

4 COERENZA

Introduzione

Alcune tecniche ottiche che si basano su specifiche proprietà della luce o più in generale delle onde elettromagnetiche, vengono utilizzate sempre più spesso grazie alla loro estrema sensibilità, dal momento che il “metro” di misura è la lunghezza d’onda della radiazione usata, e al fatto che essendo per lo più non invasive possono essere applicate online. L’ellissometria ne è un esempio, ma vi è un’altra importante classe di tecniche di indagine che in generale possiamo definire *tecniche interferometriche* che trovano una vasta applicazione, soprattutto in meccanica nello studio di deformazioni o di risonanze, in fluidodinamica e più in genere nell’analisi sia statica che dinamica di variazioni di proprietà di sistemi. In una maniera del tutto generale possiamo dire che tutte queste tecniche si basano principalmente su due metodologie: una è legata al confronto e quindi *interferenza* tra due fronti d’onda, uno detto “fascio di riferimento” e l’altro “fascio oggetto” che in qualche modo ha interagito col sistema che si vuole studiare; l’altra sul confronto detto anche “*correlazione*” di un fronte d’onda ad istanti diversi o tra punti diversi dello stesso fronte d’onda che interagisce con il sistema in esame. L’interazione con il sistema può far variare quella che si definisce la “*coerenza*” del fronte d’onda e che può essere rivelata attraverso una modulazione dell’intensità del segnale rilevato da un dispositivo optoelettronico.

Quello che vogliamo fare è analizzare questa proprietà, la “*coerenza*” di un fronte d’onda, e vedere come questa grandezza fisica sia definita e come possa essere misurata.

Molto spesso il concetto di “*coerenza*” viene legato semplicemente alla possibilità che una radiazione elettromagnetica possa dare origine al fenomeno dell’*interferenza*. Più correttamente si deve dire che la *coerenza* è legata alle proprietà di correlazione tra quantità di un campo ottico. L’*interferenza* è il più semplice fenomeno di correlazione tra due onde luminose.

Fino ad ora abbiamo fatto riferimento al caso di onde perfettamente monocromatiche espresse analiticamente da funzioni tipo seno o coseno e quindi definite tra $\pm \infty$. Possiamo dire che rappresentano “*treni d’onda*” infinitamente lunghi e vedremo come questo implichi una *completa coerenza temporale* della radiazione. In contrapposizione la luce bianca naturale rappresenta il caso di radiazione *completamente incoerente*. Inoltre non abbiamo mai fatto nessun riferimento alle sorgenti e in particolare alle loro reali dimensioni, come se le sorgenti fossero da considerarsi puntiformi. Vedremo che questo implica una *completa coerenza spaziale* della radiazione emessa..

In pratica nessuna sorgente reale può essere considerata perfettamente monocromatica e tanto meno perfettamente puntiforme. Mediante la tecnica nota come “*analisi di Fourier*” possiamo

esprimere la radiazione emessa da una sorgente reale come somma di infinite componenti strettamente monocromatiche ciascuna emessa da un “punto” della sorgente (*armoniche del segnale*). Riferirsi al caso di onda perfettamente monocromatica significa restringere l’analisi ad una sola di queste componenti. Tutti i casi intermedi tra i due estremi di completa coerenza e completa incoerenza rientrano nel campo della coerenza parziale, che riveste un notevole interesse soprattutto per i possibili riscontri applicativi.

4,1 Coerenza temporale e spaziale

Ricordiamo l’espressione complessa del campo elettrico associato ad un’onda perfettamente monocromatica, in un generico punto P dello spazio che possiamo scrivere nella forma:

$$\vec{E}(P, t) = \vec{A}(P) e^{-i\omega t} e^{f(P)}$$

dove l’ampiezza A_0 e la *fase* sono considerate costanti in un dato punto; $f(P)$ è una funzione del punto che in questa trattazione può essere trascurata in quanto le considerazioni che verranno fatte sono riferite a radiazione osservate tutte nello stesso punto.

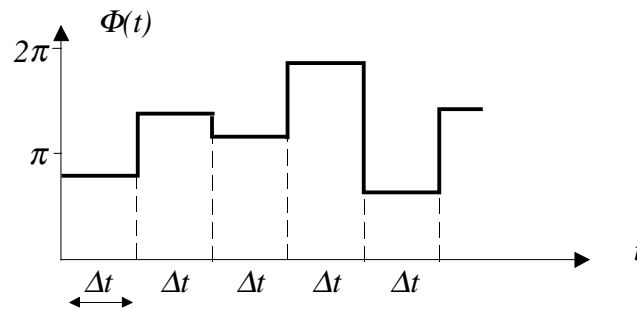
Nei casi reali la fase e l’ampiezza sono soggetti a fluttuazioni anche in punto fissato. La rapidità di tali fluttuazioni è legata alla “*larghezza di banda spettrale* $\Delta\nu$ ” centrata attorno ad un valore medio ν_0 . Quindi la radiazione non è mai perfettamente monocromatica e questo è dovuto al fatto che la sorgente contiene sempre un elevato numero di sorgenti elementari, ciascuna delle quali emette con una propria ampiezza e fase. Tanto più due sorgenti elementari sono distanti tra loro tanto più le due radiazioni sono scorrelate. Nel caso di $\Delta\nu \ll \nu_0$ la radiazione si dice quasi monocromatica. Essa può essere pensata costituita da una serie di treni d’onda finiti con fase relativa variabile casualmente nel tempo. La perturbazione elettrica che ne deriva presenta un’ampiezza che rimane costante solo in un intervallo di tempo Δt che è dell’ordine di grandezza dell’inverso di $\Delta\nu$.

Nel trattare le proprietà di coerenza si trascurano gli aspetti legati alla polarizzazione e quindi alla natura vettoriale delle onde, e possiamo sviluppare una “*teoria scalare*” facendo riferimento ad una qualunque componente del campo che possiamo rappresentare nella forma:

$$V(t) = [A(t) e^{i\phi(t)}] e^{-i\omega_0 t}$$

dove $A(t)$ e $\phi(t)$ sono funzioni reali di t e $\omega_0 = 2\pi\nu_0$. La quantità in parentesi quadra si chiama “*ampiezza complessa*”.

La fase $\Phi(t)$ si può ritenere costante solo in intervalli di tempo pari circa a Δt , dopodiché può variare bruscamente e in maniera casuale tra 0 e 2π ; tale sequenza si ripete all'infinito.



La perturbazione elettrica varia sinusoidalmente e si comporta come una radiazione monocromatica di frequenza ν_0 solo per tempi pari a Δt . La quantità:

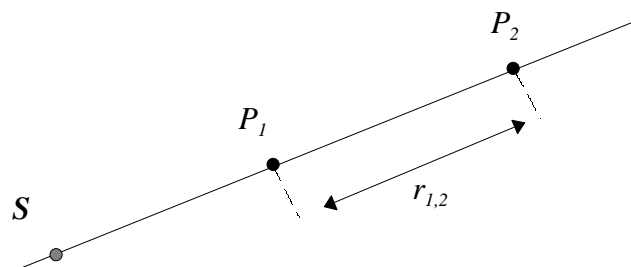
$$\Delta t = \frac{1}{\Delta \nu}$$

si definisce “*tempo di coerenza*” dell’onda e *rappresenta l’intervallo di tempo entro il quale, in un dato punto, è ragionevole considerare la fase di un’onda costante*. Analogo ragionamento si può fare per l’ampiezza.

