto lo spettro del visibile, anche se non hanno un assorbimento del *100%* nella regione del blu.

Un polaroid può essere utilizzato come *polarizzatore* oppure come *analizzatore* della luce. Supponiamo per semplicità formale che i polarizzatori siano ideali. Consideriamo un dispositivo come mostrato nella figura seguente. Un fascio di luce non polarizzata incide su un polaroid (ideale) con asse di trasmissione *a.t.* come in figura. La luce emergente, polarizzata linearmente secondo l'asse di trasmissione *a.t.*, e di intensità I_0 può essere analizzata con un secondo polaroid, l'*analizzatore*.



Ruotando l'analizzatore in un piano perpendicolare alla direzione del fascio, l'intensità della luce emergente dall'analizzatore subirà delle variazioni. Se θ è l'angolo formato dalle direzioni

degli *assi di trasmissione a.t.* del polarizzatore e dell'analizzatore, l'intensità I della luce emergente sarà data dalla relazione:

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad (\text{Legge di Malus}) \quad (3,8)$$

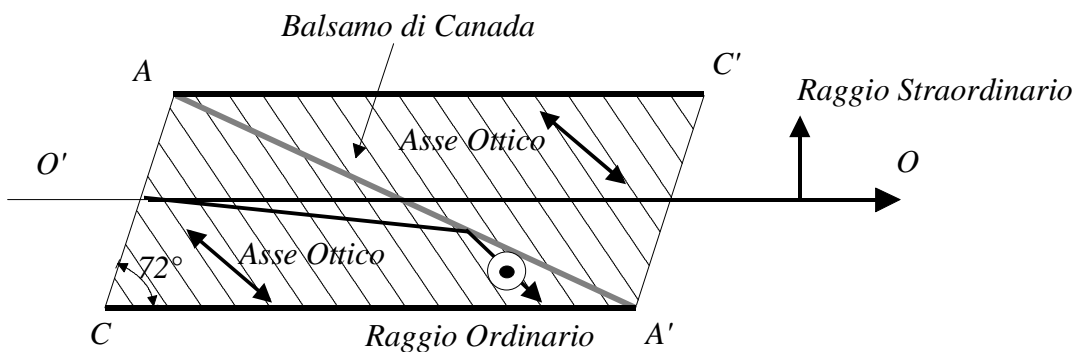
Quando l'intensità della luce trasmessa dall'analizzatore è minima ($\theta = \pi/2$) i due polaroid si dicono *incrociati*. Per polarizzatori ideali $I_{min} = 0$

b) Polarizzatori a riflessione totale Prisma di Nicol

Sfruttando il fenomeno delle birifrangenza e soprattutto il fatto che il vettore elettrico del raggio ordinario e straordinario vibrano in direzioni perpendicolari tra loro, è possibile ottenere un'onda polarizzata linearmente facendo in modo che uno dei fasci subisca riflessione totale.

Prisma di Nicol

Storicamente è stato il primo dispositivo utilizzato per ottenere luce polarizzata.



È costituito da un rombo naturale di calcite tagliato due parti secondo un piano diagonale e incollate con balsamo di Canada, che è una sostanza isotropa che ha un indice di rifrazione $n = 1.55$ intermedio a quelli della calcite ($n_e = 1.49$, $n_o = 1.66$).

Un'onda non polarizzata, che si propaga nella direzione OO' , incide sulla faccia AC e per semplicità supponiamo che il raggio sia un pennellino di luce. A causa del fenomeno della birifrangenza viene diviso in due raggi, ordinario che risulta polarizzato in direzione ortogonale ai piani principali (piano del foglio), e straordinario polarizzato parallelamente ai piani principale. Si può verificare che il raggio ordinario subisce all'interfaccia calcite-balsamo di Canada AA' riflessione totale e il raggio viene completamente assorbito annerendo le facce del rombo parallele alla direzione del fascio. Il raggio straordinario viene trasmesso e la luce emergente risulta polarizzata linearmente (parallelamente ai piani principale). La funzione del secondo mezzo rombo è semplicemente quella di far sì che il fascio trasmesso risulti praticamente allineato al fascio

incidente. E' opportuno osservare anche che l'angolo di incidenza sulla faccia AC del prisma deve soddisfare certe condizioni, infatti a seconda di tale angolo può accadere:

