6 – 2^aLEGGE DI NEWTON IN SISTEMI NON INERZIALI

6,1 INTRODUZIONE

Si è detto che la 1^a Legge della Dinamica definisce il sistema di riferimento nel quale dobbiamo scrivere le leggi del moto, nel senso che i vettori applicati al sistema vanno riferiti ad un sistema di riferimento spazio temporale nel quale valga la 1^a Legge della Dinamica. Se la **risultante delle forze** agenti sul sistema, individuate con i criteri precedentemente definiti, **risulta nulla anche l'accelerazione del corpo deve esser nulla** e quindi il moto o è rettilineo e uniforme o il corpo è in quiete.

Si è anche detto che tutti i sistemi di riferimento inerziali sono equivalenti, cioè i risultati ottenuti studiando il moto in un certo sistema, possono essere ritrovati anche dagli altri osservatori inerziali ricorrendo solamente alle leggi di trasformazione tra i vari sistemi.

6,2 2^a LEGGE IN SISTEMI NON INERZIALE

Vediamo come viene modificata l'espressione della 2^a Legge della Dinamica se scritta facendo riferimento ad un sistema **in moto accelerato rispetto ad un sistema inerziale**.

Per evidenziare che la 2^a Legge della Dinamica è scritta in un sistema inerziale, possimo usiamo la seguente espressione:

$$\left(\sum \vec{\mathbf{F}}\right)_{\mathbf{ass}} = \left(\mathbf{m}\cdot\vec{\mathbf{a}}\right)_{\mathbf{ass}} = \mathbf{m}\cdot\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{ass}}$$

che va letta nel modo seguente: " La risultante delle forze scritte in un sistema inerziale (o assoluto) è uguale alla massa del corpo per l'accelerazione vista nel sistema inerziale (o assoluta) ".

Per analogia allora per intendere che: " la risultante delle forze scritte in un sistema non inerziale (o relativo) è uguale alla massa del corpo per l'accelerazione vista nel sistema non inerziale (o relativo) ", scriveremo:

$$\left(\sum \vec{F}\right)_{rel} = \left(m \cdot \vec{a}\right)_{rel} = m \cdot \vec{a}_{rel}$$

Ricordiamo la relazioni tra le accelerazioni per sistemi in moto relativo:

$$\vec{a}_{ass} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tra}$$

dove:

$\vec{a}_{ass}$ è l'accelerazione del corpo vista da un osservatore inerziale o assoluto;

$\vec{a}_{rel}$ è l'accelerazione del corpo vista da un osservatore in moto accelerato relativo al sistema inerziale

$\vec{a}_{tra}$ è l'accelerazione del sistema in moto vista dall' osservatore inerziale o assoluto

Possiamo allora scrivere:

$$m \cdot \vec{a}_{rel} = m\left(\vec{a}_{ass} - \vec{a}_{tra}\right) = m \cdot \vec{a}_{ass} - m \cdot \vec{a}_{tra}$$

ma :

$$m \cdot \vec{a}_{rel} = \left(\sum \vec{F}\right)_{rel} \qquad\qquad m \cdot \vec{a}_{ass} = \left(\sum \vec{F}\right)_{ass}$$

E quindi possiamo scrivere:

$$\boxed{\left(\sum \vec{F}\right)_{rel} = \left(\sum \vec{F}\right)_{ass} - m \cdot \vec{a}_{tra}} \qquad \textbf{(6-1)}$$

che possiamo leggere nel modo seguente: " **La risultante delle forze viste in un sistema non inerziale è uguale alla risultante delle forze viste da un qualunque sistema inerziale più un temine che possiamo interpretare come il prodotto della massa del corpo in esame per l'accelerazione dell'osservatore in moto, ma cambiato di segno** "

Possiamo anche interpretarla nel modo seguente: " **Per tenere conto delle forze agenti su un corpo viste in un sistema non inerziale, oltre**

