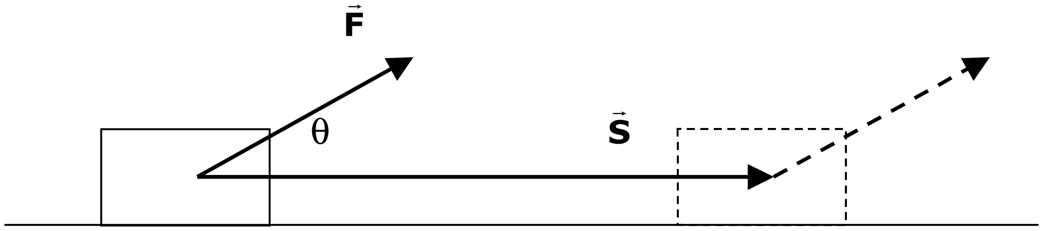
7 – LAVORO DI UNA FORZA

7,1 INTRODUZIONE

Una forza applicata ad un corpo gli fornisce una accelerazione $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{F}}/\mathbf{m}$ che ne cambia lo stato; se il corpo era in quiete esso si muoverà nella direzione e verso dell'accelerazione, se il corpo è in movimento con velocità $\vec{\mathbf{v}}_i$ potremo aver una variazione del modulo del velocità, dovuta alla componente di $\vec{\mathbf{F}}$ nella stessa direzione della velocità, mentre la componente perpendicolare produce una curvatura della traiettoria e il raggio di curvatura **r** nel punto in cui si trova istantaneamente il punto soddisfa $\mathbf{r} = \mathbf{v_i}^2/\mathbf{a_c}$ (dove $\mathbf{a_c}$ è la componente dell'accelerazione perpendicolare a $\mathbf{v_i}$).

7,2 LAVORO DI UNA FORZA COSTANTE

L'effetto di una forza applicata ad un corpo può essere visto anche in altro modo. Per semplicità consideriamo il caso di un corpo di massa **m** **inizialmente in quiete** sopra un piano (estenderemo poi le conclusioni al caso generale). Applichiamo una **forza costante** $\vec{\mathbf{F}}$ che forma un angolo θ con l'orizzontale. Il corpo si muoverà di moto rettilineo nella direzione e verso della componente di $\vec{\mathbf{F}}$ parallela al piano (la componente perpendicolare al piano e la forza peso si equilibrano). **L'effetto di una forza** è quello di imprimere una accelerazione e quindi produrre una variazione di velocità da un valore $\vec{\mathbf{v}}_i$ ad un valore $\vec{\mathbf{v}}_f$ dopo un certo tempo $\Delta \mathbf{t}$ o che, è la stessa cosa, quando la massa ha compiuto uno spostamento $\vec{\mathbf{S}}$



E' evidente che l'effetto della forza, cioè la velocità finale $\vec{v}_f$,dipenderà oltre che dal modulo di $\vec{F}$ anche dall'angolo θ dallo spostamento $\vec{S}$

Teniamo conto di tutto ciò andando a valutare una grandezza fisica, che si chiama **LAVORO DI UNA FORZA ,** e che è definita da:

$$\boxed{L = \vec{F} \cdot \vec{S}}$$

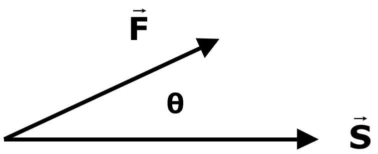
cioè definiamo **Lavoro di una forza costante** una nuova grandezza espressa dal **prodotto scalare del vettore forza per il vettore spostamento**.

Le dimensioni della grandezza fisica Lavoro sono:

$$[\mathbf{L}] = [\mathbf{m}] \cdot [\mathbf{l}^2] \cdot [\mathbf{t}^{-2}]$$

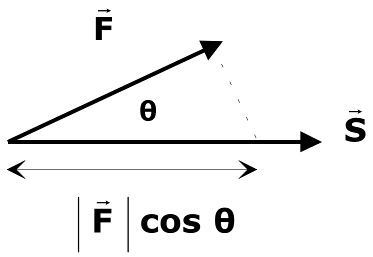
l'unità di misura nel sistema internazionale è il **Joule** il cui simbolo è **J .**
1 J = 1 Kg. 1 m^2 / s^2.

