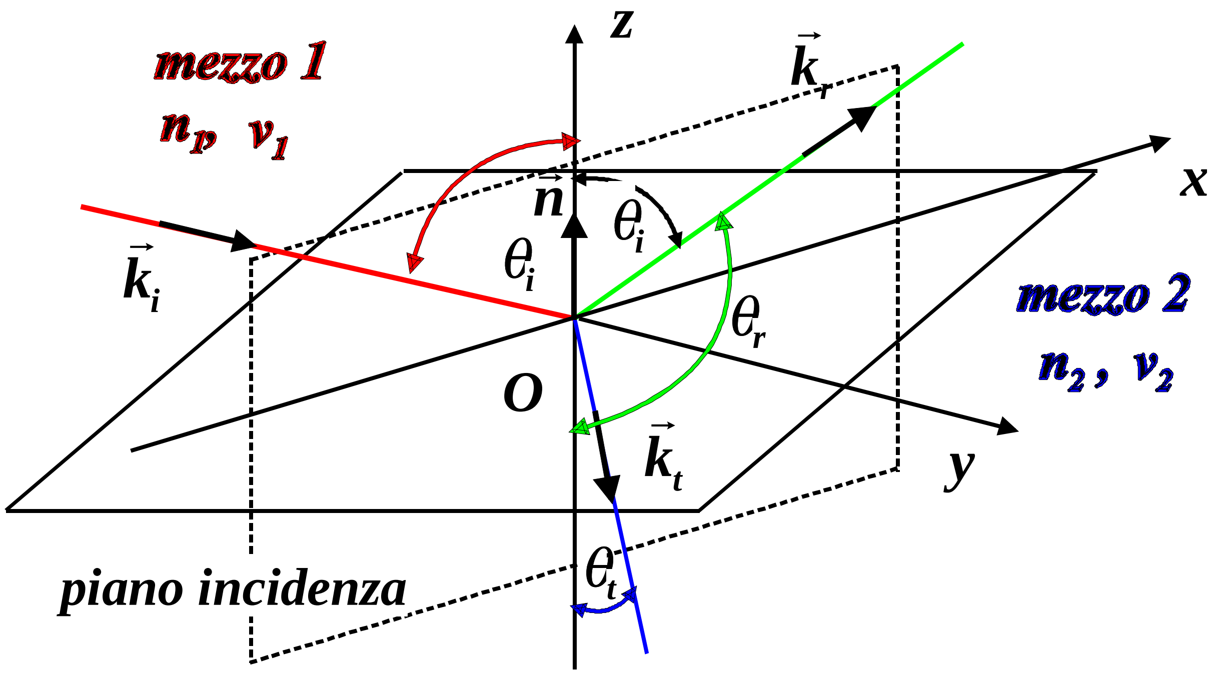
Propagazione in mezzi dielettrici, omogenei e isotropi in direzione



$\vec{k}$ vettore d'onda

$\vec{n}$ normale alla superficie di separazione

Oxy = Piano di incidenza

$\theta_r = \pi - \theta_i$ Legge riflessione

$n_1 \, sen \, \theta_i = n_2 \, sen \, \theta_t$ Legge rifrazione

Onda incidente, onda riflessa e onda rifratta giacciono nello stesso piano (piano di incidenza)

Nella riflessione all'interfaccia di un mezzo più rifrangente (otticamente più denso)

$n_2 > n_1$ *(es. aria–vetro)* $\quad$ $sen\ \theta_t < sen\ \theta_i$

per ogni angolo θ_i *esiste sempre un* θ_t *reale*

Nella riflessione all'interfaccia di un mezzo meno rifrangente (otticamente più denso)