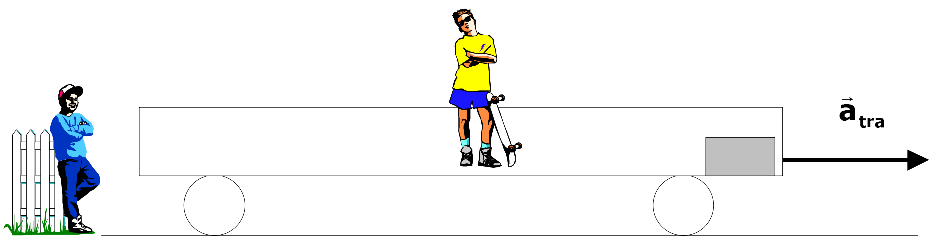
alle forze inerziali, cioè le stesse che vedrebbe un osservatore inerziale e scelte con i soliti criteri, dobbiamo aggiungere un termine pari alla massa del corpo in esame per l'accelerazione dell'osservatore in moto, (di trascinamento) ma cambiato di segno "

Questo termine, che ha le dimensioni di una forza viene chiamata " **Forza d'inerzia** " o " **Forza Apparente** ". Questo tipo di forze **non ubbidisce** alla **3ª Legge delle Dinamica**. Infatti, non derivando da nessuna forza dovuta ad una reale interazione del corpo in esame con l'esterno, non può avere da quest'ultimo una reazione uguale e contraria; **in questo senso è del tutto analoga alla forza dovuta da un campo**.

Per chiarire meglio questi concetti esaminiamo i seguenti esempi particolari.

Esempio 1

Consideriamo un corpo di massa **m** posto sul pavimento di un carrello e situato ad una estremità, all'altra estremità è posta una molla. Supponiamo per semplicità che non vi sia attrito tra il corpo e il piano del carrello.



Il carrello è soggetto ad una accelerazione costante $\vec{a}_{tra}$ diretta per esempio verso destra.

Fissiamo come **sistema di riferimento inerziale** un sistema solidale con il piano su cui scorre il piano con asse **x** con verso positivo verso destra (concorde con $\vec{a}_{tra}$).

Consideriamo due osservatori, uno solidale con il piano di scorrimento (inerziale) ed uno solidale con il carrello.

<u>L'osservatore solidale con il sistema di riferimento inerziale</u> osserva i seguenti fenomeni:

1) il corpo è **fermo** mentre il carrello gli scorre sotto (infatti lo vedrebbe sempre nella stessa posizione rispetto a certi suoi traguardi) fino a quando viene raggiunto dalla molla al tempo $\mathbf{t = t^*}$;

2) a questo punto la molla comincia a comprimersi e il punto comincia a muoversi. Quindi a regime (molla completamente compressa) il punto materiale è **fermo rispetto al carrello**, ma **in moto rispetto all'osservatore inerziale**, con la stessa accelerazione $\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{tra}}$ del carrello; la molla sarà compressa di un tratto $\Delta\mathbf{x}$, che può valutare.

Quindi per l'**osservatore fisso** l'equazione del moto del corpo, considerando solo il moto nella direzione parallela al piano di scorrimento del carrello sarà:

$$\left(\sum \mathbf{F_x}\right)_{\mathbf{ass}} = \mathbf{0} \qquad \text{per} \quad \mathbf{t} < \mathbf{t^*} \qquad \text{(a)}$$

$$\left(\sum \mathbf{F_x}\right)_{\mathbf{ass}} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{tra}} \qquad \text{per} \quad \mathbf{t} > \mathbf{t^*} \qquad \text{(b)}$$

dove l'unica forza con componente secondo **l'asse x**, esercitata direttamente sul corpo, sarà la **forza di reazione** delle molla che si può dimostrare dalla **legge di Hooke** essere **proporzionale alla deformazione della molla ed diretta in verso tale da opporsi alla deformazione**.

[**La legge di Hooke**, legge sperimentale indica che il modulo $\mathbf{F_{el}}$ della forza elastica di richiamo di una molla deformata , è proporzionale alla deformazione delle molla $\Delta\mathbf{l} = (\mathbf{l} - \mathbf{l_0})$, dove $\mathbf{l_0}$ è la lunghezza delle molla a riposo. La costante di proporzionalità si indica con **k**, costante elastica delle molla, e si misura in **N/m**. La **legge di Hooke** si esprime come $\mathbf{F_{el} = -\, k\, (l - l_0)}$; il segno meno significa che il **verso** della forza elastica **è sempre opposto** alla deformazione].

La legge del moto secondo **l'asse x** diventa:

$$\vec{F}_{el} = -k\,(l - l_0) \cdot \vec{i} = m \cdot a_{tra}\,\vec{i}$$

da cui : $-k\,(l - l_0) = m \cdot a_{tra}$ $\qquad \Delta l = (l - l_0) = -\dfrac{m\,a_{tra}}{k}$

(il segno " meno " significa che la molla si accorcia).

