8 – LAVORO ED ENERGIA

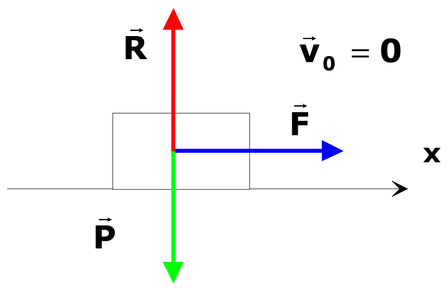
8,1 INTRODUZIONE

Un corpo o più correttamente un sistema possiede delle proprietà di diversa natura per esempio meccanica (massa), elettrica (carica), termica (temperatura), chimica (struttura) ecc. Tali proprietà sono proprie del sistema, ma sono messe in evidenza solo se sollecitate in maniera opportuna. Per esempio il campo gravitazionale evidenzia il fatto che un corpo abbia una massa attraendola ma non per esempio una carica o una certa temperatura e analogamente si potrebbero fare esempi per altri casi. l fatto di possedere proprietà di natura diversa mi permette di dire che il sistema può presentare **diverse forme di ENERGIA** ; sarà poi il contesto in cui sto esaminandi il sistema (meccanico se voglio studiarne il moto, termodinamico se voglio studiare i suoi scambi di calore con l'esterno ecc..) che mi permetterà di specificare quale forma di energia prendere in considerazione.

8,2 TRASFORMAZIONE DELL' ENERGIA

Non solo, ma in uno **stesso contesto**, meccanico, termodinamico ecc. **possono esistere diverse forme di energia legate al particolare stato**, meccanico (posizione, velocità), termodinamici ecc. Per esempio l'Energia Cinetica è una prima forma di Energia legata al fatto che una massa possieda ad un certo istante una certa velocità. Il teorema Lavoro-Energia ci dice poi che questa forma di Energia può variare, aumentare se la forza risultante che agisce sul corpo compie un lavoro positivo, diminuire se compie un lavoro negativo. Allora sorge la domanda: **dove prende o dove finisce l'energia**?

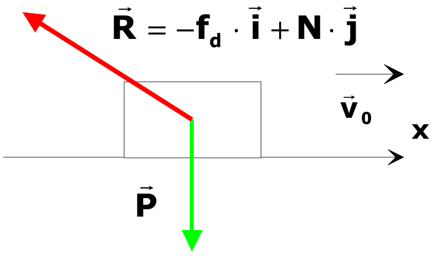
Consideriamo il caso di un corpo di massa m che si muove su un piano liscio, dove abbiamo fissato come verso positivo dell'asse **x** il verso del moto. In questo caso $\mathbf{L}_{\vec{P}} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{L}_{\mathbf{N}} = \mathbf{0}$ perché ortogonali allo spostamento.



$\vec{F}$ farà muovere il corpo nel verso in cui essa è diretta e quindi $L_{\vec{F}}$ è positivo perché $\vec{F}$ è concorde al moto e quindi $L_{\vec{F}}$ **fornisce Energia cinetica.**

Vediamo invece il seguente caso

Il corpo di massa m che all'istante iniziale t_0 ha una certa velocità $\vec{v}_0$ viene a contatto con una superficie scabra, fino a che si ferma. Anche in questo caso $L_{\vec{P}} = 0$ e $L_N = 0$ perché ortogonali allo spostamento



Invece L_{f_d} risulterà negativo perché f_d antiparallelo al moto. Il corpo si ferma e perde tutta la sua Energia Cinetica. Possiamo allora dire che L_{f_d} ,compiendo lavoro negativo, **sottrae** Energia Cinetica. Facendo osservazioni di altro tipo potrei accorgermi per esempio che però il corpo si è scaldato. **Ha allora acquistato un'altra forma di Energia non più meccanica ma Termica**.

Possiamo allora concludere che:

"**In meccanica un lavoro positivo comporta sempre un aumento di Energia Cinetica, mentre un lavoro negativo comporta sempre una trasformazione di Energia da una forma ad un'altra** "

Se la trasformazione dell'Energia avviene da una forma ad un'altra,ma sempre nello stesso ambito, cioè da una forma di energia meccanica per esempio legata alla velocità in un'altra sempre meccanica, per esempio legata alla posizione, diciamo che l'**Energia Meccanica si conserva**

In generale quando in fisica si dice che " una grandezza " si **conserva**, si intende che il suo valore non cambia nel tempo. Cioè il suo valore ad un qualunque istante è lo stesso di quello che aveva all'istante iniziale o finale e in tutti gli istanti intermedi che si considerano.