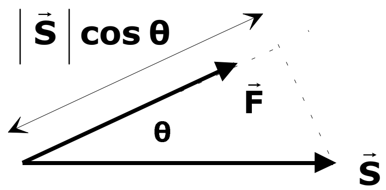
Il **lavoro di una forza (costante)** può essere visto come il prodotto del modulo di uno dei due vettori per la proiezione dell'altro sul primo (o sul suo prolungamento), cioè:



$\vec{F}$ costante su tutto lo spostamento $\vec{S}$

$$L = \vec{F} \cdot \vec{S} = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cos\theta$$





OSSERVAZIONI

a) il **lavoro** è una **grandezza scalare** e può essere:

> 0 quando i vettori **Forza** e **Spostamento** hanno componenti parallele **concordi** : (si dice che la Forza **compie lavoro positivo** sulla massa e vedremo che questo si manifesterà con un **aumento** di quella che si definisce **Energia cinetica**)

< 0 quando i vettori **Forza** e **Spostamento** hanno componenti parallele **opposte** : (si dice che la Forza **compie lavoro negativo** sulla massa e vedremo che questo si manifesterà con una **diminuzione** dell'**Energia cinetica**);

= 0 quando i vettori **Forza** e **Spostamento** sono **perpendicolari**.

b) Il lavoro non ha nulla a che fare con l'idea che si ha comunemente di lavoro. Per esempio per sostenere un peso facciamo un lavoro fisiologico, ma dal punto di vista fisico il lavoro è nullo

c) Mentre il modulo e la direzione di $\vec{\mathbf{F}}$ non dipendono dal sistema di riferimento **inerziale** scelto per studiare il moto, lo stesso non si può dire per il vettore spostamento.

Per illustrare meglio questa ultima osservazione, consideriamo il caso più semplice di due osservatori, uno in quiete e uno su un vagone che si muove di moto rettilineo e uniforme rispetto al primo con velocità $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{tra}}$. Entrambi studiano il moto (rettilineo) di una cassa sopra il vagone e costituiscono un sistema di riferimento inerziale.

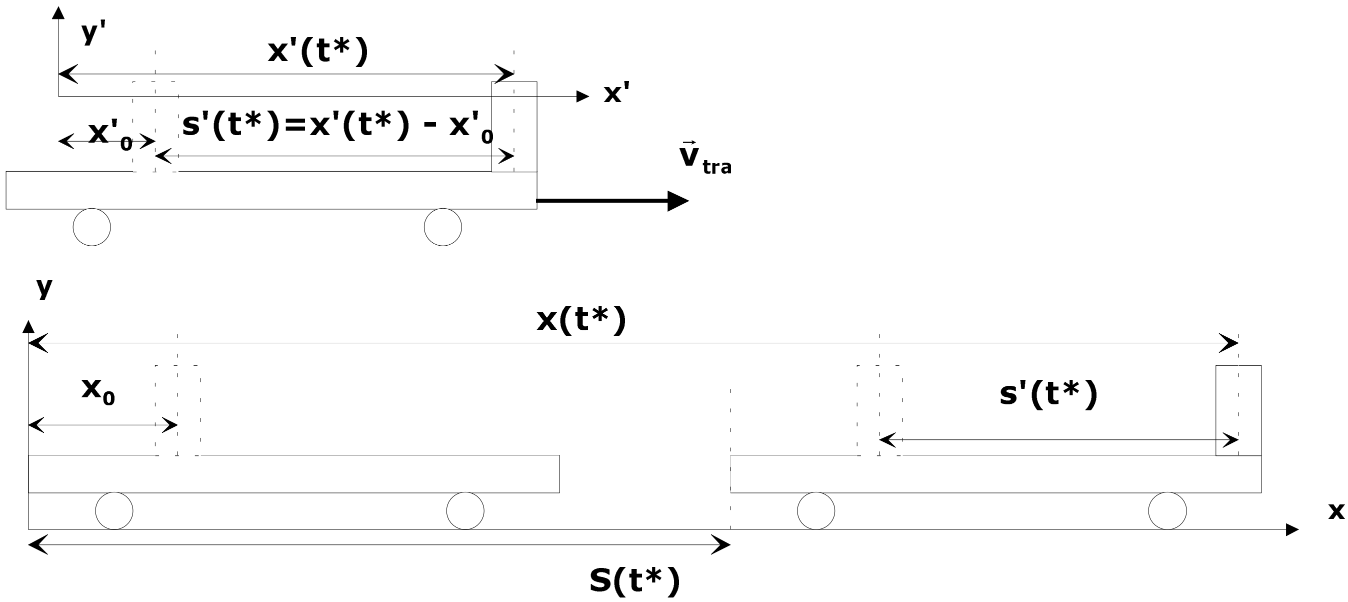
Indichiamo con **s'(t)** lo spostamento della cassa rispetto all'osservatore **O'** solidale con il vagone e con **S(t)** lo spostamento visto dall'osservatore fisso **O**. Supponiamo per semplicità che i due osservatori utilizzino lo stesso orologio.