<u>L'osservatore solidale con il carrello</u>, osserva i seguenti fenomeni:

1) per $t < t^*$ il punto materiale si muove verso **sinistra** con accelerazione $-\vec{a}_{tra}$;
2) per $t > t^*$, cioè una volta raggiunta la molla e dopo che è stata completamente compressa, il corpo è fermo.

Ovviamente la deformazione della molla che vede questo osservatore dovrà essere la stessa di quella vista dall'osservatore fisso in quanto, poichè il carrello si muove di moto rettilineo, lo spostamento e quindi lo spazio è assoluto.

Per l'osservatore in moto le leggi del moto del corpo saranno:

$$\left(\sum F_x\right)_{rel} = m \cdot a_{rel} = -m \cdot a_{tra} \qquad \text{per } t < t^* \qquad \text{(d)}$$

$$\left(\sum F_x\right)_{rel} = 0 \qquad \text{per } t > t^* \qquad \text{(e)}$$

Facciamo alcune considerazione:

- La relazione **(d)** è diretta conseguenza delle regole di trasformazione tra le accelerazioni in sistemi di riferimento in moto relativo: $\vec{a}_{rel} = \vec{a}_{ass} - \vec{a}_{tra}$ tenendo conto della relazione **(6-1)** .

- Per quanto riguarda la relazione **(e)**, anche l'osservatore sul carrello vede che la molla è compressa e sa che **esercita sul corpo** una forza di richiamo $\vec{\mathbf{F}}_{el} = -\mathbf{k}\,(\mathbf{l}-\mathbf{l}_0)\cdot\vec{\mathbf{i}}$ (va notato che se la molla si accorcia, la forza che essa esercita sul corpo sarà diretta in verso positivo, secondo la scelta fatta per l'asse x). Quindi per accettare la relazione (e), l'osservatore deve ammettere che sul corpo dovrà necessariamente agire un'altra forza, diretta sempre nella stessa direzione x, che possiamo indicare con $\vec{\mathbf{F}}{*} = \mathbf{F}{*}\cdot\vec{\mathbf{i}}$ e tale che:

$$\vec{\mathbf{F}}{*} + \vec{\mathbf{F}}_{el} = \mathbf{0}$$

Tenendo conto che entrambe sono dirette secondo l'asse **x** , avendo scelto come positivo il verso sinistra-destra, avremo:

$$\vec{\mathbf{F}}{*} = -\vec{\mathbf{F}}_{el} = -\left[-\mathbf{k}\,(\mathbf{l}-\mathbf{l}_0)\right]\cdot\vec{\mathbf{i}} = -\ \mathbf{m}\cdot\mathbf{a}_{tra}\vec{\mathbf{i}}$$

cioè:

$$-\mathbf{k}\,(\mathbf{l}-\mathbf{l}_0) = \mathbf{m}\cdot\mathbf{a}_{tra} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta\mathbf{l} = (\mathbf{l}-\mathbf{l}_0) = -\,\frac{\mathbf{m}\cdot\mathbf{a}_{tra}}{\mathbf{k}}$$

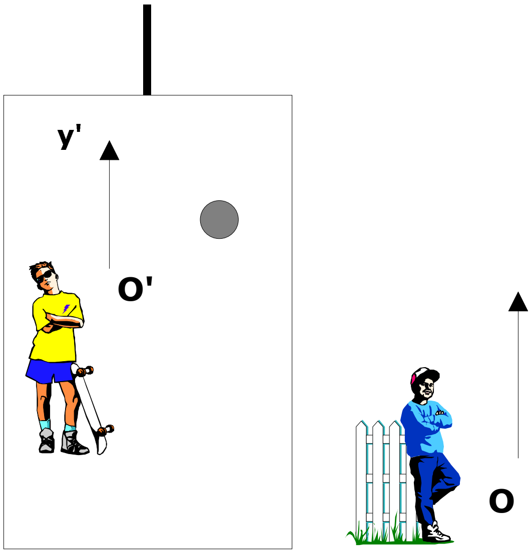
Anche l'osservatore in moto ritrova la stessa compressione delle molla.