- il raggio ordinario incide sull'interfaccia AA' secondo un angolo inferiore all'angolo critico e non subisce più riflessione totale. In questo caso il prisma trasmette luce polarizzata in uno *stato di polarizzazione ellittico* che dipende dallo spessore di materiale attraversato;
- il raggio straordinario subisce riflessione totale all'interfaccia AA'. In questo caso il prisma non trasmette nessuna luce.

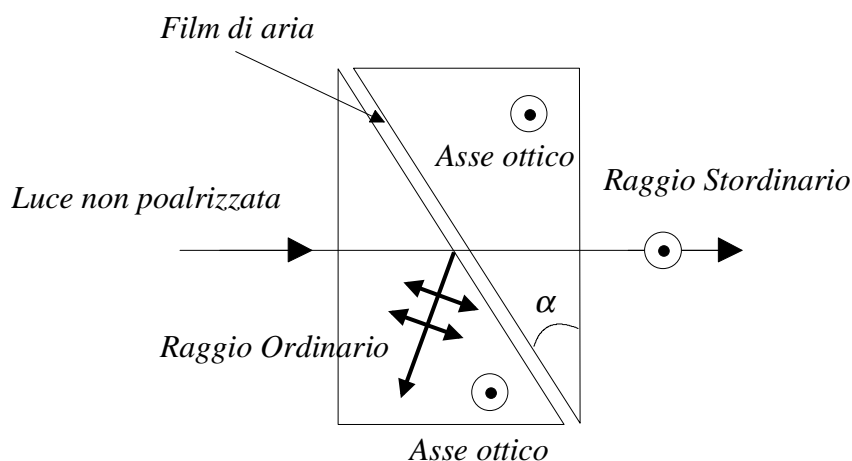
Da ciò si deduce che se la luce incidente ha una certa apertura, cioè è contenuta in un cono con un certo angolo di apertura, i raggi emergenti non sono tutti nello stesso stato di polarizzazione. Per avere un buon risultato la luce deve essere contenuta in un cono di apertura inferiore a 29° con asse disallineato con la direzione OO' .

A causa del possibile assorbimento del balsamo di Canada i prismi di Nicol non possono essere usati con radiazione di elevata intensità.

Prismi di Glan-Foucault e Glan-Thomson

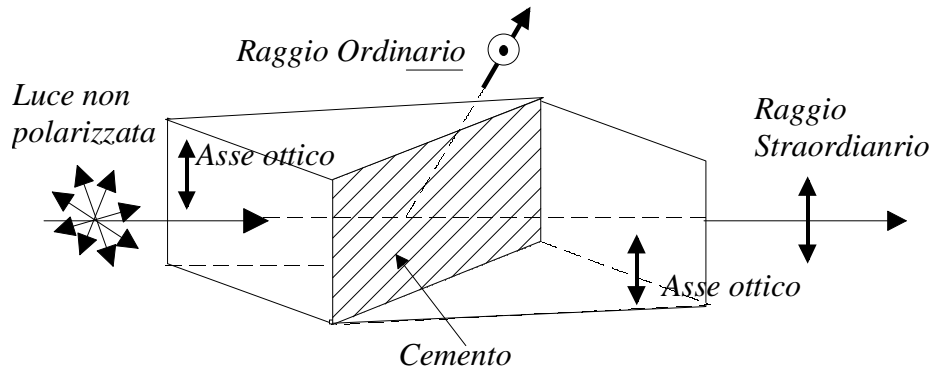
Il *prisma di Foucault* è una moderna versione del *prisma di Nicol*. E' costituito da due prismi retti di calcite separati da un sottile strato di aria e risulta trasparente in un vasto range di lunghezze d'onda (da circa $5\mu\text{m}$ nell'infrarosso fino a 230 nm nel U.V.).

L'asse ottico è contenuto nel piano di ingresso del fascio incidente. La condizione di riflessione totale si ottiene con opportuna scelta dell'angolo α .