Ricordiamo anche che lo spostamento, essendo un moto rettilineo e avendo scelto come asse x la direzione del moto, in generale sarà dato da:

$$\vec{\mathbf{s}}(\mathbf{t}) = \left[\, \mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}(\mathbf{t_0}) \right] \cdot \vec{\mathbf{i}}$$

per cui possiamo considerare solo i moduli degli spostamenti.

Valutiamo il modulo degli spostamenti visti da O e O′ ad un certo istante t = t*



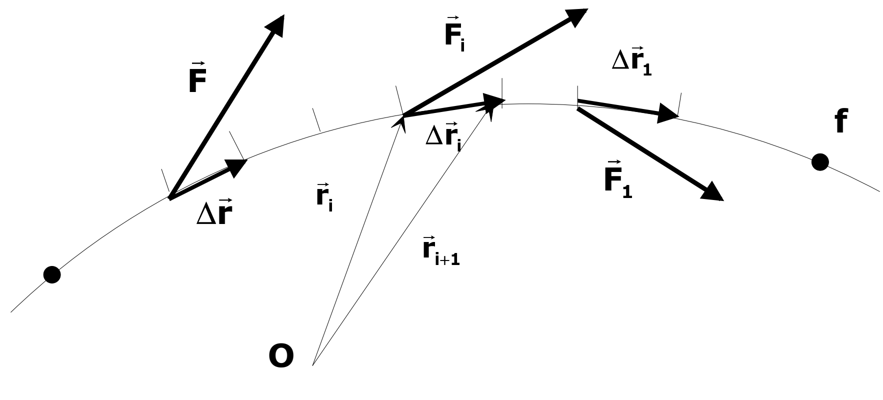
Indichiamo con **x(t*)** la posizione della cassa al tempo **t=t*** e con $\mathbf{x_0}$ la posizione della cassa al tempo **t=0**, rispetto all'osservatore **O**. Indichiamo con **x'(t*)** la posizione della cassa al tempo **t=t*** e con $\mathbf{x'_0}$ la posizione della cassa al tempo **t=0**, rispetto all'osservatore in moto **O'**.

Come si può osservare dalla figura, se per **O'** la cassa si sposta di tratto **s'(t*)**, per l'osservatore in quiete **O**, lo spostamento sarà dato dallo spostamento **s'(t*)** sul vagone più lo spostamento del vagone **S(t*)** avvenuto nel frattempo. Quindi due osservatori inerziali possono in generale trovare **valore del lavoro differenti** e addirittura per uno potrebbe essere positivo mentre per l'altro negativo.

7,3 LAVORO DI UNA FORZA; DEFINIZIONE GENERALE

Abbiamo definito il lavoro nel caso particolare di una **forza costante** per tutto lo spostamento . Vediamo adesso di definire il lavoro in maniera del tutto generale, cioè nel caso di una **forza qualsiasi** applicata ad una massa che si sposta da una posizione iniziale **i** ad una posizione finale **f** su una **traiettoria generica** nel piano (o nello spazio). Il vettore forza $\vec{\mathbf{F}}$ può variare sia in modulo che direzione e verso e quindi in generale la forza $\vec{\mathbf{F}}$ sarà una funzione del punto, cioè $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}(\mathbf{P})$. E' da osservare che $\vec{\mathbf{F}}$ potrebbe essere **solo una** delle forze applicate alla massa. La traiettoria e le modalità di percorrenza sono invece dovute alla risultante di tutte le forze. Per il principio di sovrapposizione, le considerazioni che seguono le possiamo applicare separatamente ad ogni forza.

Vogliamo calcolare il lavoro di $\vec{\mathbf{F}}$ quando la massa si sposta dalla posizione i alla posizione f.



Suddividiamo lo spostamento totale in intervalli rettilinei $\Delta\vec{\mathbf{r}}_i$ sufficientemente piccoli in modo che in ciascuno di essi la $\vec{\mathbf{F}}_i(\mathbf{P})$ si possa considerare costante. Per **ciascun spostamento** $\Delta\mathbf{r}_i$ vale la definizione di **lavoro** data nel caso **di forza costante**. Per ciascun spostamento $\Delta\vec{\mathbf{r}}_i$ si avrà un contributo al lavoro totale dato da:

$$\Delta \mathbf{L}_i = \vec{\mathbf{F}}_i(\mathbf{P}) \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}_i$$

e quindi calcolare la sommatoria di tutti i contributi. Questo equivale ad approssimare la traiettoria con la linea segmentata costituita di vari spostamenti $\Delta\vec{\mathbf{r}}_i$ e considerare il contributo di ogni singolo spostamento con forza costante per cui:

$$\mathbf{L}_{\vec{F}} = \sum \Delta \mathbf{L}_i$$

Questa operazione di approssimazione è tanto più vera quanto più sono piccoli gli spostamenti $\Delta\vec{\mathbf{r}}_i$. Se indichiamo con $\mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}$ lo **spostamento infinitesimo** lungo la traiettoria (che risulta essere tangente alla traiettoria punto per punto) a cui tende lo spostamento $\Delta\vec{\mathbf{r}}_i$, possiamo definire

$$\mathbf{dL} = \vec{\mathbf{F}}(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}$$

come il **lavoro** (infinitesimo) dovuto allo spostamento $\mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}$ (infinitesimo), dove la forza nel generico punto $\vec{\mathbf{F}}(\mathbf{P})$ risulta costante per tutto lo spostamento .