Attraverso la meccanica quantistica si dimostra che l’allargamento spettrale di una radiazione è conseguenza del fatto che un atomo eccitato decade allo stato fondamentale in un tempo breve ma non nullo. Il tempo di decadimento naturale (caso più sfavorevole) è indicato con $\tau_0 \approx 10^{-8} \text{ sec}$ (“*vita media radiativi*” di uno stato eccitato), e si può ricavare che $\Delta \nu = 1/\tau_0$, da cui l’allargamento naturale di riga vale : $\Delta \nu \approx 10^8 \text{ sec}^{-1} = 100 \text{ MHz}$

Si può anche osservare che la frequenza del campo elettrico varia lentamente attorno al valore medio ν_0 (se confrontata con la rapidità di oscillazione del campo $\nu_0 \approx 10^{15} \text{ Hz}$).

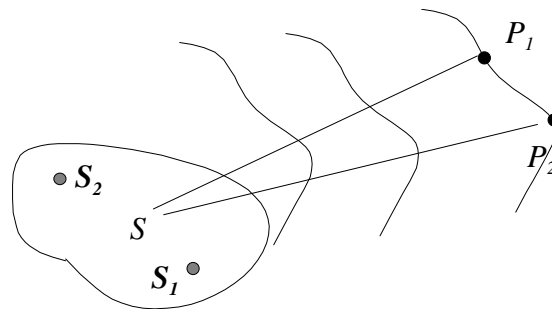
La stessa caratteristica di una radiazione, cioè il suo *grado di coerenza temporale* può essere rivista in un altro modo. Consideriamo due punti P_1 e P_2 giacenti sulla semiretta uscente da una sorgente S *quasi-monocromatica*.



Definiamo “**lunghezza di coerenza**” la quantità $\Delta l = c \Delta t$ che presenta l’intervallo spaziale entro il quale la radiazione si può considerare perfettamente sinusoidale, con Δt tempo di coerenza.

Se $\Delta l \gg r_{12}$, da P_1 a P_2 si estende un singolo treno d’onda. In tal caso la perturbazione elettrica in P_2 è *fortemente correlata* con quella in P_1 . In caso contrario tra P_1 e P_2 ci saranno molti treni d’onda, ciascuno con fase scorrelata rispetto a quella degli altri e le perturbazioni elettriche in P_1 e P_2 risulteranno completamente scorrelate tra loro, qualunque sia l’istante in cui le consideri. Il grado di correlazione tra le perturbazioni elettriche nei punti P_1 e P_2 si dice anche “**grado di coerenza spaziale longitudinale**”. E’ da notare che sia il tempo di coerenza Δt che la lunghezza di coerenza Δl sono legate alla larghezza di banda finita $\Delta \nu$ con cui emettono le sorgenti reali.

La coerenza temporale è strettamente legata alla larghezza di banda di una sorgente, mentre la coerenza spaziale è utilizzata per descrivere gli effetti dovuti alle dimensioni (non puntiformi) di qualunque sorgente reale. Due emettitori puntiformi, S_1 e S_2 , giacenti sulla sorgente si comporteranno in maniera del tutto indipendenti se la loro distanza relativa è grande rispetto alla *lunghezza d’onda media* λ_0 attorno a cui emette la sorgente. Le due perturbazioni elettriche originati in S_1 e S_2 *non avranno correlazione di fase*. Ci si può allora chiedere come le dimensioni e forma della sorgente possono influire sulla correlazione tra le fasi delle perturbazioni luminose in due punti, P_1 e P_2 , dello spazio investiti dalla radiazione. Si può supporre che, se i due punti sono così vicini che la differenza $\Delta r = (SP_1 - SP_2)$ tra i cammini ottici a partire dal generico emettitore S sulla sorgente estesa è piccola rispetto alla λ_0 , le perturbazioni luminose in P_1 e P_2 saranno le stesse.



Analogamente è ragionevole supporre che la stessa correlazione ci sarà tra due qualunque punti nello spazio, raggiunti dalla perturbazione emessa dalla sorgente estesa a condizione che la loro differenza reciproca sia tale che la differenza di cammino ottico Δr , calcolata rispetto ad un qualunque punto della sorgente estesa, non sia maggiore della lunghezza di coerenza $c\Delta t = c/\Delta \nu = \lambda_0^2/\Delta \lambda$ che caratterizza la sorgente. Si parla anche di “**coerenza spaziale laterale**” attorno ad un punto P investito dall’onda luminosa.

Anche se la divisione tra *coerenza temporale* e *spaziale* è del tutto artificiosa, spesso è conveniente trattarle separatamente in quanto vengono fatte risalire a due caratteristiche diverse della radiazione (*larghezza di banda* e *dimensione della sorgente*) e possono sperimentalmente essere verificate mediante opportuni apparati sperimentali. Un dispositivo del tipo “*interferometro di Michelson*” (*interferometro a divisione di ampiezza*) permette di misurare la *coerenza temporale*, mentre la *coerenza spaziale* è messa in evidenza da un dispositivo del tipo a “*doppia fenditura di Young*” (*interferometro a divisione di campo*).

E opportuno far notare che se si vuole mettere in evidenza, per esempio la coerenza temporale, il dispositivo sperimentale utilizzato è tale da soddisfare le condizioni di massima coerenza spaziale possibile, e viceversa. In altre parole se voglio utilizzare un interferometro di Michelson devo illuminarlo con una sorgente che ha un elevato grado di coerenza spaziale (laser, sorgente quasi monocromatica diaframmata, ecc.). Viceversa se voglio utilizzare un dispositivi tipo Young con una sorgente piuttosto estesa, devo usare una radiazione sufficientemente monocromatica .

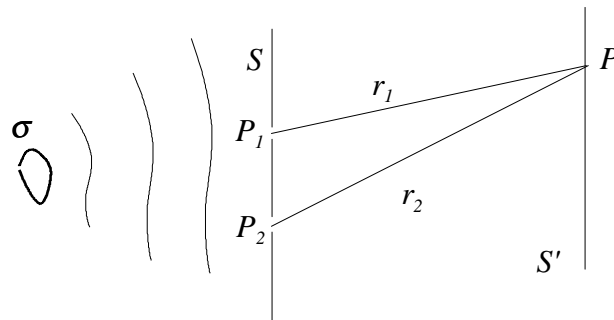
In ogni caso comunque, sia che si parli di *coerenza spaziale* che *temporale*, il problema è quello di valutare il grado di correlazione tra due punti diversi P_1 e P_2 dello spazio in cui è presente il campo elettrico. In generale ci sono tre possibili situazioni sperimentali che comunque possono sempre essere fatti risalire allo stesso principio.