$n_2 < n_1$ *(es. acqua–aria)*

esiste un θ_t *reale solo per* θ_i^* *tale che*

$sen\ \theta_i^* \leq n_{1,2}$

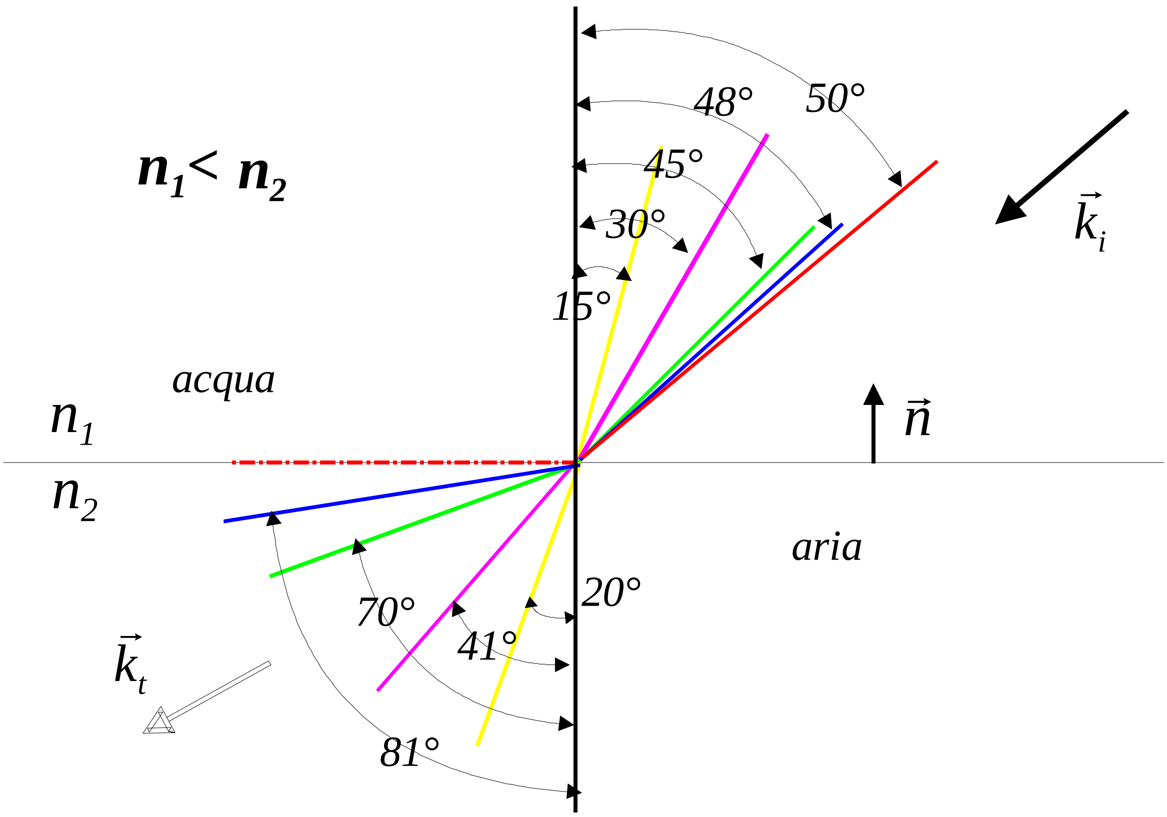
Per angoli di incidenza $\boldsymbol{\theta_i}$ ***maggiori di*** $\boldsymbol{\theta_i^*}$ ***si ha riflessione totale***

Onda evanescente

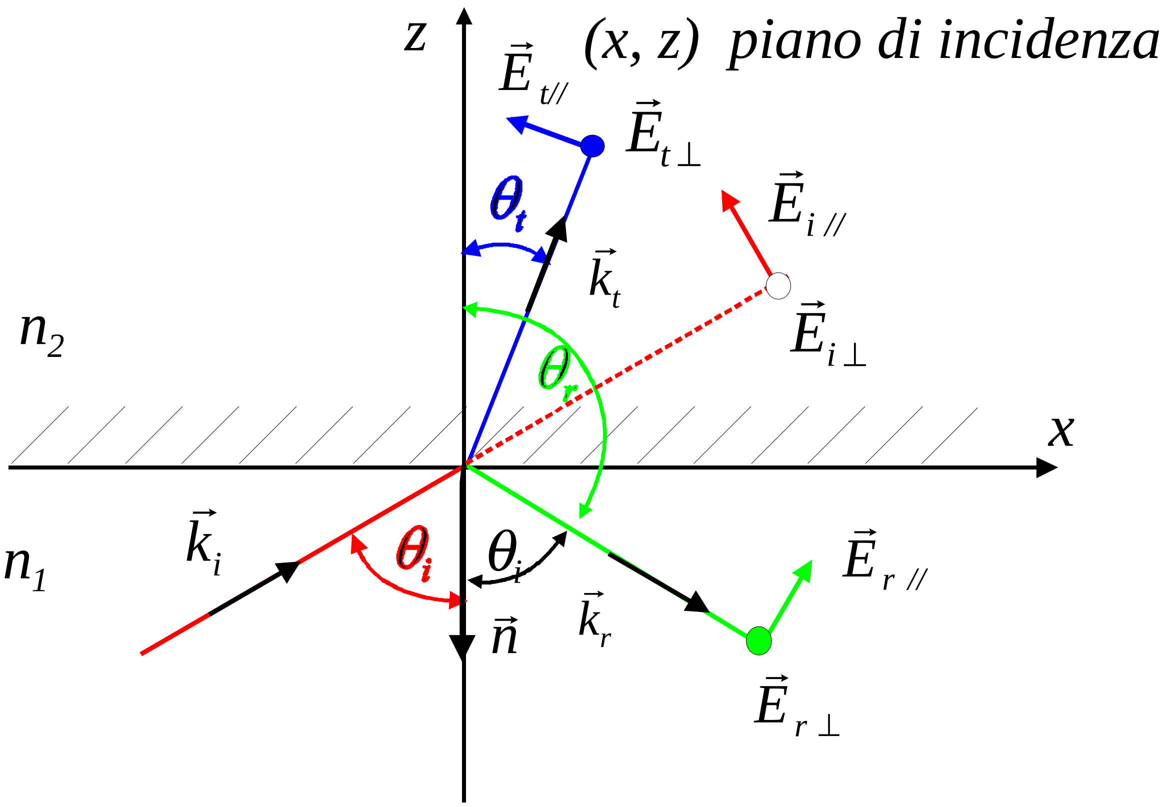
Riflessione acqua(1) – aria(2)