Facendo l'estensione al limite anche alla sommatoria dei vari contributi, si ottiene quello che viene definito **integrale di linea**, cioè

$$\Delta\vec{\mathbf{r}}_i \quad \rightarrow \quad \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}_i \qquad\qquad \sum \quad \rightarrow \quad \int_{\mathbf{i}}^{\mathbf{f}}$$

In generale si definisce **LAVORO DI UNA FORZA** l'integrale di linea di

$$\vec{\mathbf{F}}(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}$$

che si esprime con

$$\boxed{\mathbf{L} = \int_{\mathbf{i}}^{\mathbf{f}} \mathbf{dL} = \int_{\mathbf{i}}^{\mathbf{f}} \vec{\mathbf{F}}(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}}$$

OSSERVAZIONI

1) Senza entrare nel merito della teoria degli integrali, il significato che dobbiamo dare ad una tale espressione è quello di una **somma** di contributi, ciascun dei quali è dato da un prodotto scalare tra due vettori. Per poter essere effettivamente valutato si devono esprimere i vettori in un sistema di riferimento spaziale fissato in modo da :

- **a) riscrivere i vettori in termini delle loro componenti** (in generale cartesiane trattandosi di moto traslatori) ;
- **b) valutare il prodotto scalare** in modo da ottenere due (o tre nel caso di moto nello spazio) relazioni scalari;
- **c) applicare le regole del calcolo integrale** di grandezze scalari.

2) E' opportuno anche ricordare che **l'integrale di linea** non è un comune integrale. Per poter essere calcolato, oltre alla procedura precedente, è necessario conoscere non solo la **funzione integranda F(P)** , ma anche il cammino di integrazione, cioè la **traiettoria** percorsa dal corpo in esame. (vedremo poi casi particolari in cui tale integrale non dipende dal particolare cammino percorso e cioè quando le forze in gioco sono **conservative**), in modo da poter individuare il vettore infinitesimo $\mathbf{d\vec{r}}$ e le sue componenti.

3) Il lavoro **non** è una grandezza vettoriale e inoltre in esso non compare esplicitamente il **tempo**. Cioè se le forze agenti **non** dipendono esplicitamente dal tempo e la traiettoria non varia col tempo, il **lavoro fatto** dalle forze quando la massa si sposta dalla posizione **i** alla posizione **f** è lo stesso **sia che avvenga in un tempo brevissimo sia che avvenga in un tempo lunghissimo** (vedremo che esiste una grandezza fisica legata al lavoro e al tempo in cui viene fatto e si chiama **POTENZA**) .

4) Per il principio di sovrapposizione e indipendenza delle Forze, se ad un corpo sono applicate più forze, **il lavoro della risultante delle forze è uguale alla somma dei lavoro delle singole forze**.

7,4 TEOREMA LAVORO - ENERGIA

Consideriamo adesso una massa a cui sono applicate più forze e vediamo di valutare il **Lavoro totale** compiuto su tale massa, che può essere pensato come somma dei lavori delle singole forze o come lavoro della risultante.

Dalla legge del moto:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

possiamo scrivere che il lavoro fatta da tale risultante quando la massa percorre un cammino dalla posizione **i** alla posizione **f** è dato da:

$$\int_i^f \sum \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_i^f m\, \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

Vediamo di analizzare il significato del secondo membro.

Essendo relazioni vettoriali, per poterle valutare le dobbiamo prima scomporre secondo un certo sistema di riferimento spaziale (per esempio supponendo che il moto avvenga in un piano sarà dato da un sistema di assi cartesiani). Possiamo scrivere quindi:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} \qquad\qquad d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j}$$

per cui il secondo integrale si scrive:

$$\int_i^f m\,(a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}) \cdot (dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j}) = m \int_i^f a_x\, dx + m \int_i^f a_y\, dy$$

analizziamo il termine: $\int_i^f a_x\, dx$

Ricordando la definizione di accelerazione e di velocità:

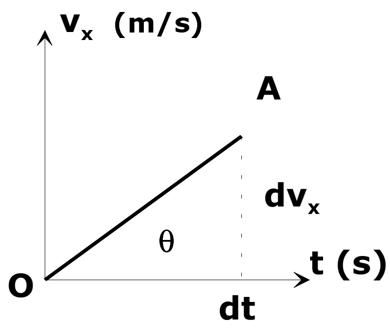
$$\mathbf{a_x} = \frac{\mathbf{dv_x}}{\mathbf{dt}} \quad ; \quad \mathbf{v_x} = \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{dx} = \mathbf{v_x\ dt}$$

(l'ultima espressione si giustifica ricordando il significato che abbiamo dato alla derivata e osservando che nell'intervallo **dt** il moto si può considerare uniforme), possiamo scrivere:

$$\int_i^f \mathbf{a_x\ dx} = \int_i^f \frac{\mathbf{dv_x}}{\mathbf{dt}}\ \mathbf{v_x\ dt}$$

Va ricordato come siamo giunti a definire il lavoro nella forma generale, cioè come una somma di contributi nei quali la forza, e quindi l'accelerazione e le sue componenti, si debbano ritenere costanti per tutto lo spostamento (che diciamo infinitesimo intendendo che debba essere sufficientemente piccolo affinchè sia valida tale ipotesi).

In questo caso possiamo allora dire che il termine $\frac{\mathbf{dv_x}}{\mathbf{dt}}$ che rappresenta la componente **x** dell'accelerazione, è costante per tutto lo spostamento **dx** , mentre proprio per la stessa ragione la $\mathbf{v_x}$ dovrà variare in maniera uniformemente accelerata e quindi sarà rappresentata da una retta nel piano $\mathbf{v_x}$**-t** con pendenza costante nell'intervallo di tempo **dt** come indicato in figura.



Possiamo scrivere:

$$\mathbf{dv_x = OA\ sen\theta} \qquad \mathbf{dt = OA\ cos\theta} \qquad \mathbf{dv_x/dt = tg\theta}$$

e quindi:

$$\int_i^f \frac{\mathbf{dv_x}}{\mathbf{dt}}\ \mathbf{v_x\ dt} = \int_i^f \mathbf{tg\,\theta\ v_x\ OA\ cos\theta} = \int_i^f \mathbf{v_x\ OA}\ \frac{\mathbf{sen\theta}}{\mathbf{cos\theta}}\ \mathbf{cos\theta} =$$

$$= \int_i^f v_x \, dv_x = \frac{1}{2} v_x^2 \Big|_{v_i}^{v_f} = \frac{1}{2} v_{x_f}^2 - \frac{1}{2} v_{x_i}^2$$

Ripetendo lo stesso procedimento anche per le altre componenti **y** (ed eventualmente z) possiamo scrivere:

$$\boxed{L_{Tot} = \int_i^f \sum \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m \, v_f^2 - \frac{1}{2} v_i^2}$$

La quantità :

$$\boxed{\frac{1}{2} m \, v^2}$$

si definisce **ENERGIA CINETICA** .

Il fatto che un corpo abbia una proprietà meccanica, la massa, e ad un certo istante si muova con una certa velocità, comporta che alla massa si possa associare un'altra proprietà meccanica (oltre alla quantità di moto), delle stesse dimensioni del lavoro, che quindi si misura in joule (J), che è appunto l'energia cinetica. Viceversa il fatto che una massa possegga una certa energia cinetica implica che certe forze che agiscono proprio sulle masse siano in grado di compiere lavoro.