- a) Un fronte d’onda a seguito di *divisione di ampiezza* dà origine a due fronti d’onda, il *fascio di riferimento* e il *fascio oggetto*, che sono inizialmente completamente correlati e che seguiranno due strade diverse. Il *fascio oggetto* viene sovrapposto in quello che si definisce “*piano immagine*” al *fascio di riferimento*. L’interazione presenta una *modulazione di intensità* sul piano immagine. Dall’analisi della distribuzione di intensità si vuole risalire alla storia del fascio oggetto (interferometria olografica, interferometria speckle)
- b) Si sovrappongono sul *piano immagine* fronti d’onda provenienti da punti diversi di uno stesso fronte d’onda a seguito di *divisione di campo*. L’interazione presenta una *modulazione di intensità e di contrasto* diversa a seconda della distanza tra i due punti selezionati. L’analisi della distribuzione di intensità permette di risalire a proprietà della sorgente. Esempio analisi del fronte d’onda emergente da una fibra ottica.
- c) Un fronte d’onda attraversa un mezzo trasparente non omogeneo in trasparenza; fluido con particelle in sospensione, fumi, ecc...Il segnale luminoso fluttua in intensità in maniera più o meno casuale. Facendo l’autocorrelazione del segnale ad intervalli di tempo variabili è possibile risalire a proprietà del mezzo tipo le dimensioni medie del particolato (tecniche di lighth-scattering)

4,2 Funzione di correlazione e grado di coerenza

Definiamo il “**grado di coerenza**” nella maniera più generale possibile e vedremo successivamente i due casi estremi di *coerenza temporale* e *spaziale* facendo riferimento a due dispositivi sperimentali classici: *interferometro di Michelson* e *doppia fenditura di Young*”

Consideriamo due punti arbitrari nello spazio, P_1 e P_2 , investiti da un'onda luminosa prodotta da una sorgente estesa σ non monocromatica e indichiamo con $I(P_1)$ e $I(P_2)$ le intensità rispettivamente in P_1 e P_2 . Possiamo sperimentalmente determinare gli effetti dovuti alla sovrapposizione, in un punto P del *piano immagine* S' , delle perturbazioni luminose originate nei punti P_1 e P_2 utilizzando uno schermo opaco S con due forellini in corrispondenza dei due punti P_1 e P_2 sul percorso luminoso.



Trascureremo gli effetti di polarizzazione sviluppando una trattazione scalare del problema per cui la perturbazione luminosa sarà rappresentata da una funzione scalare complessa $V(P,t)$, funzione del punto e del tempo:

$$V(P,t) = [A(t) e^{i\phi(t)}] e^{-i\omega_0 t} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

La grandezza misurabile e di interesse è l'intensità media $I(P)$ in P che è legata alla $V(P,t)$ dalla relazione:

$$I(P) = \langle V(P,t) \cdot V^*(P,t) \rangle \quad (4,1)$$

dove $V^*(P,t)$ rappresenta il complesso coniugato e il termine nelle parentesi indica una media temporale definita da:

$$\langle V(P,t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T V(P,t) dt$$

Studiamo la distribuzione di intensità sul *piano immagine*. Siano r_1 e r_2 le distanze del generico punto P su S' dai due punti P_1 e P_2 , considerati come sorgenti puntiformi. La perturbazione luminosa risultante in P sarà data da:

$$V(P, t) = k_1 V(P_1, t - t_1) + k_2 V(P_2, t - t_2) \quad (4,2)$$

dove k_1 e k_2 dipendono dalle dimensioni delle aperture, dalla geometria sperimentale e sono inversamente proporzionale alle distanze r_1 e r_2 . In generale le k sono grandezze complesse e dalla teoria della rifrazione si può dimostrare che si ha uno sfasamento relativo di $\pi/2$ nella fase del campo riemesso dalle due aperture. Nella (4,2) $t_1 = r_1/c$ e $t_2 = r_2/c$, rappresentano il tempo impiegato dalla radiazione a raggiungere P rispettivamente da P_1 e P_2 . Ci dice che *la perturbazione luminosa in P al tempo t dipende dalla perturbazione luminosa che era in P_1 al tempo $t = (t - t_1)$ e dalla perturbazione luminosa che era in P_2 al tempo $t = (t - t_2)$*

L'intensità in un punto P sarà data da:

$$\begin{aligned} I(P) = & k_1 k_1^* \langle V_1(t - t_1) \cdot V_1^*(t - t_1) \rangle + k_2 k_2^* \langle V_2(t - t_2) \cdot V_2^*(t - t_2) \rangle + \\ & + k_1 k_2^* \langle V_1(t - t_1) \cdot V_2^*(t - t_2) \rangle + k_1^* k_2 \langle V_1^*(t - t_1) \cdot V_2(t - t_2) \rangle \end{aligned} \quad (4,3)$$

Considerando i campi stazionari (come sempre avviene in ottica classica), le loro caratteristiche statistiche non variano nel tempo, per cui non ha importanza il particolare momento in cui si calcolano le medie quando si calcolano le intensità $I(P)$ in un certo punto, per cui possiamo scrivere:

$$\langle V_1(t - t_1) \cdot V_1^*(t - t_1) \rangle = \langle V_1(t) \cdot V_1^*(t) \rangle = I_1$$

e analogamente per i termini con gli indici permutati. Di conseguenza l'intensità luminosa in un punto P può essere scritta come:

$$I(P) = |k_1|^2 I_1 + |k_2|^2 I_2 + 2 |k_1 k_2| \Gamma_{1,2}^{(r)}(t_2 - t_1) \quad (4,4)$$

dove $\Gamma_{1,2}^{(r)}(t_2 - t_1)$ è la parte reale della funzione :

$$\Gamma_{1,2}(\tau) = \Gamma_{1,2}(t_2 - t_1) = \langle V_1(t - t_1) \cdot V_2^*(t - t_2) \rangle = \langle V_1(t + \tau) \cdot V_2^*(t) \rangle \quad (4,5)$$

in quanto il 3° e 4° termine della (4,3) sono l'uno il complesso coniugato dell'altro e dalla loro somma si ottiene il doppio della parte reale di ciascuno. La funzione complessa $\Gamma_{1,2}(\tau)$ è detta "**funzione di coerenza mutua**". Ci permette di stimare il grado di mutua coerenza delle radiazioni in P_1 e P_2 avendo calcolato la radiazione in P_1 con un ritardo temporale di τ rispetto a quella in P_2

Se i due punti P_1 e P_2 coincidono si ottengono le funzioni di autocorrelazione complesse

$$\Gamma_{1,1}(\tau) = \langle V_1(t+\tau) \cdot V_1^*(t) \rangle \quad \Gamma_{2,2}(\tau) = \langle V_2(t+\tau) \cdot V_2^*(t) \rangle \quad (4,6)$$

Ci permettono di valutare **per quanto tempo in un punto P_1 (o P_2) le perturbazioni luminose mantengono una relazione di fase ben definita**. E' opportuno osservare che considerare il caso di P_1 e P_2 coincidenti equivale ad analizzare la sovrapposizione di due fronti d'onda, prodotti da un unico fronte per divisione di ampiezza, che hanno raggiunto P_1 (o P_2) seguendo due cammini diversi. Per $\tau = 0$ si riducono a meno di costanti a :

$$\Gamma_{1,1}(0) = I_1 \quad \Gamma_{2,2}(0) = I_2$$

Generalmente si utilizza la funzione di mutua correlazione normalizzata, che viene indicata con $\gamma_{12}(\tau)$ e che è nota come **grado di coerenza complesso**, cioè:

$$\gamma_{1,2}(\tau) = \frac{\Gamma_{1,2}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{1,1}(0)} \sqrt{\Gamma_{2,2}(0)}} = \frac{\Gamma_{1,2}(\tau)}{\sqrt{I_1} \sqrt{I_2}} \quad (4,7)$$

Si può dimostrare che per come è stata definita deve essere anche $|\gamma_{1,2}(\tau)| \leq 1$. Il segno "uguale" significa assoluta coerenza.