Per gli stessi motivi illustrati precedentemente il campo di aperture del prisma di Glan-Focoult è piuttosto ristretto (circa 10°), in compenso può essere utilizzato anche con sorgenti di elevata potenza (fino a $100\text{W}/\text{cm}^2$). Per questo motivo viene utilizzato con sorgenti laser.

Il prisma di **Glan-Thomson** è molto simile al *prisma di Foucault*. In questo caso i due prismi di calcite vengono incollati con *glicerina* o altri *oli minerali* trasparenti all' U.V. Ha un'apertura più elevata (fino a 30°) ma può sopportare potenze inferiori ($\approx 1W/cm^2$)



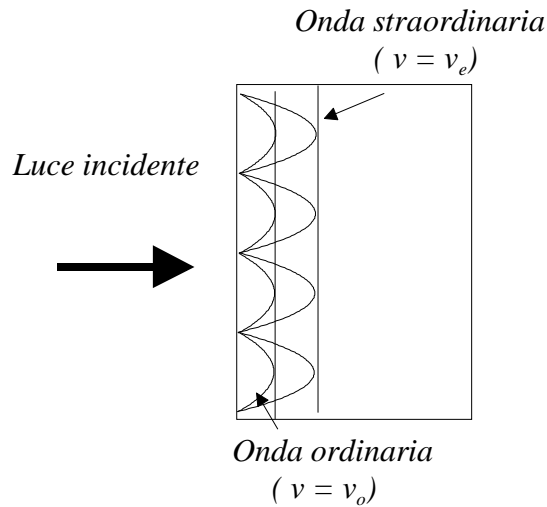
c) *Lamine di ritardo*

Il fenomeno della birifrangenza e in particolare il fatto che i due raggi, ordinario e straordinario, si propagano nel mezzo con velocità diversa, può essere sfruttato per modificare lo stato di polarizzazione di un'onda polarizzata. Vengono realizzate delle lamine a facce piane e parallele, con l'asse ottico parallelo alla faccia di entrata e uscita, di spessore opportuno in modo da introdurre un particolare sfasamento tra le due componenti polarizzate linearmente in stati tra loro ortogonali.

Convenzionalmente viene definito "*asse lento*" l'asse che individua la direzione con indice di rifrazione maggiore. Si definisce invece "*asse veloce*" l'asse che individua la direzione con indice di rifrazione minore. Le lamine di ritardo vengono tagliate secondo piani paralleli al piano formato dagli *assi lento e veloce* (l'*asse ottico* giace in questo piano). La velocità di propagazione della luce che attraversa la lamina ($v = c/n$) dipende dalla direzione di vibrazione del campo elettrico associato all'onda incidente, cioè la componente che vibra in direzione parallela all'asse lento si propagerà con velocità minore di quella con cui si propaga la componente che vibra parallelamente all'asse veloce.

Consideriamo un'onda piana monocromatica polarizzata linearmente che incide normalmente su una lamina a facce piane e parallele, di spessore Δz e con asse ottico parallelo alle facce di entrata ed uscita. Indichiamo con \vec{e} il versore della direzione in cui è polarizzata il campo elettrico \vec{E} associato all'onda e indichiamo con θ l'angolo che forma con l'asse veloce della lamina. Poiché l'angolo di incidenza è zero, non si ha rifrazione nel cristallo ($\theta_r = \theta_i$ ma $\theta_t < \theta_i$) e le due onde *ordinaria* e *straordinaria* si propagano nella stessa direzione, ma con velocità diversa e

