9 – SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

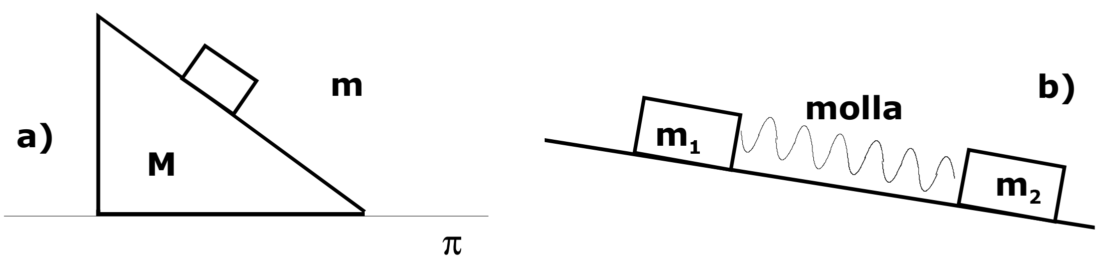
9,1 INTRODUZIONE

Fino ad ora abbiamo esaminato moti puramente traslatori di corpi per i quali è possibile applicare l'approssimazione di punto materiale, o sistemi di corpi collegati con vincoli rigidi, per i quali è possibile applicare il diagramma di corpo libero.

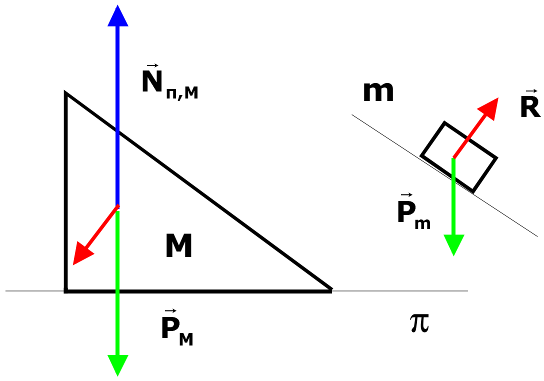
Tuttavia se si esamina il moto di un bastone o di sistemi nei quali i vari corpi non sono rigidamente vincolati tra loro come per esempio due masse collegate da una molla o liberi di muoversi relativamente tra di loro, come per esempio una manciata di pietre lanciate in lato, le precedenti approssimazioni non sono più valide. In questi casi le **leggi della dinamica vanno opportunamente adattate**.

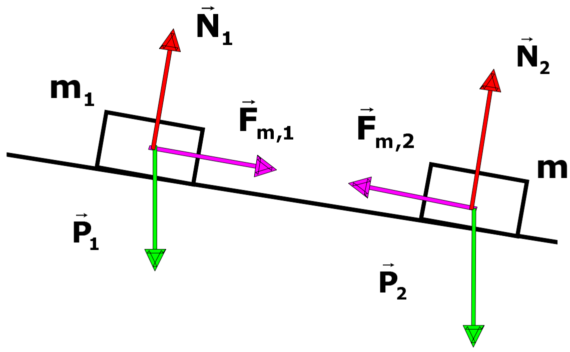
Consideriamo i seguenti esempi (per semplicità consideriamo ancora casi di moti traslatori, ma le conclusioni possono esser generalizzate):

a) una massa m scivola lungo un cuneo M a sua volta libero di muoversi su un piano liscio;
b) due masse m_1 e m_2 collegate da una molla ideale scendono lungo un piano inclinato; prima che inizi il moto la molla è allungata.



Per studiare il moto attraverso il diagramma di corpo libero, si determinano la forze agenti sui vari corpi e quindi, applicando la legge del moto si potrebbero determinare le accelerazioni





Tuttavia in questi due esempi possono sorgere alcune perplessità:Per esempio nel caso a) ci sarebbe l'ambiguità di come fissare il sistema di riferimento spaziale (asse x parallelo al piano inclinato o parallelo a p), mentre nel caso b) come è possibile valutare quale porzione della forza elastica agisce sulle singole masse?