L'intensità in un punto P si può scrivere :

$$I(P) = I^{(1)}(P) + I^{(2)}(P) + 2\sqrt{I^{(1)}(P)}\sqrt{I^{(2)}(P)}\gamma_{1,2}^{(r)}(\tau) \quad (4,8)$$

La (4,7) **rappresenta la legge generale dell'interferenza per fasci di luce parzialmente coerenti**, dove $I^{(1)}(P)$ rappresenta l'intensità che si avrebbe in P se ci fosse solo un forellino in corrispondenza di P_1 ; analogo significato per $I^{(2)}(P)$.

Mentre non è possibile misurare la $V^{(r)}(t)$, le quantità $\Gamma_{12}^{(r)}$ e in particolare $\gamma_{12}^{(r)}$ sono misurabili sperimentalmente.

Per onda piana monocromatica si ha il caso ideale di completa coerenza

Nel caso di luce quasi monocromatica la differenza di fase angolare risultante dalla differenza di cammino ottico pari a $r_2 - r_1$ sarà data da

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = 2\pi \bar{\nu} \tau = \bar{\omega} \tau$$

con $\bar{\lambda}$ e $\bar{\nu}$ lunghezza d'onda e la frequenza media della radiazione.

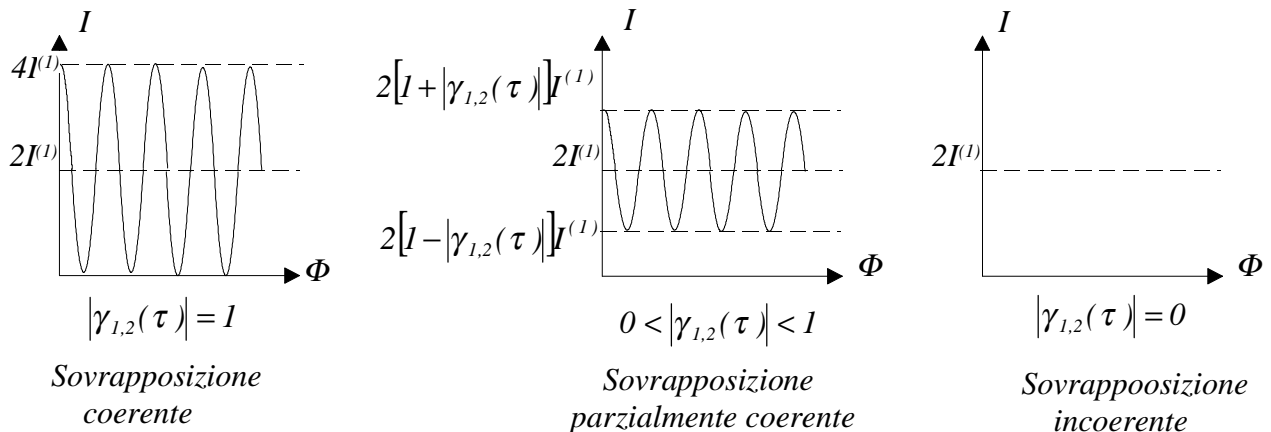
Poiché $\gamma_{12}(\tau)$ è una funzione complessa la possiamo scrivere nella forma:

$$\gamma_{1,2}(\tau) = |\gamma_{1,2}(\tau)| e^{i\{\alpha(\tau) - \phi\}}$$

per cui la (4,7) si può scrivere come:

$$I(\mathbf{P}) = I^{(1)}(\mathbf{P}) + I^{(2)}(\mathbf{P}) + 2\sqrt{I^{(1)}(\mathbf{P})I^{(2)}(\mathbf{P})}|\gamma_{1,2}(\tau)|\{\cos[\alpha(\tau) - \phi]\} \quad (4,9)$$

Quindi nel caso più semplice, ma più aderente alle applicazioni reali, di una sorgente che parzialmente monocromatica ($\Delta\nu \ll \nu$) che illumina i due forellini, sullo schermo S' nelle vicinanze di ogni punto P si avrà un "fondo" costante ($I^{(1)}(\mathbf{P}) + I^{(2)}(\mathbf{P})$), modulato da una distribuzione di intensità ($2\sqrt{I^{(1)}(\mathbf{P}) \cdot I^{(2)}(\mathbf{P})} |\gamma_{1,2}(\tau)|$) di tipo sinusoidale. L' andamento dell' intensità totale è mostrato in figura



Dalla (4,8) troviamo che i valori massimi e minimi dell'intensità sono dati da:

$$I_{Max}(P) = I^{(1)}(P) + I^{(2)}(P) + 2\sqrt{I^{(1)}(P) \cdot I^{(2)}(P)} \left| \gamma_{1,2}(\tau) \right|$$

$$I_{min}(P) = I^{(1)}(P) + I^{(2)}(P) - 2\sqrt{I^{(1)}(P) \cdot I^{(2)}(P)} \left| \gamma_{1,2}(\tau) \right|$$

Definiamo $C = \text{Contrasto delle frange}$ la grandezza definita da :

$$C = \frac{I_{Max} - I_{min}}{I_{Max} + I_{min}} \quad (4,10)$$

per cui

$$C = \frac{2\sqrt{I^{(1)}(P)}\sqrt{I^{(2)}(P)}}{I^{(1)}(P) + I^{(2)}(P)} \left| \gamma_{1,2} \right| \quad (4,11)$$

e ponendoci nelle condizioni in cui $I^{(1)}(P) = I^{(2)}(P)$ si ottiene:

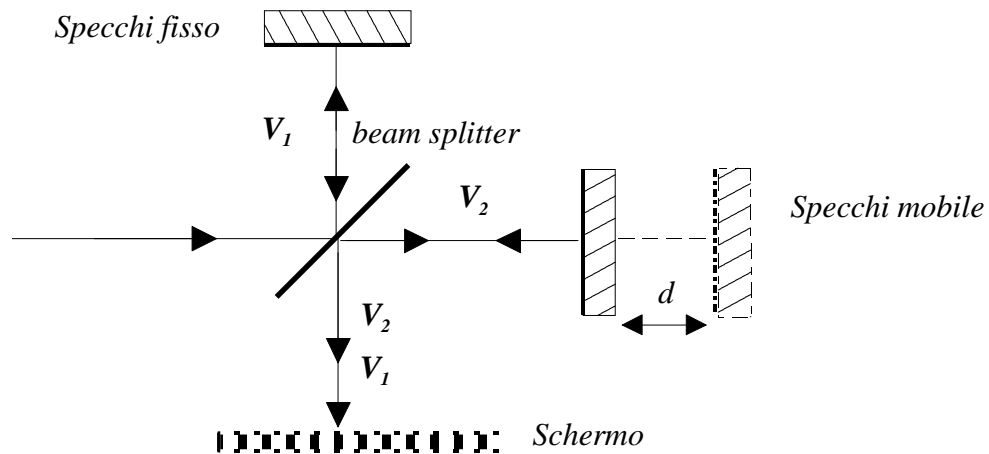
$$C = \left| \gamma_{1,2} \right|$$

Possiamo allora dire che in un pattern di frange di interferenza “*la visibilità delle frange coincide con il modulo del grado di coerenza complesso*“ della radiazione.