OSSERVAZIONI

a) Solo avendo ammesso che deve esistere la $\vec{\mathbf{F}}{*}$ ha potuto ritrovare la stessa compressione delle molla, che non può essere diversa in quanto in queste condizioni di **moto rettilineo gli spostamenti sono invarianti**.
b) Dalla misura di $\Delta\mathbf{x}$ si può ricavare una misura di $\mathbf{a}_{tra}$. Un dispositivo di questo tipo rappresenta quello che si definisce un **accelerometro**.

Esempio 2

Consideriamo un osservatore, individuato da **O'**, che compie esperimenti di caduta libera dentro un ascensore.



L'ascensore **comincia a salire con accelerazione** costante $\vec{a}_{tra}$ misurata rispetto all'osservatore assoluto **O**, descrive **poi un tratto di moto uniforme** ed **infine decelera** con accelerazione costante $-\vec{a}_{tra}$ fino a fermarsi.

Vogliamo valutare quale sarà **l'accelerazione di caduta** misurata: dall'osservatore **O'** solidale con l'ascensore; dall' osservatore assoluto **O**.

Per l'osservatore fisso O, l'accelerazione dei corpi lasciti cadere da O' sarà sempre:

$$\vec{a}_{ass} = \vec{g}$$

Per l'osservatore fisso O', solidale con l'ascensore in base alle formule di trasformazione $\vec{a}_{rel} = \vec{a}_{ass} - \vec{a}_{tra}$ l'accelerazione di caduta libera $a_{y\ rel}$, che ha solo componente **y**, in base ai versi fissati in figura, sarà

nella fase di accelerazione $a_{y\ rel} = -g - a_{tra} = -(g + a_{tra})$

nella fase di moto uniforme $a_{y,rel} = -g$

nella fase di decelerazione $a_{y,rel} = -g - (-a_{tra}) = -(g - a_{tra})$

cioè il corpo scende sempre con accelerazione in modulo **g** verso il basso, ma adesso è l'asecnsore che si muove con accelerazione in modulo $\mathbf{a_{tra}}$ verso l'alto.

Quindi nella **fase di accelerazione**, **O'** constata che i **corpi cadono con accelerazione maggiore di quella di gravità**, cioè se li sorreggesse misurerebbe un **apparente aumento di peso**, mentre nella **fase di decelerazione** si avrebbe un **apparente diminuzione di peso**. Il corpo appeso ad un dinamometro produrrebbe allungamenti diversi.

Nel caso particolare di $\vec{\mathbf{a}}_{tra} = \vec{\mathbf{g}}$, oppure se l'ascensore scendesse in caduta libera, l'osservatore solidale con l'ascensore troverebbe che $\mathbf{a_{y,rel} = 0}$, cioè **un corpo lasciato con velocità nulla rimarrebbe fermo rispetto ad O'**. E' la sensazione di mancanza di peso avvertita da chi si trova in un sistema di riferimento in caduta libera. Questo effetto non è dovuto ad una effettiva mancanza del peso, ma al fatto che l'intero sistema si muove con la stessa accelerazione con cui si muovono i corpi in un sistema inerziale.

Facciamo alcune ulteriori osservazioni.
Supponiamo che l'osservatore **O'** non sia in grado di comunicare con l'esterno e che esegua esperimenti di caduta libera, oppure utilizzi un dinamometro fissato al soffitto dell'ascensore. Egli misurerà valori differenti dell'accelerazione $a_{y,rel}$ che potranno essere come visto **= g** oppure > **g** oppure < **g**. Se si costruisce un accelerometro può dire che in certe situazioni compare una accelerazione supplementare $\mathbf{a_{sup}}$ che si compone con **g** per dargli il risultato ottenuto. Dall'analisi di $\mathbf{a_{rel}}$ e $\mathbf{a_{sup}}$ potrebbe accorgersi che esiste un valore particolare, appunto g, che si ottiene sommando o sottraendo i valori di $\mathbf{a_{rel}}$ e $\mathbf{a_{sup}}$. Solo avendo informazioni dall'esterno potrebbe accorgersi che $\mathbf{a_{sup}}$ altro non è che la sua $\mathbf{a_{tra}}$ e quindi avere in formazioni su ciò che sta accadendo al suo sistema. Se il moto di **O'** fosse uniforme, misurerebbe sempre $\mathbf{a_{rel} = g}$ e non avrebbe in nessun modo la possibilità di sapere che egli si sta movendo rispetto ad un sistema fisso.