Se analizziamo meglio i moti possiamo notare che:

nel caso a) m si muove (lungo il piano inclinato, verso destra) su M che a sua volta è in moto (verso sinistra) sul piano orizzontale;

nel caso b) le due masse scendono lungo il piano inclinato, ma contemporaneamente oscillano attorno alla posizione di equilibrio.

In entrambi i casi possiamo osservare un molto di insieme ed un certo moto relativo tra le masse. Questa osservazione la possiamo fare più in generale tutte le volte che analizziamo il moto di sistemi, costituiti da più corpi che sono a contatto tra loro mediante vincoli non rigidi o che presentano moti relativi tra di loro. In questi casi, soprattutto se non vengono richieste esplicitamente le accelerazioni o delle particolari Forze di interazione tra i corpi, può essere più conveniente studiarne il moto pensandolo come sovrapposizione di un moto di insieme + un moto relativo opportuno.

Per fare ciò, dovendo comunque rispettare le Leggi della Dinamica, è opportuno fare alcune **considerazioni sulle Forze ed introdurre nuove grandezze fisiche**.

9,2 FORZE INTERNE E FORZE ESTERNE

Per studiare un moto in questa maniera si deve risolvere il problema utilizzando le tecniche che rientrano in un modello che va sotto il titolo di **Dinamica dei Sistemi di Punti Materiali**.

Il fatto di parlare ancora di Punti materiali ci suggerisce che tale modello si riferisce a sistemi di corpi in moto puramente traslatori. Il moto del sistema può essere descritto studiando separatamente i due mot accennati:

a) il moto di insieme, che vedremo essere completamente descritto dal moto di un particolare punto rappresentativo dell'intero sistema chiamato **Centro di Massa (C.M.)**, sempre individuabile in un dato sistema di riferimento spaziale;

b) e il moto relativo dei vari corpi attorno al C.M.

Prima definire che cosa si intende per C.M, facciamo alcune considerazioni sulle Forze che intervengono in un sistema di punti materiali. Rifacciamoci agli esempi a) e b) precedenti.

Se nel caso a) consideriamo il sistema (M+m) nel suo complesso; possiamo dire che:

i) le forze $\vec{\mathbf{P}}_m$, $\vec{\mathbf{P}}_M$ e $\vec{\mathbf{N}}_{\pi,M}$ sono forze esterne al sistema, perché dovute ad interazioni con altri corpi non facenti parte del sistema (m+M);

ii) le forze $\vec{\mathbf{R}}_{m,M}$ e $\vec{\mathbf{R}}_{M,m}$ sono forze interne al sistema, perché derivanti da interazioni tra parti del sistema (m+M)

Se nel caso b) consideriamo il sistema (m_1+m_2+molla) avremo:

i) le forze $\vec{\mathbf{P}}_i$ e $\vec{\mathbf{N}}_i$ (i=1,2) sono forze esterne al sistema;

ii) le forze $\vec{\mathbf{F}}_{mi}$ (i=1,2) sono forze interne al sistema

Se avessimo considerato le masse singolarmente, tutte le forze sarebbero state forze esterne.

Vedremo nel seguito come per uno studio corretto di un sistema di punti materiali sia necessario individuare e dichiarare bene quale è il sistema che si vuole studiare (cioè stabilire quali sono i corpi che fanno parte del sistema in esame e individuare quindi che cosa è l' "esterno" per tale sistema) e quindi distinguere le forze tra **FORZE ESTERNE** (dovute alle interazioni del sistema globale con i suo esterno) e **FORZE INTERNE** (dovute alle interazioni tra le varie parti del sistema). Vedremo che le **FORZE ESTERNE** , che devono essere note sono responsabili del moto di insieme e quindi del C.M , mentre le **FORZE INTERNE** , che essendo dovute a reazioni vincolari sono mai note a priori e inoltre possono variare col moto, sono responsabili dei moti relativi al centro di massa.