In particolare **nel caso dell'Energia** dire che **l'Energia si conserva significa che non varia la sua quantità totale espressa in Joule, ma**

durante l'evoluzione del sistema può distribuirsi in maniera differente tra le varie forme di Energia, **ma nello stesso ambito**. Questa affermazione non vale solo per l'Energia Meccanica ma anche ma anche per te altre varie forme, Termodinamica, Elettrica, Chimica ecc.

Se invece la trasformazione avviene tra una forma, per esempio Meccanica in una forma Termodinamica (per attrito) o per esempio da Chimica da Elettrica (pila) diciamo che **l'Energia non si conserva**. **Con questo si intende che parte dell'energia del corpo o sistema** **si è trasformata in una forma non più utilizzabile in quell'ambito**.

Se per un corpo o sistema consideriamo **L'Energia nel suo complesso** sotto tutte le possibili forme, possiamo dire che

" **l'Energia complessiva si conserva sempre; può solo trasformarsi ma non distruggersi**. "

Facciamo ora un'altra considerazione. In generale ad un corpo o ad sistema sono sempre applicate più forze e il moto dipende dall'azione combinata di tali forze; il moto del corpo avviene in un certo verso e quindi alcune forze tendono a favorirlo, mentre altre tendono ad ostacolarlo. Ciascuna, però, considerata separatamente tenderebbe a far muovere il corpo nel verso in cui è diretta e quindi farebbe un lavoro positivo fornendo a quella massa una certa Energia Cinetica. Allora una **forza può compiere un lavoro negativo** e quindi far diminuire l'energia nella forma di Energia Cinetica, **solo se il sistema possedeva già** una certa quantità di Energia sotto una qualunque forma meccanica **o se è presente un'altra forza che compie un lavoro positivo** tale da fornirgli tale Energia spendibile.

Va anche osservato che se una forza compie un lavoro che è per esempio positivo per il corpo in esame, la forza di reazione, che il corpo esercita su chi interagisce con lui fornendogli tale forza, compirà un lavoro che è negativo per il sistema interagente e viceversa. Per chiarire meglio prendiamo ad esempio l'attrito. Compie un lavoro negativo sul corpo, sottraendogli Energia Cinetica, ma la reazione ad esso compie un lavoro positivo sul piano di appoggio fornendogli energia termica.

8,3 FORZE CONSERVATIVE

Esaminiamo alcuni semplici esempi.

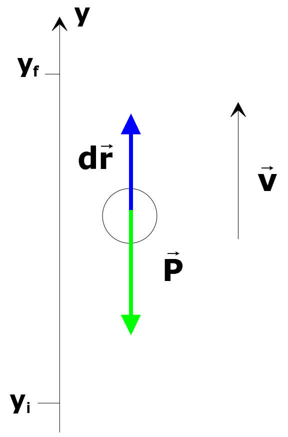
Lavoro della forza Peso

1° Esempio.

Lanciamo un corpo di massa **m** verso l'alto e andiamo a calcolare il **lavoro della Forza Peso** quando il corpo passa da una posizione **i** a quota che indichiamo con $\mathbf{v_{yi}}$, alla posizione **f** a quota $\mathbf{v_{yf}}$. Dobbiamo calcolare:

$$\int_i^f \vec{P} \cdot d\vec{r}$$

Fissiamo un sistema di riferimento come in figura con asse y positivo verso l'alto (verso del moto). Possiamo scrivere:



$$\vec{P} = -mg \cdot \vec{j} \qquad d\vec{r} = dy \cdot \vec{j}$$

quindi

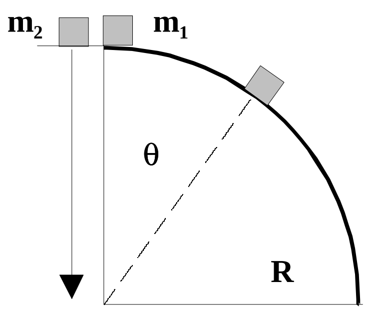
$$L_{\vec{P}} = \int_i^f (-mg \cdot \vec{j}) \cdot (dy \cdot \vec{j}) = \int_{y_i}^{y_f} -mg\, dy = -mg \int_{y_i}^{y_f} dy =$$

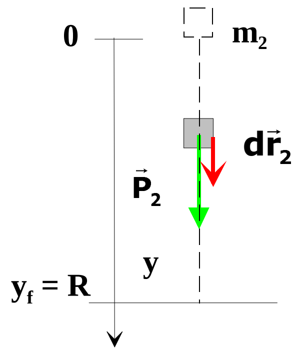
$$= -mg\,(y_f - y_i) = -mg\,\Delta y$$

Osserviamo che $L_{\vec{P}} < 0$, il che è coerente con il fatto che salendo il corpo perde velocità e quindi $\Delta K < 0$

2° Esempio.