Vediamo adesso più in dettaglio come i dispositivi a “*divisione di ampiezza*” e a “*divisione di campo*” sia adatto adatte ad evidenziare l'aspetto *temporale* e quello *spaziale* della coerenza, analizzando due casi classici particolarmente semplici.

4,2 Coerenza temporale

Sviluppiamo sempre la trattazione scalare delle onde e consideriamo il cammino dei raggi in un **Interferometro di Michelson**; un braccio è fisso mentre l'altro è mobile e può essere spostato lungo l'asse del fascio. L'onda incidente viene divisa in due fasci dal beam splitter; un fascio viene riflesso dallo specchio fisso e raggiunge lo schermo dopo avere riattraversato il beam splitter (V_1), l'altro riflesso dallo specchio mobile spostato dalla posizione iniziale (bracci dell'interferometro di uguale lunghezza) di un tratto d , si sovrappone al primo dopo la riflessione sul beam splitter (V_2)



In questo modo è possibile sovrapporre onde che hanno un ritardo temporale l'una rispetto all'altra.

Sullo schermo si ha la sovrapposizione delle due onde V_1 e V_2 , con V_2 che al più ha un certo ritardo rispetto alla prima dovuto all'ulteriore di cammino compiuto pari a $2d$.

In un punto dello schermo avremo quindi:

$$V_2(t) = V_1(t + \tau) \quad \text{oppure} \quad V_1(t) = V_2(t - \tau)$$

La quantità τ dipende dallo spostamento d dello specchio mobile e vale: $\tau = \frac{2d}{c}$.

0

Ad un certo istante, in ogni punto dello schermo il campo risultante sarà rappresentato da:

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) = V_1(t) + V_1(t + \tau)$$

e quindi l'intensità osservata sarà data da:

$$\begin{aligned} I &= \langle A \cdot A^* \rangle = \langle (A_1 + A_2)(A_1 + A_2)^* \rangle = \langle A_1 \cdot A_1^* \rangle + \langle A_2 \cdot A_2^* \rangle + \langle A_2 \cdot A_1^* \rangle + \langle A_1 \cdot A_2^* \rangle = \\ &= I_1 + I_2 + 2 \operatorname{Re} \{ \langle A_2 \cdot A_1^* \rangle \} = 2 I_1 + 2 \operatorname{Re} \{ \langle A_2 \cdot A_1^* \rangle \} \end{aligned}$$

cioè l'intensità in ogni punto dello schermo è data dalla somma dell'intensità I_1 della prima onda e dell'intensità I_2 della seconda onda, più il "termine di interferenza". Ricordiamo che la luce che illumina l'interferometro deve possedere le sufficienti caratteristiche di coerenza spaziale.

Ricordando che $V_2(t) = V_1(t + \tau)$ e la definizione di funzione di autocorrelazione (4,6) ricaviamo la “**funzione complessa di autocorrelazione**” dell’onda luminosa $V_1(t)$ come:

$$\Gamma(\tau) = \langle V_1^* \cdot V_1(t + \tau) \rangle = \lim_{T_m \rightarrow \infty} \frac{1}{T_m} \int_{-T_m/2}^{+T_m/2} V_1^* \cdot V_1(t + \tau) dt$$

che mi dice quanto la funzione al tempo $t = t + \tau$ si sovrappone alla funzione al tempo t

Per l’intensità I sullo schermo vale la relazione analoga alla (4,4):

$$I(\tau) = I_1 + I_2 + 2\Gamma^{(r)}(\tau) = 2I_1 + 2\Gamma^{(r)}(\tau)$$

con $\Gamma^{(r)}(\tau) = \text{Re} \{ \Gamma(\tau) \}$

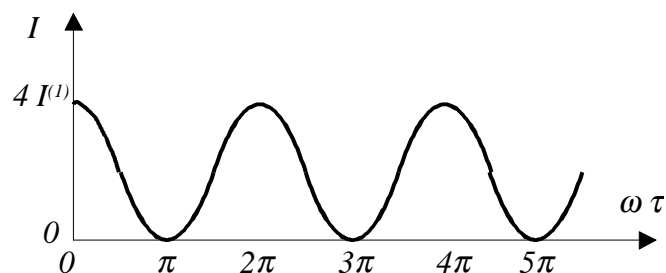
Nel caso di onda armonica scalare: $V_1(t) = A_0 e^{-i\omega t}$ e quindi:

$$\Gamma(\tau) = \lim_{T_m \rightarrow \infty} \frac{1}{T_m} \int_{-T_m/2}^{T_m/2} V_1^*(t) \cdot V_1(t + \tau) dt = \lim_{T_m \rightarrow \infty} \frac{1}{T_m} \int_{-T_m/2}^{T_m/2} A_0^2 e^{i\omega t} e^{-i\omega(t+\tau)} dt = A_0^2 e^{-i\omega\tau} = I_1 e^{-i\omega\tau}$$

“**la funzione di autocorrelazione di una funzione armonica dipende solo dal ritardo di tempo τ** ”.

Allora l’ intensità è data dalla (4,12):

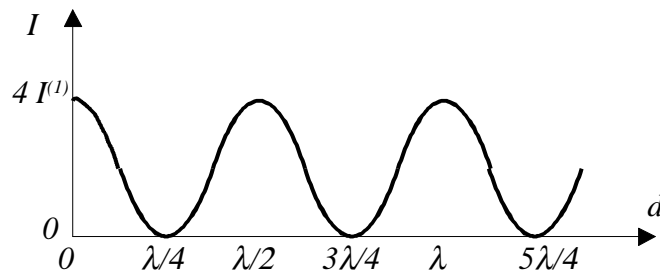
$$I(\tau) = 2I_1 + 2\Gamma^{(r)}(\tau) = 2I_1 + 2I^{(I)} \text{Re} \{ e^{-i\omega\tau} \} = 2I^{(I)} + 2I^{(I)} \cos(\omega\tau) = 2I^{(I)} [1 + \cos(\omega\tau)]$$



La (4,12) può esser scritta anche nella forma¹:
$$I(\tau) = 4 I^{(1)} \cos^2\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$$

Quindi sullo schermo la modulazione dell'intensità va come il *coseno quadrato del ritardo*, corrispondente alla metà della differenza dei bracci dell'interferometro.