Possiamo ora enunciare quello che si definisce **TEOREMA LAVORO ENERGIA:**

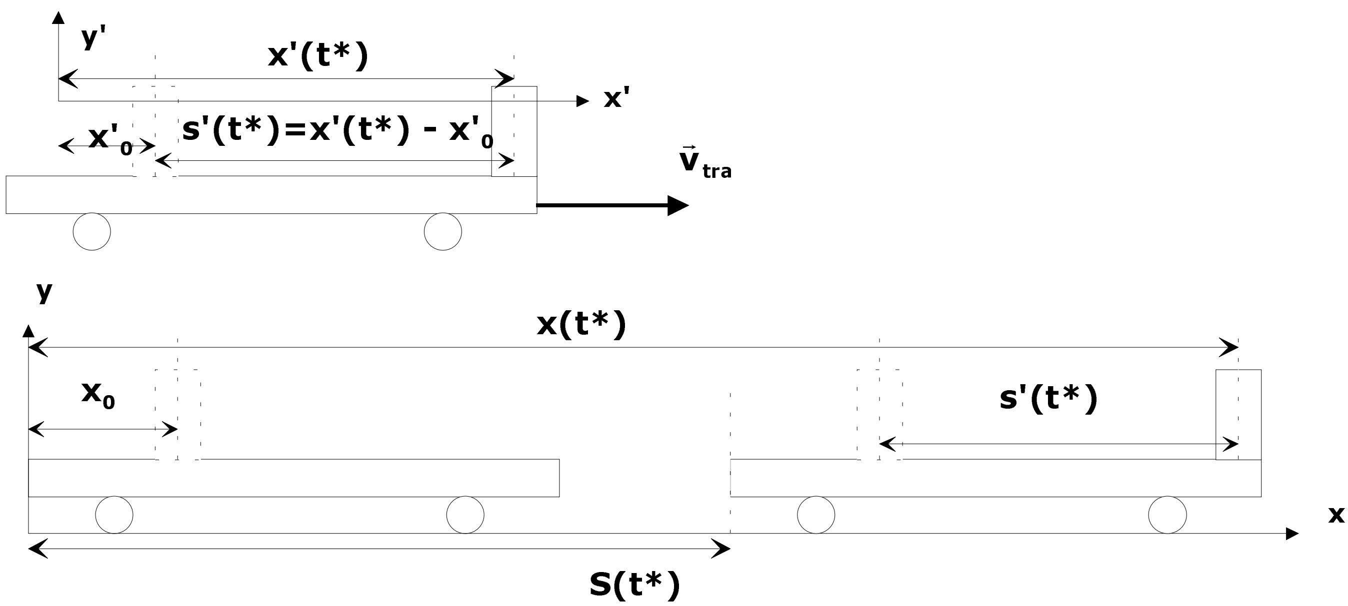
" il lavoro fatto dalla risultante delle forze applicate ad una massa (o la somma dei lavori delle singole forze applicate) è uguale alla variazione dell'energia cinetica della massa "

Il **Teorema Lavoro Energia** essendo derivato dalla legge del moto per essere valido **deve essere scritto in un sistema di riferimento inerziale**. Questa affermazione significa che se va a calcolare il lavoro di tutte le forze e separatamente per altra via si va a valutare la variazione di energia cinetica subita dalla massa, **le due quantità coincidono solo se siamo in un sistema di riferimento inerziale**.

L'espressione del Teorema Lavoro Energia ci permette di comprendere meglio il significato di lavoro positivo o negativo: **se una forza compie un lavoro positivo, l'energia cinetica della massa cui è applicata aumenta, viceversa se il lavoro è negativo essa diminuisce**.

Il Teorema Lavoro Energia è **invariante** per sistema di riferimento (inerziale), cioè ha la stessa forma anche cambiando sistema di riferimento (sempre però inerziale).

Per comprendere meglio questa ultima affermazione , facciamo riferimento all'esempi del moto delle cassa studiato dai due osservatori, uno fisso e uno in moto rettilineo e uniforme $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{tra}} = \mathbf{10}\,{}^{\mathbf{m}}\!/_{\mathbf{s}} \cdot \vec{\mathbf{i}}$. **I due sistemi sono inerziali**.



La cassa sul vagone ha massa **m = 10 Kg** e partendo da **ferma** viene spinta con una **forza costante** tale che all'istante **t=t* = 5 s**, dopo che la cassa si è spostata sul vagone di un tratto **Δx' = s'(t*)** ha una velocità, misurata dall'osservatore solidale con il vagone, pari a $\vec{\mathbf{v}}'(\mathbf{t}^*) = \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{rel}}(\mathbf{t}^*) = \mathbf{2}\,{}^{\mathbf{m}}\!/\!{}_{\mathbf{s}} \cdot \vec{\mathbf{i}}$ (indichiamo con l'apice le grandezze misurate dall'osservatore O' solidale con il vagone; saranno grandezze relative. Supponiamo che per entrambi gli osservatori l'istante t=0 coincida con lo stesso istante).

Valutiamo la variazione di Energia Cinetica che misurerà O', dopo 5 secondi .

$$\Delta\mathbf{K}' = \frac{1}{2}\mathbf{m}\,\mathbf{v}'^2_{\mathbf{f}} - \frac{1}{2}\mathbf{m}\,\mathbf{v}'^2_{\mathbf{i}} = \frac{1}{2}\mathbf{m}\,\mathbf{v}^2_{\mathbf{rel}}(\mathbf{t}^*) = \mathbf{0{,}5} \cdot \mathbf{10\,kg} \cdot \mathbf{4}\,({}^{\mathbf{m}}\!/\!{}_{\mathbf{s}})^2 = \mathbf{20\,J}$$

Valutiamo il Lavoro fatto dalla Forza che spinge la cassa e che misurerà O', dopo 5 secondi :

$$\mathbf{L}_{\vec{\mathbf{F}}'} = \vec{\mathbf{F}}' * \mathbf{s}'(\mathbf{t}^*) \cdot \vec{\mathbf{i}} = \mathbf{F}' \cdot \Delta\mathbf{x}' = \mathbf{m\,a}' \cdot \Delta\mathbf{x}'$$