$n_1 = 1{,}333 \qquad n_2 = 1$

n1	1,33				
	$\theta 1$				$\theta 2$
grad	rad	sen $\theta 1$		arcsen $\theta 2$	grad
15	0,262	0,26		0,351	20,135
30	0,524	0,50		0,727	41,682
45	0,785	0,71		1,224	70,128
48	0,838	0,74		1,418	81,258
49	0,855	0,75		#NUM!	#NUM!
50	0,873	0,77		#NUM!	#NUM!
51	0,89	0,78		#NUM!	#NUM!



Onda piana monocromatica pol. lin.



Stato “p”   polariz. // piano incidenza

Stato “s”   polariz. ⊥ piano incidenza

(“p” e “s” autostati di polarizzazione per riflessione e rifrazione)

Formule di Fresnel

$$\begin{cases} r_{//} = \dfrac{R_{//}}{A_{//}} = \dfrac{n_2 \cos\theta_i - n_1 \cos\theta_t}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \cos\theta_t} \\[2ex] r_{\perp} = \dfrac{R_{\perp}}{A_{\perp}} = \dfrac{n_1 \cos\theta_i - n_2 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_{//} = \dfrac{T_{//}}{A_{//}} = \dfrac{2 n_1 \cos\theta_i}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \cos\theta} \\[2ex] t_{\perp} = \dfrac{R_{\perp}}{A_{\perp}} = \dfrac{2 n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta} \end{cases}$$

Utilizzando La legge di Snell

$$\begin{cases} r_{//} = \dfrac{R_{//}}{A_{//}} = \dfrac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \\[2ex] r_{\perp} = \dfrac{R_{\perp}}{A_{\perp}} = - \dfrac{sen(\theta_i - \theta_t)}{sen(\theta_i + \theta_t)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_{//} = \dfrac{T_{//}}{A_{//}} = \dfrac{2\, sen\theta_i \cos\theta_i}{sen(\theta_i + \theta_t)\cos(\theta_i - \theta_t)} \\[2ex] t_{\perp} = \dfrac{T_{\perp}}{A_{\perp}} = \dfrac{2\, sen\theta_i \cos\theta_i}{sen(\theta_i + \theta_t)} \end{cases}$$

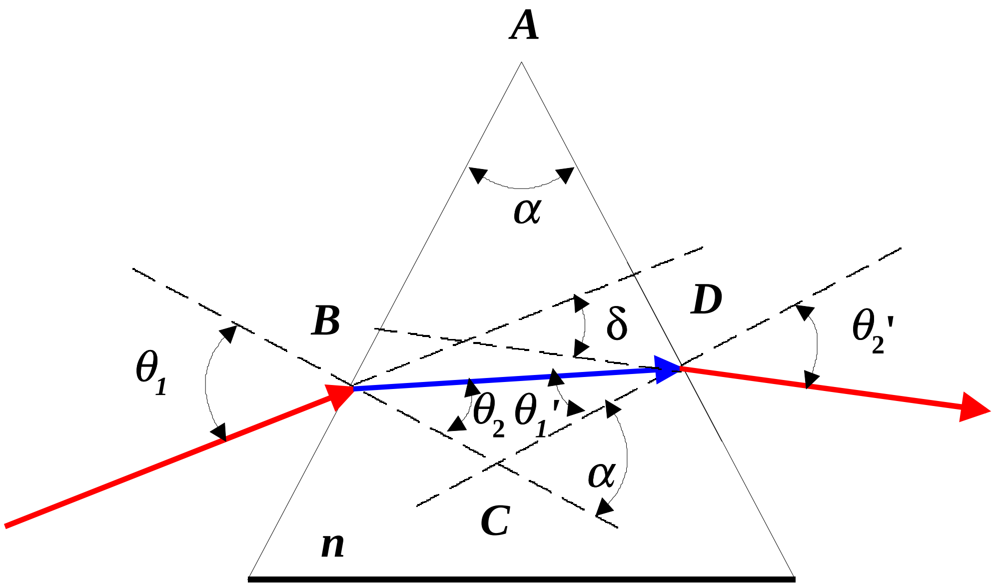
Incidenza normale $\theta_i = 0 \quad \longrightarrow \quad \theta_t = 0$