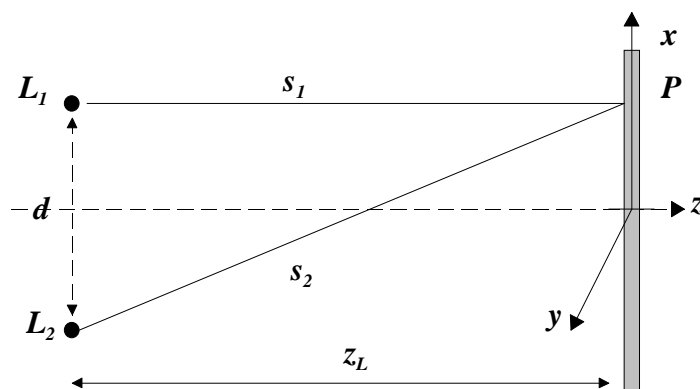
Si può notare che gli zeri della funzione $I(t)$ sui hanno in corrispondenza di ritardi pari $\omega \tau = n\pi$ con $n = 1,3,5 \dots$ e che corrispondono a spostamenti d del bracci Lço mobile pari a² interi dispari di $\lambda/4$ per cui possiamo valutare gli zeri del grafico di $I = I(d)$



Nel pattern di frange di interferenza ottenute con un interferometro di Michelson a braccio mobile, la distanza tra due frange scure (o chiare) corrisponde ad uno spostamento del braccio mobile pari a mezza lunghezza d'onda.

4,3 Coerenza spaziale

Consideriamo inizialmente l'interferenza di due onde sferiche, emesse da due sorgenti puntiformi L_1 e L_2 separate da una distanza d , e andiamo ad osservare la distribuzione di intensità su uno schermo posto a distanza z_L dall'asse delle due sorgenti come mostrato in figura.



¹ Dalle formule di bisezione $\cos(2a) = 2(\cos^2 a - 1)$

² $\tau = 2d/c$; $\lambda = 2\pi c/\omega \rightarrow c/\omega = \lambda/2\pi$
 $\omega\tau = 2d\omega/c = 2d\omega/2\pi\lambda$; $\omega\tau = n\pi = 2d\omega/2\pi\lambda = n\pi \rightarrow d = n\lambda/4, n = 1,3,5$

Procedendo in maniera analoga a quanto fatto nel caso di one piane (Cap.I) si poterbbe dimostrare che l'espressione analitica (complessa) che rappresenta un'onda sferica monocromatica è data da:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{A}{r} e^{i(kr \pm \omega t + \varphi)}$$

Accettata questa osservazione, le onda sferiche generate da L_1 e L_2 saranno rispettivamente rappresentate da :

$$\mathbf{E}(s_1, t) = A(s_1) e^{i(k s_1 - \omega t + \varphi_1)} \quad \text{e} \quad \mathbf{E}(s_2, t) = A(s_2) e^{i(k s_2 - \omega t + \varphi_2)}$$

Il campo totale in ogni punto P dello schermo sarà dato da:

$$\mathbf{E}(x, y, 0, t) = \mathbf{E}(s_1, t) + \mathbf{E}(s_2, t)$$

mentre l'intensità $I(x, y, 0)$ sarà:

$$\begin{aligned} I &= \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \rangle = \langle (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \rangle \cdot \langle (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^* \rangle = \\ &= A^2(s_1) + A^2(s_2) + 2A(s_1)A(s_2) \cos[k(s_2 - s_1) + \varphi_2 - \varphi_1] \end{aligned} \quad (4,11)$$

Se si ci pone nelle condizioni che $\frac{d}{z_L} \ll 1$ e limitandoci ad osservare sullo schermo la distribuzione di intensità su un'area tale che $\frac{x}{z_L} \ll 1$ e $\frac{y}{z_L} \ll 1$ è possibile esprimere s_1 e s_2 in termini di d , z_L , x e y in quanto si è in *condizioni parassiali* e gli angoli sono piccoli. Individuando un sistema di riferimento in cui $L_1 \equiv (d/2, 0, -z_L)$ e $L_2 \equiv (-d/2, 0, -z_L)$ possiamo scrivere:

$$s_1 = \sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 + z_L^2}, \quad s_2 = \sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 + z_L^2}$$

per cu la differenza di cammino ottico dei due fasci è data da:

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{2} \frac{x d}{z_L} + \frac{1}{2} \frac{x d}{z_L} = \frac{d}{z_L} x$$

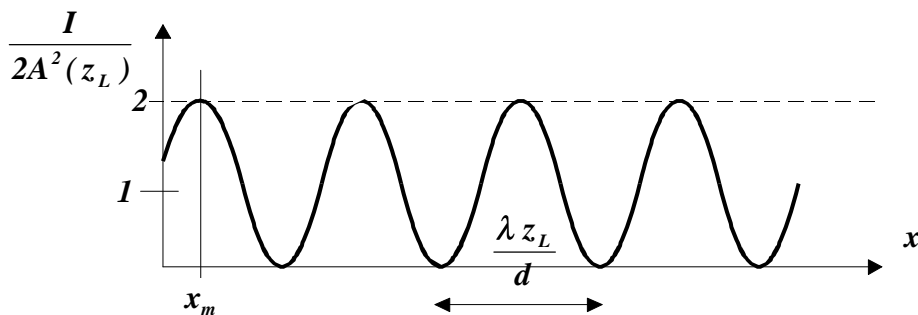
cioè è *lineare con x*. Se inoltre le due onde lasciano L_1 e L_2 con la stessa intensità nell'approssimazione fatta avranno anche la ampiezza costante ed uguale attraverso lo schermo. Infatti possiamo scrivere:

$$A(s_1) = \frac{A_0(L_1)}{s_1} = \frac{A_0}{s_1} \approx \frac{A_0}{z_L} = A(z_L), \quad A(s_2) = \frac{A_0(L_2)}{s_2} = \frac{A_0}{s_2} \approx \frac{A_0}{z_L} = A(z_L)$$

Introducendo questi parametri nell'espressione dell'intensità (4,11) troviamo la distribuzione di intensità sullo schermo:

$$I(x, y, 0) = 2A^2(z_L) \left[I + \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda z_L} x + \varphi_2 - \varphi_1\right) \right] \quad (4,12)$$

cioè si avrà un pattern di frange, modulato nella direzione x, che si stende nella direzione y, come indicato in figura:



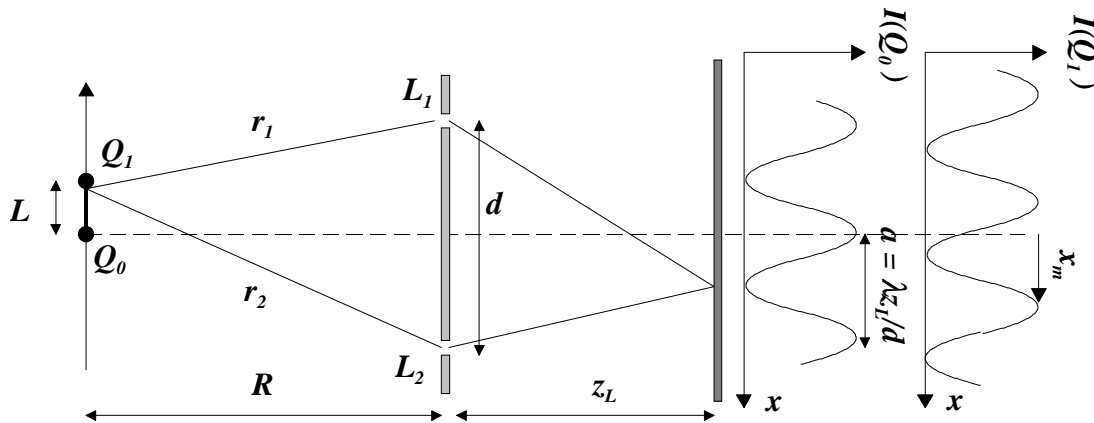
La separazione delle frange è la distanza tra due zeri della (4,12), ed è data da :

$$a = \frac{\lambda z_L}{d} \quad (4,13)$$

mentre il massimo più vicino all'asse ottico del sistema è spostato proporzionalmente a $(\varphi_1 - \varphi_2)$:

$$x_m = \frac{\lambda z_L}{d} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2\pi} \quad (4,14)$$

Dopo aver discusso la distribuzione di intensità prodotta su uno schermo da due sorgenti puntiformi di onde sferiche, affrontiamo il problema della *coerenza spaziale* considerando un dispositivo dove al posto delle due sorgenti si ha uno *schermo opaco con due aperture* L_1 e L_2 separate da una distanza d . Le due aperture sono illuminate dalla radiazione emessa da una *sorgente estesa di diametro L* e saranno sorgenti di due onde sferiche. Il dispositivo è mostrato in figura.