Due corpi identici di massa $\mathbf{m_1}$ e $\mathbf{m_2}$ cadono al suolo partendo da una quota **R**. Mentre $\mathbf{m_1}$ scivola lungo un profilo curvo privo di attrito, $\mathbf{m_2}$ cade liberamente lungo la verticale. Valutiamo il lavoro fatto dalla forza peso applicate alle due masse.



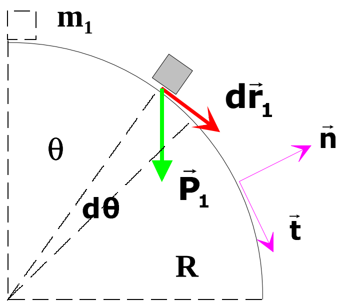


Per quanto riguarda la massa $\mathbf{m_2}$, il moto è quello di caduta libera. Fissiamo un sistema di riferimento con verso concorde con il moto. Possiamo scrivere:

$$\vec{P}_2 = mg \cdot \vec{j} \qquad d\vec{r}_2 = dy \cdot \vec{j} \qquad \text{per cui:}$$

$$L_{\vec{P}_2} = \int_i^f (m_2 g \cdot \vec{j}) \cdot (dy\,_{.}2\vec{j}) = \int_{y_i}^{y_f} mg\, dy = m_2 g \int_0^R dy =$$

$$= m_2 g\,(y_f - y_i) = m_2 g\, R$$



Consideriamo adesso la massa $\mathbf{m_1}$. Essendo la traiettoria curvilinea è più conveniente fissare un sistema di riferimento intrinseco e considerare istante per istante le componenti **tangenziale** e **normale** alla traiettoria applicati al corpo.

In un punto generico del profilo la posizione della massa sarà individuata dall'angolo θ rispetto rispetto alla verticale.

Dalla figura possiamo scrivere:

$$\vec{P}_1 = -\, m_1 g\, \mathrm{sen}\theta \cdot \vec{t} + m_1 g \cos\theta \cdot \vec{n} \qquad d\vec{r}_2 = R\, d\theta \cdot \vec{t}$$

per cui:

$$L_{\vec{P}_1} = \int_i^f (-m_1 g\, \mathrm{sen}\theta \cdot \vec{t} + m_1 g \cos\theta \cdot \vec{n}) \cdot (R\, d\theta \cdot \vec{t}) = \int_0^{\pi/2} m_1 g\, \mathrm{sen}\theta\, R\, d\theta =$$

$$= m_1 g\, R \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}\theta \;\; d\theta = m_1 g\, R\, [-\cos\theta]_0^{\pi/2} = m_1 g\, R$$

Quindi poiché le masse sono identiche il lavoro della forza peso è identico nei due casi e quindi possiamo concludere che:

" **il lavoro delle forza peso non dipende dal cammino percorso ma solo dalla posizione finale a da quella iniziale** "

Le forze per le quali il lavoro per passare da una posizione **i** ad una posizione **f** non dipende dal reale cammino percorso, ma solo dalle due posizioni iniziale e finale, si dicono **forze conservative**.

8,4 <u>ENERGIA POTENZIALE</u>

Vediamo di comprendere meglio queste affermazioni e capire **che cosa si conserva**.

Energia Potenziale Gravitazionale

Ritorniamo al primo esempio della massa m che sale verso l'alto. Indichiamo con $\vec{\mathbf{v}}_i$ la velocità nel punto di quota $\mathbf{y_i}$ e con $\vec{\mathbf{v}}_f$ la velocità nel punto di quota $\mathbf{y_f}$. Quando il corpo sale dalla posizione **i** alla posizione **f** , fissando il verso positivo dell'asse y nel verso del moto, abbiamo trovato:

$$\mathbf{L}_{\vec{P}}^{i\to f} = \int_i^f (-\mathbf{mg}\cdot\vec{\mathbf{j}})\cdot(\mathbf{dy}\cdot\vec{\mathbf{j}}) = \int_{y_i}^{y_f} -\mathbf{mg\,dy} = \mathbf{mg\,(y_i - y_f)}$$

Inoltre per il teorema energia possiamo scrivere:

$$\mathbf{L}_{Tot} = \frac{1}{2}\mathbf{mv_f^2} - \frac{1}{2}\mathbf{mv_i^2}$$

e poiché $\mathbf{L}_{Tot} = \mathbf{L}_{\vec{P}}^{i\to f}$ avremo:

$$\frac{1}{2}\mathbf{mv_f^2} - \frac{1}{2}\mathbf{mv_i^2} = \mathbf{mg\,y_i - mg\,y_f}$$

che possiamo scrivere:

$$\boxed{\frac{1}{2}\mathbf{mv_f^2} + \mathbf{mgy_f} = \frac{1}{2}\mathbf{mv_i^2} + \mathbf{mg\,y_i}}$$

Tutti i termini hanno le dimensioni di un lavoro, quindi di una energia e si misurano in Joule

La relazione si può leggere nel modo seguente: " **la quantità** $\frac{1}{2}\mathbf{mv^2} + \mathbf{mgy}$ **calcolata nella posizione finale f , e cioè al tempo t_f , è uguale alla**

stessa quantità calcolata nella posizione iniziale i, cioè al tempo t_i , cioè questa quantità si conserva nel tempo ". La quantità:

$$\boxed{U = mgy}$$

si definisce **Energia potenziale gravitazionale** e come si vede dipende solo dalla posizione. **Tale quantità è sempre definita a meno di una costante che dipende da dove viene fissato il valore 0 per la y**.