$$\begin{cases} r_{//} = \dfrac{n-1}{n+1} \\[2ex] t_{\perp} = - \dfrac{n-1}{n+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_{//} = \dfrac{2}{n+1} \\[2ex] t_{\perp} = \dfrac{2}{n+1} \end{cases}$$

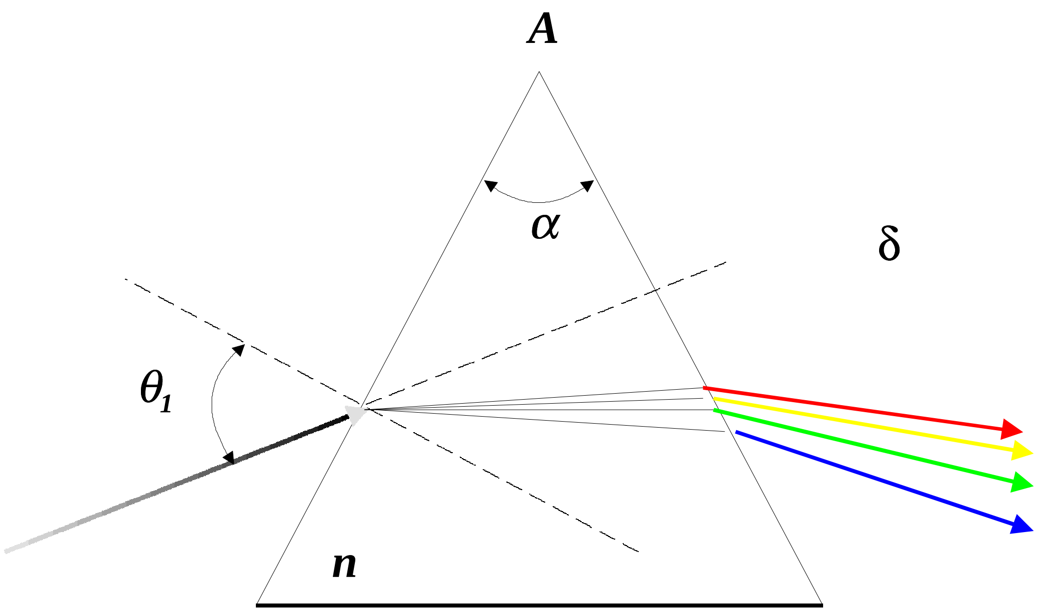
$$n = \frac{n_2}{n_1} = \frac{sen\theta_i}{sen\theta_t}$$

PRISMA



$$\delta = (\theta_1 - \theta_2) + (\theta'_2 - \theta'_1) \quad ; \qquad \alpha = \theta_2 - \theta'_1$$

$$\rightarrow \quad \delta = \theta_1 - \theta'_2 - \alpha \quad \rightarrow \quad \delta = \theta_1 - \alpha + f(n, \alpha, \theta_1)$$



Intensità onda incidente $I_i = C_0 n A^2$

$C_0 = \varepsilon_0 c/2 = cost$ n_1 = *indice di rifrazione mezzo 1*

θ_i *angolo di incidenza*

J_i = *porzione energia incidente su superficie unitaria nell'unità di tempo*

$$J_i = I_i \cos\theta_i = C_0 n_1 A^2 \cos\theta_i$$

Energia che si propaga dall'area unitaria nell'unità di tempo nel mezzo 1 (riflessa) e nel mezzo 2 (rifratta)