Dobbiamo determinare **a'** e **Δx'**, tenendo conto che nel **sistema solidale con il vagone**, il moto della cassa **risulta rettilineo e uniformemente accelerato**, in quanto soggetto a forze costanti, per cui da sole relazioni cinematiche otteniamo:

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{v}'}{\mathbf{t}^*} = \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{rel}}(\mathbf{t}^*)}{\mathbf{t}^*} = \frac{\mathbf{2}\,{}^{\mathbf{m}}\!/\!{}_{\mathbf{s}}}{\mathbf{5\,s}} = \mathbf{0{,}4}\,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}^2}$$

e

$$\mathbf{x}'(\mathbf{t}^*) = \mathbf{x}'_{\mathbf{0}} + \mathbf{v}'_{\mathbf{0}} + \frac{1}{2}\mathbf{a}'(\mathbf{t}^*)^2$$

cioè

$$\Delta\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(\mathbf{t}^*) - \mathbf{x}'_{\mathbf{0}} = \mathbf{0{,}5} \cdot \mathbf{0{,}4}\,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}^2} \cdot \mathbf{25\,s}^2 = \mathbf{5m}$$

E' opportuno ricordare che l'accelerazione $\vec{a}'$ è dovuta alla forza esercitata sulla cassa che è indicata con $\vec{F}'$, se riferita all'osservatore solidale con il vagone, e con $\vec{F}$ se riferita all'osservatore fisso. Tuttavia in questo caso questa è solo una distinzione formale in questo entrambi gli osservatori sono inerziali e quindi vedranno le stesse forze, ma è per ricordarci che stiamo trattando il problema da due osservatori diversi

Le altre forze agenti sulla cassa, peso e reazione vincolare liscia, essendo **ortogonali allo spostamento non compiono lavoro**, quindi $L_{\vec{F}'}$ coincide anche con il lavoro totale calcolato da O': $(L_{ToT})_{O'}$, per cui

$$(L_{ToT})_{O'} = L_{\vec{P}} + L_{\vec{N}} + L_{\vec{F}'} = \vec{F}' \cdot \Delta x\, \vec{i} = m\, a' \cdot \Delta x = 10\, Kg \cdot 0{,}4\, m/s^2 \cdot 5m = 20\, J$$

Quindi O' constata che vale il Teorema lavoro Energia in quanto ha verificato che è proprio:

$$(L_{ToT})_{O'} = (\Delta K')$$

Facciamo adesso le stesse valutazioni dal punto di vista dell'osservatore fisso O. Il vagone si muove rispetto ad O con velocità costante, e quindi come già accennato forze applicate alla cassa e quindi l'accelerazione saranno le stesse per i due osservatore inerziale. Allora scriviamo ancora:

$$a = a' = 0{,}4\, \frac{m}{s^2}$$

Valutiamo la variazione di Energia Cinetica che misurerà O, dopo 5 secondi.

Dalle leggi di trasformazione dei moto relativi e tenendo conto che siamo in un caso di moto unidimensionale nel verso delle x positive avremo:

per $\mathbf{t = 0}$ $$\mathbf{v(0)} = \mathbf{v_{rel}(0)} + \mathbf{v_{tra}} = \mathbf{v_{tra}} = \mathbf{10}\ {}^{m}\!/_{s}$$

per $\mathbf{t = t^*}$ $$\mathbf{v(t^*)} = \mathbf{v_{rel}(t^*)} + \mathbf{v_{tra}} = \mathbf{v_{tra}} = \mathbf{2}\ {}^{m}\!/_{s} + \mathbf{10}\ {}^{m}\!/_{s} = \mathbf{12}\ {}^{m}\!/_{2}$$

Quindi :

$$\Delta\mathbf{K} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{mv_f^2} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{mv_i^2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{m}\left[\mathbf{v(t^*)^2} - \mathbf{v(o)^2}\right] = \mathbf{0{,}5} \cdot \mathbf{10Kg} \cdot \mathbf{44}({}^{m}\!/_{s})^{2} = \mathbf{220\ J}$$

Valutiamo il Lavoro fatto dalla Forza che spinge la cassa e che misurerà O dopo 5 secondi e che anche per O coincide con il lavoro totale:

$$(\mathbf{L_{ToT}})_{\mathbf{O}} = \mathbf{L_{\vec{F}}} = \vec{\mathbf{F}} * \mathbf{S(t^*)} \cdot \vec{\mathbf{i}} = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{x} = \mathbf{m\ a} \cdot \Delta\mathbf{x}$$