Per poter definire l'energia potenziale gravitazionale si deve sempre fissare la posizione a cui si attribuisce il valore di riferimento zero.

Si **definisce Energia meccanica di un sistema, quando si trova in un dato stato, la somma dell'Energia Potenziale U e dell'Energia Cinetica K** , cioè:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy}$$

Solo nell'esempio considerato possiamo dire che si **conserva l'energia meccanica**. Ciò significa che ad ogni diminuzione (o aumento) dell'energia cinetica, si ha un uguale aumento (o diminuzione) di energia potenziale.

Più in generale **è sempre vero** che il **lavoro della forza peso trasforma** energia potenziale in energia cinetica, e il lavoro di $\vec{P}$ risulta positivo, mentre trasforma energia cinetica in potenziale e il lavoro risulta negativo, ma non necessariamente la loro somma istante per istante rimane costante. Ciò accade per esempio se siamo in presenza di altre forze non conservative , come l'attrito.

Nel caso considerato la forza peso è l'unica forza agente sul corpo, quindi possiamo scrivere le relazioni:

$$\Delta \mathbf{E} = \Delta \mathbf{K} + \Delta \mathbf{U} = \mathbf{0} \qquad\qquad \Delta \mathbf{K} = \int_i^f \vec{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}$$

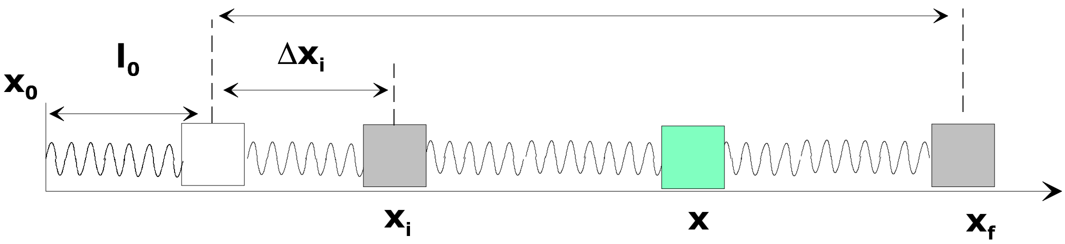
dalle quali possiamo allora definire la differenza di energia potenziale gravitazionale come:

$$\mathbf{U}_f - \mathbf{U}_i = -\int_i^f \vec{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}} \qquad \text{oppure} \qquad \mathbf{U}_i - \mathbf{U}_f = \int_i^f \vec{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}$$

Si può osservare che se $\mathbf{U_i} > \mathbf{U_f}$ il lavoro risulta positivo e quindi aumenta l'energia cinetica. Ovvio il caso in cui $\mathbf{U_i} < \mathbf{U_f}$

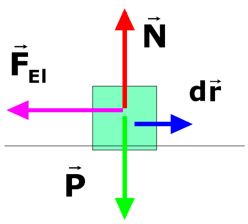
Energia Potenziale Elastica

Consideriamo un sistema costituito da una massa **m** collegata ad una molla ideale, di lunghezza a riposo $\mathbf{l_0}$ e costante elastica **k**, fissata ad un punto fisso **O**, scelto come origine degli assi, che può muoversi sopra un piano liscio.



Fissiamo il sistema di riferimento in modo che la posizione della massa all'istante **t=0** , $\mathbf{x_0}$, sia quella per cui la molla ha lunghezza pari alla lunghezza a riposo della molla, $\mathbf{l_0}$.

Applicando una forza esterna allontaniamo la massa dalla posizione di riposo e valutiamo il lavoro della forza elastica quando la massa si muove dalla posizione $\mathbf{x_i}$,alla posizione $\mathbf{x_f}$. Indichiamo le forze applicate alla massa quando si trova in una posizione generica **x**



Valutiamo il lavoro della forza elastica $\vec{\mathbf{F}}_{el}$ quando la massa passa dalla posizione $\mathbf{x_i}$ alla posizione $\mathbf{x_f}$. Osserviamo anche che $\vec{\mathbf{P}}$ ed $\vec{\mathbf{N}}$ non compiono lavoro in quanto sempre ortogonali allo spostamento.