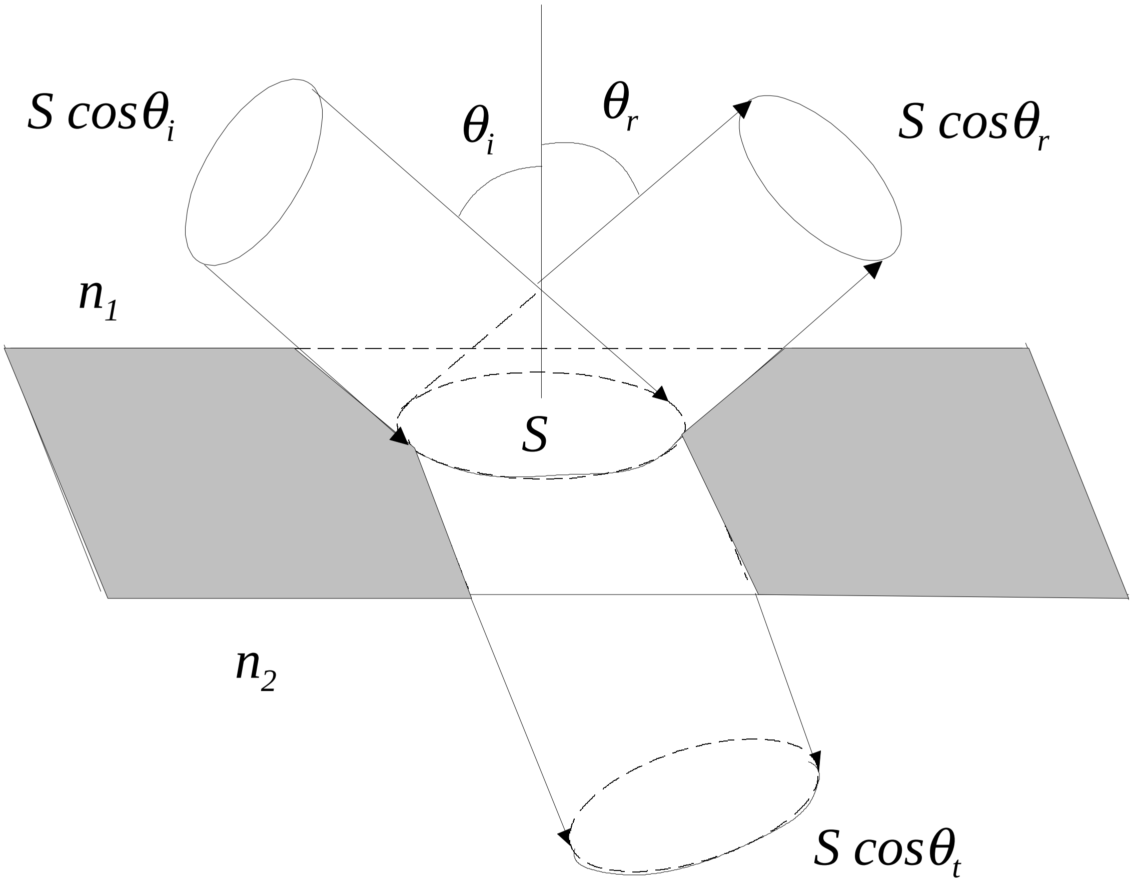
$$\begin{cases} J_r = I_r \cos\theta_r = C_0 n_1 R^2 \cos\theta_i \\ J_t = I_t \cos\theta_t = C_0 n_2 T^2 \cos\theta_t \end{cases} \qquad (\theta_i = \theta_r)$$

Riflettanza $$\Re = \frac{J_r}{J_i} = \left(\frac{R}{A}\right)^2$$

Trasmittanza $$\Im = \frac{J_t}{J_{ii}} = \frac{n_2 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_i} \left(\frac{T}{A}\right)^2$$

$$\Re + \Im = 1$$

Dipendono dallo stato di polarizzazione



$S\ cos\theta_i$
θ_i
θ_r
$S\ cos\theta_r$
n_1
S
n_2
$S\ cos\theta_t$

Riflettanza e trasmittanza in termini degli autostati "p" e "s"