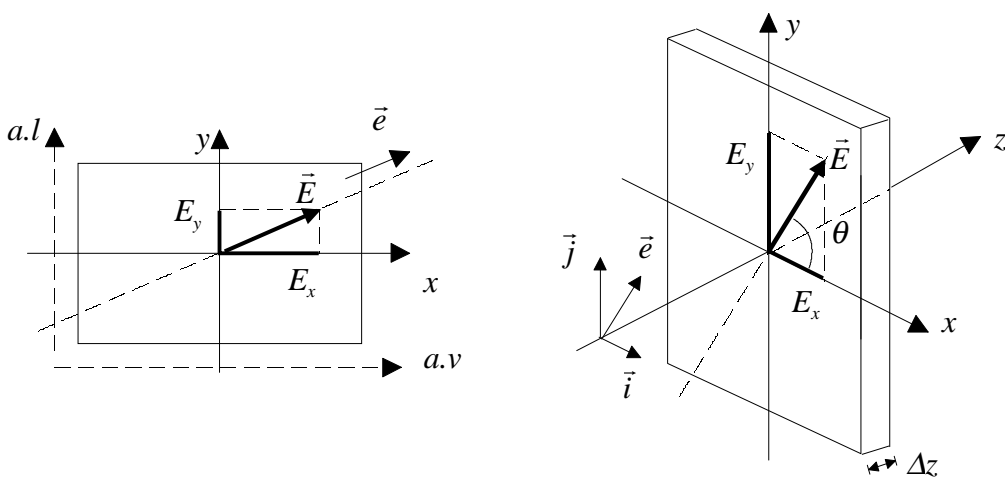
rispettivamente $v_o = c/n_o$ e $v_e = c/n_e$ (dove n_o e n_e sono gli indici di rifrattioni principali del cristallo; per la calcite $n_o > n_e$ e $v_e > v_o$).



Dopo aver attraversato il cristallo i due raggi si ricompongono a dare luogo all'onda emergente dalla lamina.

Fissiamo un sistema di riferimento con asse x coincidente con l'asse veloce della lamina e asse y coincidente con l'asse lento. Le due componenti E_x ed E_y del vettore \vec{E} secondo le direzioni dei due assi della lamina sono in fase sulla faccia di entrata della lamina e possiamo rappresentarli con:

$$\begin{cases} E_x(0,t) = A \cos\theta \cos\omega t \\ E_y(0,t) = A \sin\theta \cos\omega t \end{cases}$$



All'uscita della lamina le due componenti saranno rappresentate da:

$$\begin{cases} E_x(\Delta z, t) = A \cos\theta \cos\omega \left(t - \frac{\Delta z}{v_v} \right) \\ E_y(\Delta z, t) = A \sin\theta \cos\omega \left(t - \frac{\Delta z}{v_l} \right) \end{cases}$$

dove v_v e v_l sono la velocità di propagazione dell'onda che vibra parallelamente all'asse veloce e lento rispettivamente. La differenza di cammino ottico introdotto dalla lamina sarà $\Lambda = \Delta z / n_o - n_e /$
La differenza di fase tra la componenti del campo secondo l'asse veloce e quella secondo l', all'uscita della lamina, sarà:

$$\Delta\varphi = \varphi_x - \varphi_y = \omega \left(t - \frac{\Delta z}{v_v} \right) - \left(t - \frac{\Delta z}{v_l} \right) = \omega \Delta z \left(\frac{1}{v_l} - \frac{1}{v_v} \right)$$

e poiché $v_l = c/n_l$ e $v_v = c/n_v$ si ottiene:

$$\Delta\varphi = \omega \Delta z \left(\frac{n_l}{c} - \frac{n_v}{c} \right) = \frac{\omega \Delta z}{c} (n_l - n_v) = (n_l - n_v) 2\pi \frac{\Delta z}{\lambda} \quad (3,9)$$

Dalla (2,16) risulta evidente che lo stato di polarizzazione della luce emergente dipende:

- i) dalla differenza degli indici di rifrazione principali della lamina;
- ii) dallo spessore della lamina
- iii) dalla lunghezza d'onda della radiazione incidente

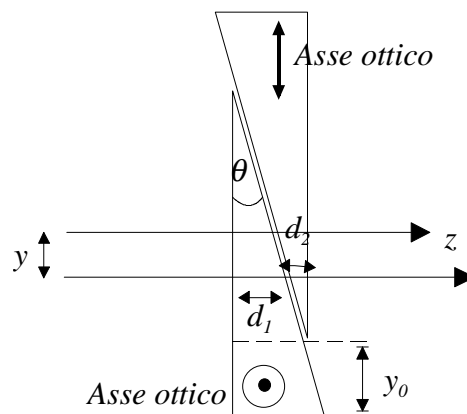
Al variare dello spessore della lamina è possibile avere differenti sfasamenti, in particolare:

- a) se la lamina determina uno sfasamento $\Delta\varphi = \pi + 2n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) la lamina si dice "**lamina a mezz'onda**" o a " $\lambda/2$ ". E' in grado di trasformare luce polarizzata linearmente ancora in luce polarizzata linearmente. La direzione \vec{e}_l di polarizzazione dell'onda emergente dalla lamina si ottiene per riflessione di \vec{e} rispetto all'asse veloce della lamina. Per $\theta = 45^\circ$ la è in uno stato di polarizzazione lineare ortogonale allo stato di polarizzazione della luce incidente. Inoltre, per $\theta = 45^\circ$ trasforma luce polarizzata circolarmente destrorsa in luce polarizzata circolarmente sinistrorsa e viceversa
- b) se lo sfasamento vale $\Delta\varphi = \pi/2 + 2n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) la lamina si dice "**lamina a quarto d'onda**" o a " $\lambda/4$ ". E' in grado di trasformare luce polarizzata linearmente in luce polarizzata circolarmente (per $\theta = 45^\circ$), o ellitticamente e viceversa.

d) Compensatore di Babinet

Le lamine di ritardo precedentemente trattate, possono determinare sfasamenti fissati. E' possibile realizzare un dispositivo capace di produrre sfasamenti arbitrari controllabili con continuità; tale dispositivo viene detto "compensatore". Un compensatore classico è il "**prima di Babinet**".

E' costituito da due prismi di quarzo, che è un cristallo uniassico positivo ($n_e > n_o$; $v_o > v_e$) tagliati a forma di cuneo con angolo di circa 2.5° , posti l'uno sull'altro i cui assi ottici sono reciprocamente perpendicolari.



Il primo cuneo è fisso mentre il secondo può spostarsi verso l'alto o verso il basso parallelamente al primo cuneo.

Supponiamo che un raggio cada sul primo cuneo da destra verso sinistra, perpendicolarmente alla superficie. Il raggio si scinderà in due raggi, ordinario e straordinario, che si propagano nella stessa direzione. Per come sono disposti gli assi ottici dei due cunei, il raggio ordinario nel primo cuneo diventa straordinario nel secondo e viceversa. Di conseguenza tra la vibrazione parallela e perpendicolare al piano delle figure si stabilisce una ulteriore differenza di fase data da:

$$\Delta\varphi_{sup} = k (n_e - n_o)(d_2 - d_1) \quad k = 2\pi / \lambda$$

dove d_1 e d_2 sono gli spessori attraversati nei due cunei.

Se l'onda incide dove $d_1 = d_2$ lo sfasamento supplementare è nullo, al di sopra di questo punto lo sfasamento è positivo, al di sotto è negativo e cresce linearmente con lo spostamento dalla posizione di sfasamento nullo. Si può quindi ottenere uno sfasamento che varia con continuità. Questo significa che se sul compensatore incide luce polarizzata linearmente, all'uscita lo stato di polarizzazione potrà essere ancora lineare se $\Delta\varphi_{sup} = 0$, altrimenti sarà **ellittico**. Viceversa se incide

luce polarizzata ellitticamente la luce emergente sarà ancora ellittica , ma di forma diversa, oppure lineare se all'uscita lo sfasamento totale sarà $\Delta\varphi = 2m\pi$.

La differenza di fase introdotta dal *compensatore di Babinet*, dipende dal punto di entrata del fascio sul compensatore. Questo inconveniente non sussiste nel *compensatore di Babinet-Soleil*, che è una variante del precedente.

In questo dispositivo i due cunei di quarzo hanno gli assi ottici orientati parallelamente, mentre davanti ai cunei è posta una lamina di quarzo a facce piane e parallele, con asse ottico perpendicolare a quello dei cunei e di spessore uguale alla somma degli spessori dei due cunei nella posizione zero