Possiamo anche indicare l'allungamento generico della molla $\Delta \mathbf{l} = (\mathbf{l} - \mathbf{l_0})$ con $\Delta \mathbf{x} = (\mathbf{x} - \mathbf{x_0})$. Allora durante il movimento la forza elastica di richiamo $\vec{\mathbf{F}}_{el}$ e lo spostamento infinitesimo $\mathbf{d\vec{r}}$ saranno espresse da:

$$\vec{\mathbf{F}}_{el} = -\mathbf{k}\Delta\mathbf{l} \cdot \vec{\mathbf{i}} = -\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) \cdot \vec{\mathbf{i}} \qquad\qquad \mathbf{d\vec{r}} = \mathbf{dy} \cdot \vec{\mathbf{j}}$$

Il lavoro per passare dalla posizione iniziale **i** alla posizione **f** sarà:

$$\mathbf{L}_{El}^{i\to f} = \int_i^f \vec{\mathbf{F}}_{El} \cdot \mathbf{d\vec{r}} = \int_i^i \left[-\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) \cdot \vec{\mathbf{i}}\right] \cdot \mathbf{dy} \cdot \vec{\mathbf{i}} = \int_i^f -\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})\,\mathbf{dx} =$$

$$= -\mathbf{k}\left[\int_{x_i}^{x_f} \mathbf{x}\,\mathbf{dx} - \int_{x_i}^{x_f} \mathbf{x_0 dx}\right] = -\frac{1}{2}\mathbf{k}(\mathbf{x}_f^2 - \mathbf{x}_i^2) + \mathbf{k x_0}(\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_i)$$

poiché dalla prima figura possiamo vedere che

$$\mathbf{x}_f = \mathbf{x_0} + \Delta\mathbf{x}_f \qquad\qquad \mathbf{x}_i = \mathbf{x_0} + \Delta\mathbf{x}_i$$

avremo:

$$\mathbf{L}_{El}^{i\to f} = -\frac{1}{2}\mathbf{k}\left[(\mathbf{x_0} + \Delta\mathbf{x}_f)^2 - (\mathbf{x_0} + \Delta\mathbf{x}_i)^2\right] + \mathbf{k x_0}(\mathbf{x_0} + \Delta\mathbf{x}_f - \mathbf{x_0} - \Delta\mathbf{x}_i) =$$

$$= -\frac{1}{2}\mathbf{k}(\mathbf{x}_0^2 + \Delta\mathbf{x}_f^2 + 2\mathbf{x_0}\Delta\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_0^2 - \Delta\mathbf{x}_i^2 - 2\mathbf{x_0}\Delta\mathbf{x}_i) + \mathbf{k x_0}(\Delta\mathbf{x}_f - \Delta\mathbf{x}_i) =$$

$$= -\frac{1}{2}\mathbf{k}\left[\Delta\mathbf{x}_f^2 - \Delta\mathbf{x}_i^2 + 2\mathbf{x_0}(\Delta\mathbf{x}_f - \Delta\mathbf{x}_i)\right] + \mathbf{k x_0}(\Delta\mathbf{x}_f - \Delta\mathbf{x}_i) =$$

$$= -\frac{1}{2}\mathbf{k}\left[\Delta\mathbf{x}_f^2 - \Delta\mathbf{x}_i^2 + 2\mathbf{x_0}(\Delta\mathbf{x}_f - \Delta\mathbf{x}_i) - 2\mathbf{x_0}(\Delta\mathbf{x}_f - \Delta\mathbf{x}_i)\right] = -\frac{1}{2}\mathbf{k}(\Delta\mathbf{x}_f^2 - \Delta\mathbf{x}_i^2)$$

quindi in conclusione

$$\mathbf{L}_{El}^{i\to f} = -\frac{1}{2}\mathbf{k}(\Delta\mathbf{x}_f^2 - \Delta\mathbf{x}_i^2)$$

cioè anche in questo caso il **lavoro di questa forza dipende solo dall'allungamento finale e iniziale della molla, cioè solo dai due stati iniziale e finale**. Anche la **forze di richiamo elastica** è un **forza conservativa**.

Allora possiamo definire una funzione scalare associata a questa forza conservativa e definita da:

$$\mathbf{L_{El}^{i\to f} = -\Delta U_{El} = -(U_f^{El} - U_i^{El})}$$

e quindi:
$$\mathbf{-(U_f^{El} - U_i^{El}) = -\left[\frac{1}{2}k\Delta x_f^2 - \frac{1}{2}k\Delta x_i^2\right]}$$

La quantità

$$\boxed{\mathbf{U_{El} = \frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}k\Delta l^2}}$$

si definisce **Energia Potenziale Elastica** e **come si può notare dipende solo dallo stato di allungamento della molla**

In generale ad ogni forza conservativa è sempre possibile associare una opportuna funzione scalare (energia potenziale) dipendente dallo stato la cui differenza tra due stati i e d f è definita da:

$$\boxed{\mathbf{U_f - U_i = -\int_i^f \vec{F}_c \cdot d\vec{r}}}$$

"**la differenza di energia potenziale, associata ad una forza conservativa, quando passa dallo stato i allo stato f è uguale al lavoro della forza, cambiato di segno , tra gli stessi due stati** ".