La una sorgente estesa di diametro L , non coerente che può essere pensata come composta da singoli punti indipendenti ciascuno sorgente di un'onda sferica. Vogliamo analizzare il pattern di interferenza prodotto sullo schermo dalla sovrapposizione delle onde emergenti dalle due aperture L_1 e L_2 . Supponiamo anche che il punto Q_0 stia sull'asse del sistema. L'onda sferica emessa da questo punto raggiunge le due aperture L_1 e L_2 con la stessa fase. Questo darebbe origine ad un pattern di frange simmetrico e con massimo di intensità sull'asse del sistema. Un punto Q_1 fuori asse produrrà invece un pattern di frange traslato lateralmente e perpendicolarmente all'asse. L'onda emessa da Q_1 avrà uno sfasamento rispetto a quella prodotta da Q_0 , dovuto al fatto che le due onde originate da L_1 e L_2 hanno percorso cammino diverso ; lo sfasamento sarà pari a:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2)$$

e, come accennato nel caso dell'interferenza di onde sferiche dalla teoria della diffrazione per onde sferiche ,il pattern di frange avrà uno spostamento laterale dato da:

$$x_m = \frac{1}{\lambda} \frac{z_L}{d} (r_1 - r_2)$$

Pensiamo ora che Q_1 e Q_0 emettano contemporaneamente. Se tra le due onde si ha uno sfasamento fissato e costante, il pattern risultante sarà simile a quello di Q_1 e Q_0 separatamente, ma semplicemente spostato lateralmente; i massimi di uno non coincidono con i massimi dell'altro.

Quando la sorgente è incoerente le fluttuazioni di fase tra due sorgenti sono statisticamente distribuite e quello che si osserverà sarà solamente la somma delle intensità dei due campi in quanto il termine di interferenza in media vale zero. Allora la condizione per avere un pattern di

frange visibile è che i due sistemi di frange prodotte da Q_1 e Q_0 non siano troppo spostati lateralmente in modo che un massimo di uno non cada in un minimo dell'altro. Questa condizione, quando si avessero solo le due sorgenti puntiformi Q_1 e Q_0 separate da L , è verificata se vale la relazione:

$$|x_m| < \frac{a}{2} \quad \text{con} \quad a = \lambda \frac{z_L}{d} \quad (\text{separazione tra le frange})$$

il che comporta anche che :

$$|r_1 - r_2| < \frac{\lambda}{2} \quad (4,15)$$

che può essere espressa in termini dei parametri geometrici del dispositivo sperimentale

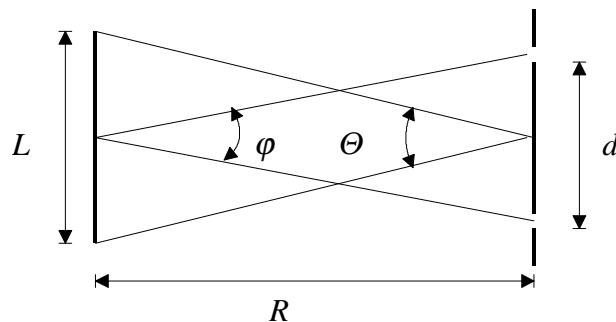
$$|r_1 - r_2| < \frac{dL}{R} \quad \text{da cui la condizione} \quad \frac{dL}{R} < \frac{\lambda}{2}$$

Ora se consideriamo anche tutti i punti Q_i da Q_0 a Q_1 della superficie estesa dobbiamo aggiungere i pattern di frange di tutti i punti che risulteranno tanto più spostati quanto più sono distanti dall'asse. Il massimo spostamento si ha per Q_1 e quindi possiamo prendere come condizione di coerenza spaziale la relazione

$$\frac{dL}{R} \leq \frac{\lambda}{2}$$

Possiamo introdurre anche due nuovi parametri φ e Θ che sono gli angoli sotto cui la sorgente vede le due aperture viceversa e definite da:

$$\frac{d}{R} = 2 \tan \frac{\varphi}{2} \cong \varphi \cong \text{sen } \varphi \quad \text{e} \quad \frac{L}{R} = 2 \tan \frac{\Theta}{2} \cong \Theta \cong \text{sen } \Theta$$



per cui la condizione di correlazione per la dimensione lineare della sorgente (fissati i due punti) o per la distanza tra i due punti (fissata la dimensione lineare della sorgente) diventa

$$L \sin \varphi \leq \frac{\lambda}{2} \quad \text{o} \quad d \sin \Theta \leq \frac{\lambda}{2}$$

È opportuno osservare che le proprietà di coerenza sono state determinate considerando solo il campo sulle due aperture. Tutti gli altri elementi del sistema sono puramente accessori: lo schermo per esempio serve solo per raccogliere il pattern su cui misurare l'intensità. La sovrapposizione è fatta sullo schermo, ma i campi delle due onde sono gli stessi di quelli sulle aperture a meno di un semplice ritardo temporale.

Se consideriamo il pattern di interferenza nella zona prossima all'asse del sistema, il cammino dalle aperture allo schermo può essere ritenuto ragionevolmente uguale per i due fronti d'onda, per cui il pattern di frange conterrà informazioni circa la confrontabilità delle forme d'onda $V(r_1, t)$ e $V(r_2, t)$ nella posizione delle due aperture r_1 e r_2 rispetto alla sorgente senza ritardo di tempo. Questa informazione è contenuta nella *funzione di cross-correlazione* o *mutua correlazione*

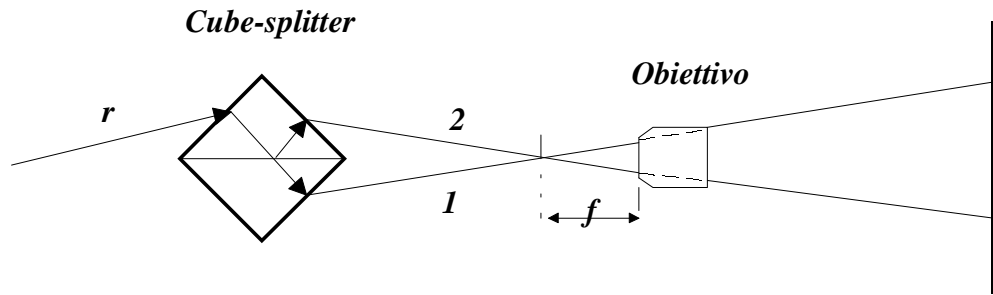
$$\Gamma(r_1, r_2, 0) = \Gamma_{1,2}(0) = \langle V(r_1, t) \cdot V^*(r_2, t) \rangle$$

che è la *funzione di correlazione spaziale*.