α_i *angolo che* $\vec{E}$ *forma con il piano di incidenza*

$$A_{//} = A\cos\alpha_i \qquad A_{\perp} = A\, sen\alpha_i$$

$$\begin{cases} J_{i//} = C_o n_1 (A_{//})^2 \cos\theta_i = C_o n_1 (A\cos\alpha_i)^2 \cos\theta_i = J_i \cos^2\alpha_i \\ J_{i\perp} = C_o n_1 (A_{\perp})^2 \cos\theta_i = C_o n_1 (A\, sen\alpha_i)^2 = J_i\, sen^2\alpha_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_i = \dfrac{J_{i//}}{\cos^2\alpha_i} \\ J_i = \dfrac{J_{i\perp}}{sen^2\alpha_i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_{r//} = C_0 n_1 (R_{//})^2 \cos\theta_i \\ J_{r\perp} = C_0 n_1 (R_{\perp})^2 \cos\theta_i \end{cases}$$

$$\Re = \frac{J_r}{J_i} = \frac{J_{r//} + J_{r/\perp}}{J_i} = \frac{J_{r//}}{J_{i//}}\cos^2\alpha_i + \frac{J_{r\perp}}{J_{i\perp}} sen^2\alpha_i =$$

$$= \Re_{//}\cos^2\alpha_i + \Re_{\perp} sen^2\alpha_i$$

$$\begin{cases} \Re_{//} = \dfrac{J_{r//}}{J_{i//}} = \dfrac{C_0 n_1 (R_{//})^2 \cos\theta_i}{C_0 n_1 (A_{//})^2 \cos\theta_i} = \dfrac{(R_{//})^2}{(A_{//})^2} = (r_{//})^2 = \dfrac{\tan^2(\theta_i - \theta_t)}{\tan^2(\theta_i + \theta_t)} \\[2em] \Re_{\perp} = \dfrac{J_{r\perp}}{J_{i\perp}} = \dfrac{C_0 n_1 (R_{\perp})^2 \cos\theta_i}{C_0 n_1 (A_{\perp})^2 \cos\theta_i} = \dfrac{(R_{\perp})^2}{(A_{\perp})^2} = (r_{\perp})^2 = \dfrac{sen^2(\theta_i - \theta_t)}{sen^2(\theta_i + \theta_t)} \end{cases}$$

definendo

$$\Im_{//} = 1 - \Re_{//} \qquad \Im_{\perp} = 1 - \Re_{\perp}$$

$$\begin{cases} \Im_{//} = \dfrac{J_{t//}}{J_{i//}} = \dfrac{sen 2\theta_i \cos 2\theta_t}{sen^2(\theta_i + \theta_t)\cos^2(\theta_i + \theta_t)} \\[2em] \Im_{\perp} = \dfrac{J_{t\perp}}{J_{i\perp}} = \dfrac{sen 2\theta_i \cos 2\theta_t}{sen^2(\theta_i + \theta_t)} \end{cases}$$

Nell'espressione di $\Re_{//}$ *il denominatore è finito*

tranne che per $\theta_i + \theta_t = \pi/2$

$\tan(\theta_i + \theta_t) = \infty \quad \rightarrow \quad \Re_{//} = 0$

onda riflessa e rifratta sono perpendicolari tra di loro

Angolo di Brewster

$$\begin{cases} \Re_{//} = \dfrac{J_{r//}}{J_{i//}} = \dfrac{C_0 n_1 (R_{//})^2 \cos\theta_i}{C_0 n_1 (A_{//})^2 \cos\theta_i} = \dfrac{(R_{//})^2}{(A_{//})^2} = (r_{//})^2 = \dfrac{\tan^2(\theta_i - \theta_t)}{\tan^2(\theta_i + \theta_t)} \\ \\ \Re_{\perp} = \dfrac{J_{r\perp}}{J_{i\perp}} = \dfrac{C_0 n_1 (R_{\perp})^2 \cos\theta_i}{C_0 n_1 (A_{\perp})^2 \cos\theta_i} = \dfrac{(R_{\perp})^2}{(A_{\perp})^2} = (r_{\perp})^2 = \dfrac{sen^2(\theta_i - \theta_t)}{sen^2(\theta_i + \theta_t)} \end{cases}$$

Nell'espressione di $\Re_{//}$ *il denominatore è finito*

tranne che per $\theta_i + \theta_t = \pi/2 \quad \rightarrow \quad \tan(\theta_i + \theta_t) = \infty$