Da queste osservazioni si intuisce quella che può essere la generalizzazione della definizione di SISTEMA ISOLATO, cioè quel sistema "sul quale agiscono solo forze interne", cioè dovute alle sole interazioni tra le parti del sistema; **per un tale sistema vale il Principio di inerzia**.

E' evidente che un sistema **non isolato**, può diventare **isolato**, includendo in esso anche i corpi dai quali provengono forze esterne.

9,3 CENTRO DI MASSA

Per poter studiare il **il moto di insieme** del sistema di punti materiali, è necessario individuare spazialmente l'intero sistema e quindi occorre introdurre una grandezza fisica che permetta di **localizzarlo** globalmente nello spazio. In altre parole vogliamo identificare un **singolo punto** nello spazio che sia rappresentativo dell'intero sistema per quanto riguarda il suo moto d'insieme; questo punto rappresentativo viene chiamato **Centro di Massa** (**C.M.**) del sistema. **Traiettoria, velocità e accelerazione del C.M.** coincidono con quelle del moto d'insieme dell'intero sistema.

Per studiare l'evoluzione di questo punto **possiamo applicare le leggi del moto valide per il punto materiale**. **Il moto di un sistema di punti materiali o di un corpo rigido libero, per i quali non vale**

l'approssimazione di punto materiale, può essere analizzato studiando separatamente il moto del suo C.M e il moto dei singoli punti o del corpo rigido, relativo al C.M.

La posizione nello spazio del C.M. sarà rappresentata da una raggio vettore, che dipende ovviamente dalla posizione in cui sono localizzati i corpi (assimilati a punti materiali), definito come:

$$\boxed{\vec{r}_{C.M.} = \frac{\sum_{1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{1}^{N} m_i}}$$

dove $\vec{r}_i$ è il **raggio vettore** che, in un fissato un sistema di riferimento, individua ciascun corpo o punto materiale. La sommatoria è estesa a tutti i punti del sistema.

La relazione che definisce la posizione $\vec{r}_{C.M.}$ del **Centro di Massa del sistema di N punti materiali** può essere letta come **la media pesata delle posizioni delle singole masse**. Ovviamente la relazione scritta è una relazione vettoriale che equivale a più relazioni scalari, secondo le componenti del sistema di riferimento saziale fissato. Per esempio nel caso di sistema di riferimento spaziale cartesiano , le componenti di $\vec{r}_{C.M.}$ sono :

$$x_{C.M.} = \frac{\sum_{1}^{N} m_i x_i}{M_{Tot}} \qquad y_{C.M.} = \frac{\sum_{1}^{N} m_i y_i}{M_{Tot}} \qquad z_{C.M.} = \frac{\sum_{1}^{N} m_i z_i}{M_{Tot}}$$

dove si è tenuto conto che $\sum_{1}^{N} m_i = M_{Tot}$

Per determinare il **Centro di Massa di un corpo rigido esteso**, lo possiamo immaginare come una **distribuzione continua** di punti materiali ciascuna di massa infinitesima **dm**. In questo modo la $\sum \rightarrow \int$ e possiamo allora definire:

$$\boxed{\vec{r}_{C.M.} = \frac{1}{M_{Tot}} \int_M \vec{r}\, dm}$$

dove **dm** è l'elemento di corpo individuato dal raggio vettore generico $\vec{r}$. L'integrale è esteso all'intero corpo. E' in realtà un integrale di volume in cui compare un prodotto di uno scalare per un vettore. Analogamente per le componenti in un sistema cartesiano possiamo scrivere:

$$x_{C.M.} = \frac{1}{M_{Tot}} \int_M x\, dm \qquad y_{C.M.} = \frac{1}{M_{Tot}} \int_M y\, dm \qquad z_{C.M.} = \frac{1}{M_{Tot}} \int_M z\, dm$$