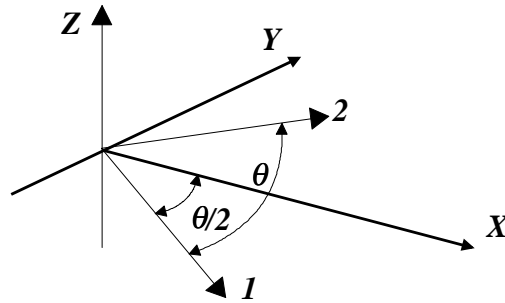
4,4 Interferenza

Perché due onde possano interferire, è necessario che la sorgente o i fronti d'onda che interagiscono abbiano sufficienti caratteristiche di coerenza. Per poter osservare l'eventuale pattern di frange o per poterlo raccogliere su di un supporto fisico, lastra o pellicola fotografica, telecamera, ecc., questo non deve avere un passo troppo piccolo in modo da poter essere risolto dal supporto su cui si registra. Per esempio il passo del reticolo non deve essere più grande della grana della pellicola fotografica che si utilizza. Vediamo allora quale condizione, circa l'inclinazione tra i due fasci che si sovrappongono, devono essere rispettate al fine di avere un pattern utilizzabile per eventuali applicazioni. Facciamo riferimento al più semplice caso di interferenza e mettiamoci nelle condizioni più favorevoli supponendo la sorgente assolutamente coerente (laser).

Un fascio laser incide su un cube-splitter come mostrato in figura. Dal cube-splitter emergono due fasci, che essendo derivati per divisione di ampiezza dallo stesso fascio sono assolutamente correlati e possono dare interferenza. L'interferenza avviene nel fuoco dell'obiettivo, fissato come origine del sistema di riferimento, di volume $< 1 \text{ mm}^3$.



Dal cube-splitter i due raggi si propagano nelle direzioni $\pm \theta/2$



Le frecce 1 e 2 sono le *normali ai fronti d'onda* e quindi la loro sovrapposizione sarà rappresentata da:

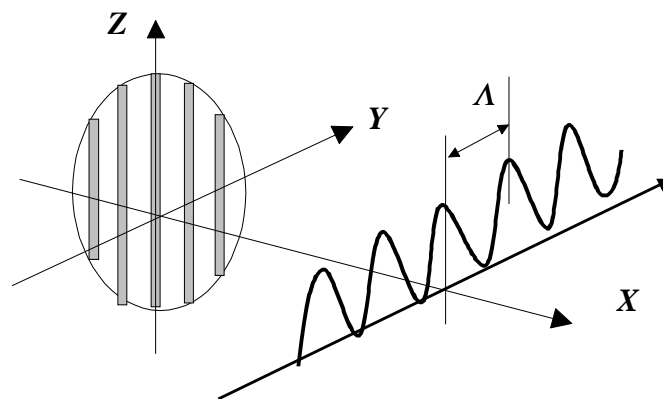
$$E(x, y, z, t) = A e^{ik\alpha x} (e^{-ik\beta y} + e^{ik\beta y}) e^{i\omega t} = 2A \cos(k\beta y) e^{ik\alpha x} e^{i\omega t}$$

α, β, γ ($\gamma = 0$) sono i coseni direttori.

In particolare l'intensità nel piano (x, y) o su qualunque piano ad esso parallelo nel volume di sovrapposizione, sarà del tipo:

$$I = 4A^2 \cos^2(k\beta y) \quad (4,14)$$

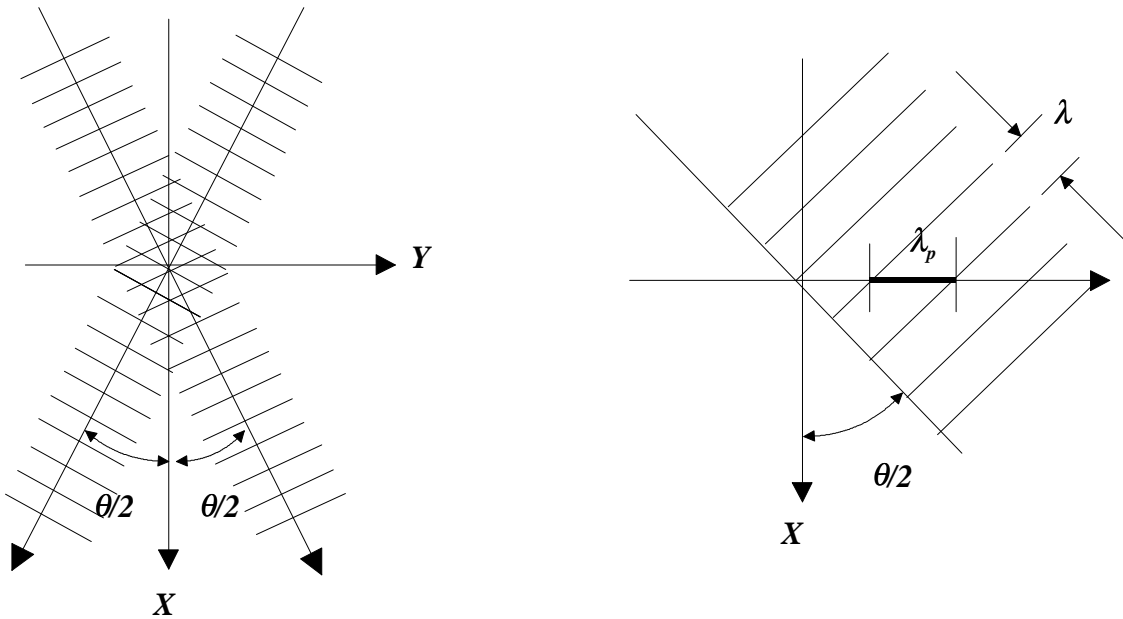
il cui andamento è mostrato in figura



Con riferimento alla figura, il cerchio rappresenta la traccia dell'onda e le striscie verticali rappresentano delle "lame di luce" la cui intensità è data dalla (4,14). Notiamo ancora come l'intensità abbia un andamento tipo \cos^2 .

Osserviamo che l'onda che si propaga nella direzione $+\theta/2$ rispetto all'asse X e il pattern di frange si osserva nel piano (Y,Z) . Quindi quella che ci interessa è la periodicità delle frange lungo Y . Se λ è la lunghezza d'onda, cioè la distanza tra due fronti d'onda della radiazione, si può vedere che la periodicità di tali frange, che è lungo l'asse Y , è data da

$$\lambda_p = \frac{\lambda}{\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$



e quindi la periodicità della funzione (4,14) è data da:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{2\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Questa è proprio la condizione che si deve osservare per essere sicuri di poter risolvere, sul supporto usato, il pattern di frange di interferenza. Questa sarà una condizione fondamentale nell'olografia