Conseguenze

$$\Re_{//} = 0$$

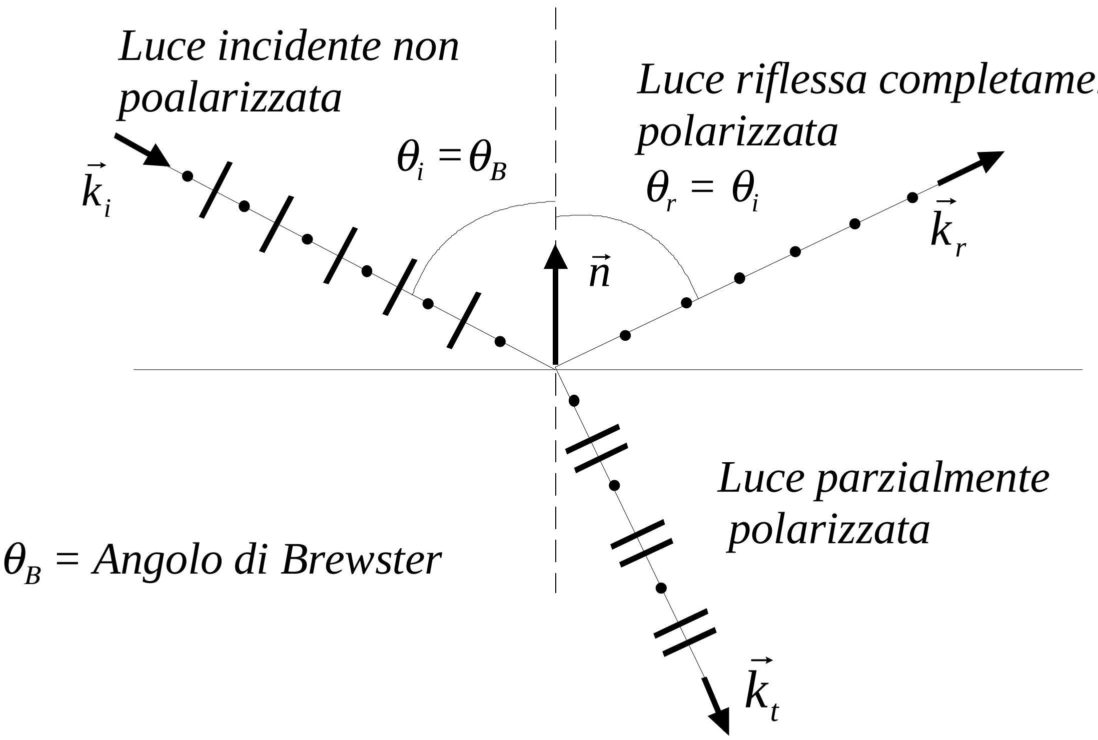
onda riflessa e rifratta perpendicolari tra di loro

$$sen\,\theta_t = sen(\pi/2 - \theta_\iota) = \cos\,\theta_\iota$$

e dalla legge delle rifrazione $\dfrac{sen\theta_i}{sen\theta_t} = \dfrac{n_2}{n_1}$

$\boxed{\tan\,\theta_\iota = n \qquad n = n_2/n_1 \qquad \textit{Legge di Brewster}}$

Se luce naturale incide su una superficie dielettrica secondo un angolo $\theta_i = \theta_B$ per cui vale la relazione $\tan\theta_i = n$ $(n=n_2/n_1 = n_{1,2})$, il campo elettrico associato alla luce riflessa non ha componente nel piano di incidenza. La luce riflessa è polarizzata linearmente in direzione parallela al piano di incidenza.



Per la riflessione aria-vetro (n_1=1, n_2=1,5) $\theta_B \approx 56°$

$\mathfrak{R}_\perp \approx 0{,}15$

Propagazione nei conduttori

$\vec{j} = \sigma \vec{E}$ $\qquad$ *σ = conducibilità*

Metalli ideali : $\quad \sigma = \infty \quad \rightarrow \quad \rho = 1/\sigma = 0$

Per gli elettroni liberi non ci sono perdite o dissipazioni nella remissione

Metalli reali : interazione con reticolo $\rightarrow$ *dissipazione per effetti Joule con assorbimento di parte dell'energia incidente*

Alta riflettività (si comportano come specchi)

Nei metalli $\rho \neq 0 \quad \rightarrow$ *cost dielettrica* ε *complessa*

$\rightarrow$ ***indice di rifrazione n complesso***

Valgono le eq. di Maxwell senza l'ipotesi $\sigma = 0$

Nella I[a] eq. Di Maxwell vale ancora $\rho = 0$

per la mobilità degli elettroni liberi ogni eccesso di carica libera localizzata decade in un tempo τ

$\tau = \varepsilon/\sigma \cong 10^{-18}$*sec* (*freq. oscillazione* $\cong 10^{-15}$*sec*)

Equazione onde nei conduttori

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\mu\,\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\mu\,\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

il termine con $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ *giustifica l'attenuazione dell'onda (damped wave)*