Avendo definito il raggio vettore che individua la posizione del centro di massa, **possiamo definire anche la velocità e l'accelerazione del C.M.** dalla definizione generale di velocità e accelerazione, cioè:

$$\boxed{\vec{v}_{C.M} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{C.M} = \frac{\sum_N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_N m_i} = \frac{1}{M_{tot}} \sum_N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}$$

che possiamo anche scrivere come

$$\boxed{\vec{v}_{C.M.} = \frac{1}{M_{tot}} \sum_N m_i\, \vec{v}_i}$$

cioè la media pesata delle velocità delle singole masse.

Analogamente definiamo l' accelerazione $\vec{a}_{C.M}$ come:

$$\boxed{\vec{a}_{C.M} = \frac{d}{dt}\vec{v}_{C.M} = \frac{\sum_N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_N m_i} = \frac{1}{M_{tot}} \sum_N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}$$

o anche:

$$\boxed{\vec{a}_{C.M} = \frac{1}{M_{tot}} \sum_N m_i \, \vec{a}_i}$$

cioè media pesata delle velocità delle singole masse.

Va ricordato che quelle scritte sono relazioni vettoriali e che per poter essere trattate vanno scomposte nelle componenti secondo gli assi del sistema di riferimento usato. Sono ovvie le estensioni al caso di corpo esteso, con le relazioni in forma integrale.

9,4 MOTO DEL CENTRO DI MASSA

Abbiamo definito il C.M. come il punto rappresentativo del moto di insieme di un sistema di punti materiali. **Vediamo adesso come il moto del C.M. e quindi il moto di insieme dell'intero sistema dipenda solo dalle forze esterne**.

Consideriamo un sistema di N punti materiali ciascuno di massa m_i . Tenendo conto della definizione di accelerazione del C.M. possiamo scrivere:

$$M_{tot} \, \vec{a}_{C.M} = m_1 \, \vec{a}_1 + m_2 \, \vec{a}_2 + m_3 \, \vec{a}_3 + \ldots\ldots$$

Indichiamo con $\vec{F}_{j-i}$ **le forze interne**, cioè la forza esercitata dal j-esimo punto sull'i-esimo e con $\vec{F}_{Est-i}$ **la risultante delle forze esterne** agenti sull'i-esimo punto. La legge del moto applicata ad ogni elemento del sistema, sarà data da:

$$m_1 \, \vec{a}_1 = \left(\sum \vec{F}\right)_{m_1} = \vec{F}_{2\text{-}1} + \vec{F}_{3\text{-}1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \vec{F}_{Est\text{-}1}$$

$$m_2 \, \vec{a}_2 = \left(\sum \vec{F}\right)_{m_2} = \vec{F}_{1\text{-}2} + \vec{F}_{3\text{-}2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \vec{F}_{Est\text{-}2}$$

.

.

$$m_N \, \vec{a}_N = \left(\sum \vec{F}\right)_{m_N} = \vec{F}_{1\text{-}N} + \vec{F}_{2\text{-}N} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \vec{F}_{Est\text{-}N}$$

e sommando membro a membro otteniamo la legge del moto per l'intero sistema (principio di sovrapposizione), cioè :

$$\mathbf{m_1\,\vec{a}_1 + m_2\,\vec{a}_2 + m_3\,\vec{a}_3 + \ldots\ldots + m_N\,\vec{a}_N} = \mathbf{(\,\vec{F}_{2\text{-}1} + \vec{F}_{3\text{-}1} + \ldots\ldots\ldots + \vec{F}_{Est\text{-}1}\,)} +$$

$$+\,\mathbf{(\,\vec{F}_{1\text{-}2} + \vec{F}_{3\text{-}2} + \ldots\ldots\ldots + \vec{F}_{Est\text{-}2}\,)} + \ldots\ldots\mathbf{(\vec{F}_{1\text{-}N} + \vec{F}_{2\text{-}N} + \ldots\ldots\ldots + \vec{F}_{Est\text{-}N}\,)}$$

ma poiché per la III^a Legge della Dinamica $\mathbf{\vec{F}_{j\text{-}i} = -\vec{F}_{i\text{-}j}}$, deduciamo che le forze interne si annullano a coppie.