Va ricordato che in generale l'energia potenziale è nota sempre a meno di una costante, mentre è sempre definita la differenza di Energia potenziale

Si può dimostrare che dalla forza si può risalire all'espressione dell'energia potenziale e viceversa nota la funzione Energia potenziale si può ricavare la forza ad essa associata, attraverso le relazioni vettoriali generali

$$\mathbf{U(\vec{r}) = -\int \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + Cost}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{dU(\vec{r})}{d\vec{r}} = -\,\text{grad}\,U(\vec{r})$$

Quest'ultima in realtà equivale a tre relazioni scalari relative alle componenti della forza

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \qquad F_y = -\frac{dU}{dy} \qquad F_z = -\frac{dU}{dz}$$

Se ad un sistema sono applicate solo forze conservative, o altre forze presenti non compiono lavoro il sistema si definisce " sistema conservativo" e l'energia meccanica si conserva, che si può esprimere con:

$$\Delta E_{mecc} = \Delta K + \sum \Delta U = 0$$

E' da notare il termine della sommatoria delle potenziale associate a tutte le possibili forze conservative applicate al sistema, il che vuole indicare che **l'energia potenziale è una proprietà dell'intero sistema e non di ogni singola parte** .

8,5 <u>FORZE NON CONSERVATIVE</u>

Nel caso in cui ad un corpo o sistema siano applicate più forze sia conservative che non, per il principio di sovrapposizione possiamo scrivere il Teorema Lavoro Energia nella seguente forma:

$$L_{Tot} = \sum L_{Cons} + \sum L_{Non\ Cons} = \Delta K_{Tot}$$

ma dalla relazione $\sum L_{Cons} = -\sum \Delta U$ possiamo scrivere:

$$-\sum \Delta U + \sum L_{Non\ Cons} = \Delta K_{Tot}$$

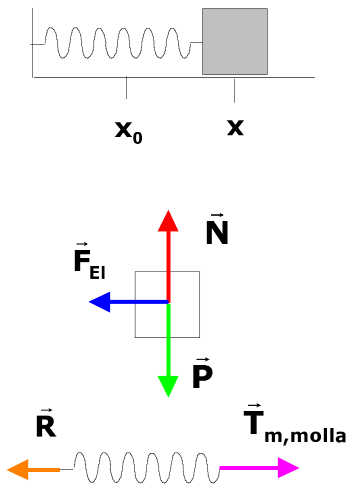
da cui la relazione:

$$\sum \mathbf{L}_{\text{Non Cons}} = \Delta \mathbf{K}_{\text{Tot}} + \sum \Delta \mathbf{U} = \Delta \mathbf{E}_{\text{Mec}}$$

cioè " **il lavoro compiuto dalle forze non conservative è uguale alla variazione dell'energia meccanica totale del sistema quando passa dallo stati i allo stato f**"

8,6 ANALISI DEI GRAFICI DI SISTEMI CONSERVATIVI

Analizziamo per semplicità un caso unidimensionale. Il caso generale può essere riportato al caso unidimensionale ricorrendo alle proiezioni del moto sugli assi del sistema.



Una massa **m** può scorrere su un piano liscio ed è collegata ad una molla ideale di costante elastica **k** . La posizione è individuata dalla coordinata **x**, fissando come origine il punto corrispondente alla posizione di equilibrio della molla (lunghezza di riposo).

Consideriamo l'intero sistema **massa + molla** ed esaminiamo le forze che agiscono sulle varie pareti. Un tale sistema prende il nome di **Oscillatore armonico**

Le forze agenti sulla molla non hanno effetti energetici in quanto la molla ha massa trascurabile. Per quanto riguarda le forze agenti sulla massa possiamo osservare che $\vec{P}$ e $\vec{N}$ durante il moto non compiono lavoro in quanto ortogonali allo spostamento, mentre $\vec{F}_{El}$ è una forza conservativa. Possiamo quindi concludere che il **sistema è conservativo** e quindi **l'energia meccanica** complessiva è costante nel tempo ed è data da:

$$\mathbf{E}_{\text{Mec}} = \mathbf{K}_{\text{m}} + \mathbf{K}_{\text{Molla}} + \mathbf{U}_{\text{m}} + \mathbf{U}_{\text{Molla}}$$