Per onda monocromatica di freq. angolare ω

$\vec{E}$ *sarà del tipo* $\vec{E} = \vec{A}\, e^{f(\vec{r})} e^{-i\omega t}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv -i\,\omega \quad \rightarrow \quad \textbf{eq onde} \qquad \nabla^2 \vec{E} + \hat{k}^2 \vec{E} = 0$$

$$\hat{k} = numero\ d'onda \qquad \hat{k}^2 = \frac{\omega^2 \mu}{c^2}\left(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}\right)$$

Equazione formalmente identica all'eq. delle onde nei dielettrici sostituendo

$$\varepsilon \quad \rightarrow \quad \left(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}\right)$$

Onda armonica

$$\vec{E} = \vec{A}\, e^{i\left[\hat{k}(\vec{r}\cdot\vec{s}) - \omega t\right]}$$

Analogia completa con il caso dielettrico

Cost. dielettrica e vettore d'onda complessi $\rightarrow$

a) *velocità di fase complessa* $\hat{\boldsymbol{v}} = \dfrac{\boldsymbol{c}}{\sqrt{\mu \ \hat{\varepsilon}}}$

b) *indice di rifrazione complesso*

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\hat{\boldsymbol{v}}} = \sqrt{\mu \ \hat{\varepsilon}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{\omega}} \hat{\boldsymbol{k}}$$

o nella forma

$\hat{n} = n(1 + i\kappa)$ *n e* κ *reali*

κ = *coeff. di estinzione o indice di attenuazione*

vale anche $\hat{k} = \dfrac{\omega \, \hat{n}}{c} = \dfrac{\omega \, n(1 + i\kappa)}{c}$

$$\vec{E} = \vec{A}\, e^{-\frac{\omega}{c} n\kappa (\vec{r}\cdot\vec{s})}\; e^{i\omega\left[\frac{n}{c}(\vec{r}\cdot\vec{s}) - t\right]}$$

e considerando solo la parte reale

$$\vec{E} = \vec{A}\, e^{-\frac{\omega}{c} n\kappa (\vec{r}\cdot\vec{s})} \cos\left\{\omega\left[\frac{n}{c}(\vec{r}\cdot\vec{s}) - t\right]\right\}$$

Onda armonica piana di $\lambda = 2\pi c/\omega n$ che si propaga in un conduttore con attenuazione data dal termine esponenziale

Densità di energia $W \propto E^2$

$$W = W_0\, e^{-\chi(\vec{r}\cdot\vec{s})}$$

dove

$$\chi = \frac{2\omega}{c} n\kappa = \frac{4\pi\nu}{c} n\kappa = \frac{4\pi}{\lambda_0} n\kappa = \frac{4\pi\nu}{\lambda}\kappa$$

(χ = coefficiente di assorbimento)

L'energia si riduce ad un fattore 1/e del valore

iniziale dopo aver percorso un tratto d nel metallo

$$\boldsymbol{d = \frac{1}{\chi} = \frac{\lambda_0}{4\pi\, n\, \kappa} = \frac{\lambda}{4\pi\, \kappa}}$$

λ_0 *lunghezza d'onda nel vuoto*

λ *lunghezza d'onda nel mezzo*

Radiazione	*Infra-rosso*	*Microonde*	*Onde radio*
λ_0	10^{-3} cm	10 cm	10^{5} cm
d	$6.1\ 10^{-7}$ cm	$6.1\ 10^{-5}$ cm	$6.1\ 10^{-3}$ cm

Indice di rifrazione complesso in termini dei parametri del mezzo

$n^2 = \varepsilon\,\mu$ *per analogia*

$$\hat{n}^2 = \hat{\varepsilon}\,\mu = \left(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}\right)\mu = \mu\varepsilon + i\frac{\mu\sigma}{\omega}$$

per definizione

$$\hat{n}^2 = n(1 + i\kappa)^2 = n^2(1 - \kappa^2) + i2n\kappa$$

eguagliando le parti reali e immaginarie

$$\mathbf{n^2 (1 - k^2) = \mu\,\varepsilon} \qquad e \qquad \mathbf{2\,n\,\kappa = \mu\,\sigma / \omega}$$

il coeff. di assorbimento $\kappa \propto$ *alla conducibilià* σ

alto σ *(buon conduttore) alta attenuazione*

Conduttore ideale $\sigma \to \infty$ $d = 1/\chi \to 0$

Conduttore reale $d \neq 0$

$d \cong 0{,}6$ nm U.V $(\lambda \cong 100\ \mu m)$

$d \cong 6$ nm I.R. $(\lambda \cong 10\ mm)$