Indicando con :

$$\sum \mathbf{\vec{F}_{Est}} = \mathbf{\vec{F}_{Est\text{-}1} + \vec{F}_{Est\text{-}2} + \ldots\ldots\ldots + \vec{F}_{Est\text{-}N}}$$

otteniamo:

$$\mathbf{m_1\,\vec{a}_1 + m_2\,\vec{a}_2 + m_3\,\vec{a}_3 + \ldots\ldots + m_N\,\vec{a}_N} = \sum \mathbf{\vec{F}_{Est}}$$

che tenendo conto della definizione di accelerazione del C.M. possiamo scrivere:

$$\boxed{\mathbf{M_{tot}\,\vec{a}_{C.M.}} = \sum \mathbf{\vec{F}_{Est}}}$$

cioè: " **la risultante delle forze esterne applicate al sistema di punti materiali (o ad un corpo esteso) è uguale al prodotto della massa totale dell'intero sistema per l'accelerazione del centro di massa**."

Questa relazione rappresenta la Legge del moto del C.M per un sistema di punti materiali o per un corpo esteso.

9,4 QUANTITA' DI MOTO DI UN SISTEMA DI PUNTI – LEGGE DEL MOTO

Ricordando la definizione di Quantità di Moto relativa ad una massa **m** che si muove con velocità $\mathbf{\vec{v}}$, possiamo definire la **Quantità di Moto per un Sistema** $\mathbf{\vec{P}_{Sist}}$ di punti materiali come la somma vettoriale delle quantità di moto di ciascun punto materiale, cioè:

$$\boxed{\vec{P}_{Sist} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}$$

e tenendo conto della definizione di velocità del C.M. possiamo anche scrivere:

$$\boxed{\vec{P}_{Sist} = M_{Tot} \vec{v}_{C.M.}}$$

Se adesso deriviamo (rispetto al tempo) questa quantità, otteniamo:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i}{dt} = \frac{d\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{dt}$$

e tenendo conto della definizione di velocità del C.M. , possiamo scrivere:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dM_{Tot} \vec{v}_{C.M}}{dt} = M_{Tot} \frac{d\vec{v}_{C.M.}}{dt} = M_{Tot} \vec{a}_{C,M}$$

Allora possiamo riscrivere la Legge del moto per un sistema di punti materiali nella forma :

$$\boxed{\sum \vec{F}_{Est} = \frac{d\vec{P}_{Sist}}{dt}}$$

che leggiamo: " **la risultante delle forze esterne applicate ad un sistema di punti materiale è uguale alla derivata (rispetto al tempo) della quantità di moto totale del sistema** ".

Osservazione. Se consideriamo il solo punto materiale come caso particolare di sistema, la relazione scritta equivale a quella precedentemente trovata e che ci dava la legge del moto in termini diretti della velocità; questo è ovvio in quanto tutte le forze applicate risultano esterne al punto stesso. Nel caso di sistemi di punti, dove esistono anche le forze interne una tale conclusione non era a priori del tutto ovvia.

La II^{a} Legge delle Dinamica (Legge del moto) per un sistema di punti materiali, come visto, può essere scritta in due forme equivalenti:

$$\sum \vec{F}_{Est} = \frac{d\vec{P}_{Sist}}{dt} \qquad\qquad \sum \vec{F}_{Est} = M_{Tot}\vec{a}_{C,M}$$

A seconda dei casi può essere più conveniente pensarla in una forma piuttosto che nell'altra (cosa del tutto indifferente per il solo punto materiale, come capiremo nel seguito) .