Osserviamo però che:

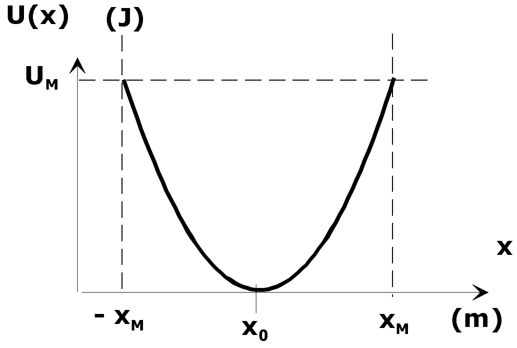
$\mathbf{U}_m = 0$, durante il moto la **quota di m** non cambia

$\mathbf{K}_{Molla} = 0$ perchè la massa della molla è trascurabile.

Ad un generico istante, quando la massa si trova in una generica posizione **x** e ha una velocità istantanea $\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ possiamo scrivere:

$$\mathbf{E_{Mec}} = \frac{1}{2}\mathbf{mv^2} + \frac{1}{2}\mathbf{k(x - x_0)^2}$$

Quindi l'energia potenziale del sistema è data dall'energia potenziale della molla. Nel grafico è riportata la funzione

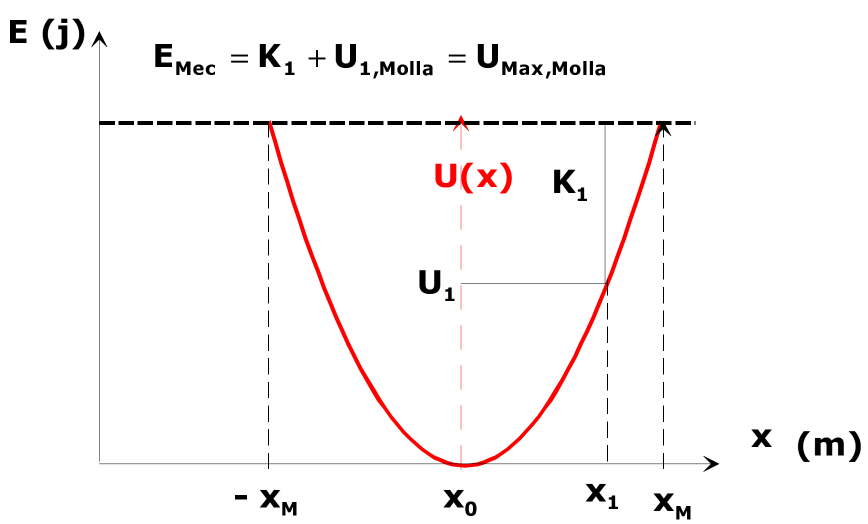


$$\mathbf{U(x)} = \frac{1}{2}\mathbf{k(x - x_0)^2}$$

Consideriamo l'istante in cui la massa è nelle posizioni $\mathbf{x_M}$ o $\mathbf{-x_M}$, posizioni di elongazione massima della molla, la massa è istantaneamente ferma e l'**energia meccanica** del sistema è

$$\mathbf{E_{Mec}} = \mathbf{K_m} + \mathbf{U_{Molla}} = \mathbf{U_{Max,Molla}}$$

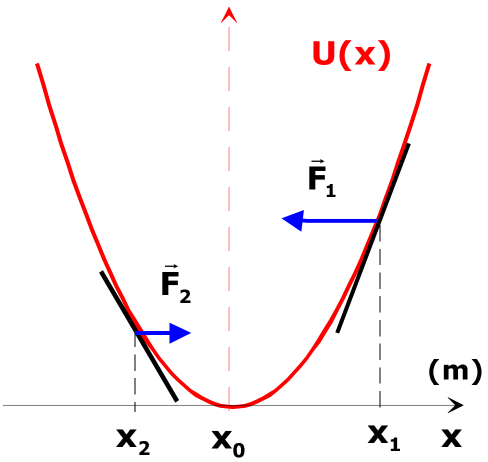
cioè **puramente potenziale** e coincide con l'energia potenziale massima della molla. Poiché per questo sistema l'energia si conserva, **l'energia del sistema in questa posizione sarà anche l'energia del sistema ad ogni altro istante**. Per esempio riportiamo in un grafico l'energia del sistema quando la massa si trova nella posizione $\mathbf{x_1}$ e si sta movendo verso sinistra (+ $\mathbf{x_M}$)



Dal grafico possiamo valutare punto per punto il contributo cinetico e potenziale all'energia totale. Il segmento al di **sotto delle curva rossa**, tra le linea tratteggiate a $\pm$ x_M, **rappresenta l'Energia Potenziale** mentre il segmento al di **sopra della la curva rossa rappresenta l'Energia Cinetica**.