Dobbiamo determinare $\Delta\mathbf{x}$ visto da O, sempre tenendo conto che si tratta di un moto rettilineo con accelerazione costante. Sempre alle leggi di trasformazione dei moto relativi per moto unidimensionale $\mathbf{x_{ass}} = \mathbf{x_{rel}} + \mathbf{x_{tra}}$ avremo:

$$\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{x_{rel}} + \Delta\mathbf{x_{tra}} = \Delta\mathbf{x'} + \mathbf{v_{tra}t^*} = \mathbf{5m} + \mathbf{10}\ {}^{m}\!/_{s} \cdot \mathbf{5s} = \mathbf{55\ m}$$

e quindi:

$$(\mathbf{L_{ToT}})_{\mathbf{O}} = \mathbf{L_{\vec{F}}} = \mathbf{m\ a} \cdot \Delta\mathbf{x} = \mathbf{10Kg} \cdot \mathbf{0{,}4}\ {}^{m}\!/_{s^2} \cdot \mathbf{55m} = \mathbf{220\ J}$$

Anche O constata che vale il Teorema lavoro Energia in quanto ha verificato che

$$(\mathbf{L_{ToT}})_{\mathbf{O}} = \Delta\mathbf{K}$$

In conclusione i due osservatori inerziali, pur trovando valori differenti per i lavori delle forze applicate, trovano anche che i lavori da loro calcolati sono uguali alle corrispondenti variazioni di Energia Cinetica

7,5 <u>POTENZA DI UNA FORZA</u>

Se le forze agenti su un corpo non dipendono esplicitamente dal tempo, a parità di spostamento il lavoro non cambia se compiuto in un tempo brevissimo o in un tempo lunghissimo. Tuttavia è abbastanza intuitivo che la capacità di compiere un lavoro in un tempo breve o lungo può essere una **caratteristica** del sistema di forze applicate. Questa e espressa da ciò che chiamiamo **Potenza** di una forza.

Definiamo Potenza media, che si indica convenzionalmente con $\overline{\mathbf{P}}$, il rapporto tra il **lavoro** fatto da un sistema di forze in un certo intervallo di tempo Δt e il **tempo Δt** impiegato, cioè:

$$\overline{\mathbf{P}} = \frac{\Delta \mathbf{L}}{\Delta \mathbf{t}}$$

La **potenza media è una grandezza scalare**.

Se si considerano intervalli di tempo sempre più piccoli, la **potenza media** tende a quella che viene chiamata semplicemente **potenza** (istantanea), che esprime con quanta rapidità una forza di compiere lavoro e che si indica con **P**, definita da

$$\boxed{\mathbf{P} = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{\mathbf{P}} = \frac{\mathbf{dL}}{\mathbf{dt}}}$$

cioè la **derivata del lavoro** e che può anche essere interpretato come il rapporto tra il lavoro (infinitesimo) **dL** compiuto dalle forze nell'intervallo di tempo **dt** e l'intervallo di tempo stesso.

Un'espressione alternativa e più immediatamente interpretabile della potenza può essere ricavata in termini della **forza** che compie il lavoro e la **velocità** del corpo soggetto alla forza.

Dalla definizione di potenza media e di lavoro nella forma $\Delta\mathbf{L} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}$ possiamo scrivere:

$$\overline{\mathbf{P}} = \frac{\Delta\mathbf{L}}{\Delta\mathbf{t}} = \frac{\vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta\mathbf{t}} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta\mathbf{t}}$$

in quanto la $\vec{\mathbf{F}}$ si considera costante durante lo spostamento $\Delta\vec{\mathbf{r}}$.

Quindi al limite di $\Delta\mathbf{t} \to \mathbf{0}$ il rapporto $\frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta\mathbf{t}} \to \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}}{\mathbf{dt}} = \vec{\mathbf{v}}$ per cui possiamo definire la **potenza** (istantanea) **P** come:

$$\boxed{\mathbf{P} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}$$

La dimensione delle potenza è data da:

$$[\mathbf{W}] = [\mathbf{L}] \cdot [\mathbf{t}^{-1}] = [\mathbf{m}] \cdot [\mathbf{l}^2] \cdot [\mathbf{t}^{-3}]$$

Nel sistema Internazionale la potenza si misura in **Watt** (**W**), cioè $\mathbf{1\ W = 1\ J / sec}$.

Dalla definizione di **potenza**, si intuisce che l'Energia, che ha la stessa dimensione del lavoro, può essere espressa anche in **Watt · sec**

Talvolta,soprattutto nelle unità elettriche, l'**Energia** viene espressa in **kW · h** (kilowatt-ora). Per passare al Sistema Internazionale si utilizza la relazione:

$$\mathbf{1Kw \cdot h = 10^3 W \cdot 3{,}6\ 10^3\ sec = 3{,}6\ 10^6\ J}$$