In particolare, **nel caso in cui la risultante delle forze esterne applicate ad un sistema di punti materiali sia nulla**, dalla legge del moto scritta nella forma:

$$\sum \vec{F}_{Est} = \frac{d\vec{P}_{Sist}}{dt}$$

possiamo dedurre che:

$$\boxed{\sum \vec{F}_{Est} = 0 \qquad \textbf{implica} \qquad \vec{P}_{Sist} = \mathbf{Cost}}$$

e questa è la formalizzazione del **Principio di Conservazione della Quantità di moto** (per un sistema di punti materiali):

" **Se la risultante delle forze esterna applicate ad un sistema di punti materiale è zero si conserva la quantità di moto totale del sistema** ".

Questo significa che possono variare le quantità di moto dei singoli corpi del sistema, ma non la loro somma (vettoriale). Si deve sempre ricordare che la quantità di moto è un vettore e che cosa significa essere costante per un vettore.

Si può intuire adesso perché, nella dinamica del punto materiale, non si era fatto cenno a tale Principio, in quanto non ci dice nulla di più di quanto ci dicano le Leggi della Dinamica. Infatti per un punto materiale, per il quale tutte le forze sono forze esterne, essere nella condizione di avere risultante delle forze applicate = 0 e quindi $\vec{p}$ = cost, significa semplicemente $\vec{v}$ = cost e quindi $\vec{a} = 0$ (massa in equilibrio).

Osservazioni. Il principio di Conservazione della Quantità di moto, deriva dalla legge del moto, che è invariante per sistema di riferimento inerziale. Il principio di Conservazione della Quantità di moto, come tutti i principi di conservazione vale nei sistemi di riferimento inerziali nel senso che , anche se osservatori inerziali possono vedere velocità diverse per i vari punti (la velocità non è invariante), comunque tutti saranno d'accordo sul dire che se

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{Est}} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\mathbf{P}}_{\mathbf{Sist}} = \mathbf{Cost}$$

E' importante osservare **che il Principio di Conservazione della Quantità di Moto può valere anche solo parzialmente**, nel senso che se è nulla solo una componente della risultante delle forze esterne, si conserva solo la relativa componente delle Q.M. del sistema, cioè:

$$\sum \mathbf{F}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{Est}} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{P}_{\mathbf{i}} = \mathbf{Cost} \qquad \mathbf{i} = \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$$

Tenendo conto di come si è arrivati alla formalizzazione del principio di Conservazione della Quantità di moto, attraverso la II^a Legge della Dinamica applicata ai singoli punti del sistema, possiamo enunciare la III^a Legge delle Dinamica per un sistema di punti materiali o per un corpo esteso nel modo seguente:

" **In un sistema di riferimento inerziale per un sistema di punti isolato o meno, la risultante delle forze interne è nulla** " , cioè:

$$\boxed{\sum \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{Int}} = \mathbf{0}}$$

9,5 LAVORO IN SISTEMA DI PUNTI - TEOREMA LAVORO ENERGIA

Nello studio del moto di un sistema di punti materiale, abbiamo visto che si deve distinguere tra Forze Esterne, responsabili del moto del C.M. , cioè del moto d'insieme del sistema, e Forze Interne, alle quali viene attribuito il moto relativo al centro di massa. Tuttavia tali Forze Interne non sono sempre conosciute e quindi un approccio puramente Dinamico può esser fatto solo per il moto del C.M. e non per ogni singolo punto del sistema.

Questi significa che per avere uno studio completo del moto del sistema, e quindi del moto relativo al C.M., non ci resta che ricorrere ad un approccio Energetico, utilizzando il Teorema Lavoro Energia.

Vediamo adesso l'espressione del **Teorema Lavoro Energia per un sistema di punti materiali**.