Dall'analisi della funzione U(x) è possibile fare un'analisi qualitativa del moto. Partendo dalla configurazione iniziale con la massa spostata dalla posizione di equilibrio (che corrisponde alla molla alla lunghezza di riposo), che indichiamo con $\mathbf{x_M}$ e che corrisponderà alla posizione di massima elongazione della molla, **possiamo valutare l'energia meccanica** del sistema, che rimarrà fissata, tracciando una linea retta orizzontale che interseca la funzione **U(x)** nei punti di ascissa $\pm$ $\mathbf{x_M}$. In corrispondenza di tali punti si ha Energia Potenziale massima e Energia Cinetica nulla; viceversa nella posizione $\mathbf{x_0}$, corrispondente a lunghezza a riposo della molla e che è la posizione attorno alla quale il sistema oscillerà,la massa ha massima Energia Cinetica (e la molla ha energia potenziale nulla). I punti di ascissa $\pm$ $\mathbf{x_M}$ corrispondono alle posizioni di inversione del moto, dove si avrà velocità nulla ,ma massima accelerazione in verso opposto al verso del moto agli istanti precedenti.

Nota la funzione Energia Potenziale è possibile avere informazioni circa la Forza conservativa ad essa associata.

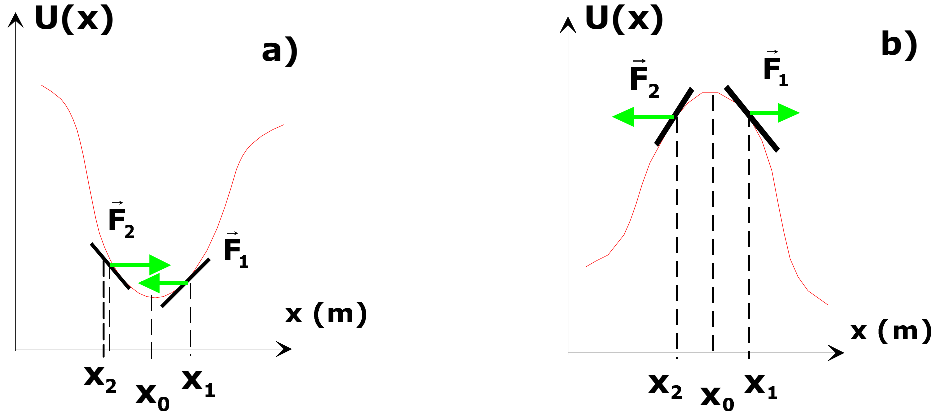


Rifacciamoci sempre al caso dell'oscillatore armonico unidimensionale. Ricordiamo anche che in generale la derivata prima di una funzione rispetto alla variabile, calcolata in un punto, ci da il coefficiente angolare delle retta tangente alla curva nel punto. Dal grafico si vede che la tangente alla curva nel punto x_1 è positiva. Allora in questo punto la forza, che ricordiamo possiamo ricavare dalla relazione:

$$\mathbf{F_x(x^*)} = -\left.\frac{\mathbf{dU}}{\mathbf{dx}}\right|_{\mathbf{x=x^*}}$$

cioè **la derivata prima rispetto a x della funzione Energia potenziale, calcolata ne punto $x=x^*$**. Dal grafico, dove è stata fissata come positiva la direzione verso destra, si vede che la tangente alla curva nel punto x_1 è positiva. Allora in questo punto la forza avrà segno negativo e quindi rivolta **verso sinistra**, mentre in x_2 risulterà positiva e **rivolta verso destra**.

Più in generale possiamo fare le seguenti considerazioni:



Nella fig. **a)** la curva **U(x) ha concavità verso l'alto**, la forza tende sempre a riportare il corpo nella posizione di equilibrio $\mathbf{x=x_0}$ che risulta quindi posizione di **equilibrio stabile**;

Nella fig. **b)** la **curva U(x) ha concavità verso il basso**, la forza tende sempre ad allontanare il corpo dalla posizione di equilibrio $\mathbf{x=x_0}$ che risulta quindi **posizione di equilibrio instabile**.

Possiamo dare la seguenti definizioni:

" **Un corpo si trova in una posizione di equilibrio se, per piccoli spostamenti dell'oggetto da questa posizione, le forze in gioco tendono a riportare l'oggetto nella posizione iniziale**". Le posizioni di equilibrio stabile corrispondono a **minimi relativi** della funzione Energia Potenziale.

Viceversa "**Un corpo si trova in una posizione di equilibrio instabile se, per piccoli spostamenti dell'oggetto da questa posizione, le forze tendono a riportare l'oggetto nella posizione iniziale**". Le posizioni di equilibrio instabile corrispondono a **massimi relativi** della funzione Energia Potenziale.