Il lavoro di tutte le forze applicate al generico punto i-esimo del sistema

$$\boxed{\mathbf{L}_{\mathbf{Tot}} = \left(\sum \mathbf{L}\right)_{\mathbf{i-esimo}} = \left(\sum \mathbf{L}_{\mathbf{Est}}\right)_{\mathbf{i-esimo}} + \left(\sum \mathbf{L}_{\mathbf{Int}}\right)_{\mathbf{i-esimo}} = \Delta \mathbf{K}_{\mathbf{i-esimo}}}$$

e applicando a tutti i punti del sistema possiamo scrivere:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\sum \mathbf{L}_i^{\mathbf{Est}}\right) + \sum_{i=1}^{N}\left(\sum \mathbf{L}_i^{\mathbf{Int}}\right) = \sum_{i=1}^{N} \Delta \mathbf{K}_i$$

Poiché il moto lo possiamo sempre pensare come il moto d'insieme (del

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta \mathbf{K}_i = \Delta \mathbf{K}_{\mathbf{C.M.}} + \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta \mathbf{K}_i\right)_{\mathbf{Int}}^{\mathbf{C.M}}$$

C.M.) e del moto relativo al C.M. possiamo scrivere:

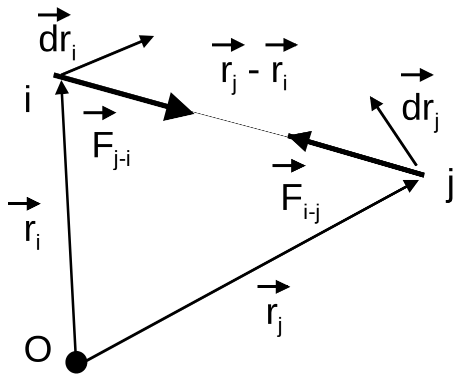
$\Delta \mathbf{K}_{\mathbf{C.M.}}$, variazione dell'energia cinetica del C.M. che dipende solo dal lavoro delle Forse Esterne,

$\left(\sum_{i=1}^{N} \Delta \mathbf{K}_i\right)_{\mathbf{Int}}^{\mathbf{(C.M.)}}$ variazione dell'energia cinetica dovuta al moto, relativo al C.M. di tutti i punti del sistema (moto interno) e determinato dal lavoro delle Forze Interne. Possiamo riassumere tutto ciò scrivendo:

$$\Delta \mathbf{K}_{\mathbf{C.M.}} = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum \mathbf{L}_{\mathbf{Est}}\right)_i \qquad\qquad \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta \mathbf{K}_i\right)_{\mathbf{Int}}^{\mathbf{(C.M.)}} = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum \mathbf{L}_{\mathbf{Int}}\right)_i$$

Ovviamente il Lavoro delle Forze Esterne si può calcolare dalla definizione di lavoro, tenendo presente che lo spostamento che si deve considerare è lo spostamento assoluto.

Facciamo ora alcune considerazione sul Lavoro delle Forze Interne. Calcoliamo il contributo, alla sommatoria, di una coppia di tali forze, ricordando che per la III[a] Legge delle Dinamica $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i-j}} = -\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{ij-i}}$



Consideriamo due punti individuati dai raggi vettori $\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}}$ e $\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{j}}$. Supponiamo che i due punti compiano degli spostamenti infinitesimi $\mathbf{d\vec{r}}$ e $\mathbf{d\vec{r}_j}$. Osservando la figura possiamo scrivere:

$$\mathbf{dL_j} + \mathbf{dL_i} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i\text{-}j}} \cdot \mathbf{d\vec{r}_j} + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{j\text{-}i}} \cdot \mathbf{d\vec{r}_i} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i\text{-}j}} \cdot \mathbf{d\vec{r}_j} - \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i\text{-}j}} \cdot \mathbf{d\vec{r}_i} =$$
$$= \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i\text{-}j}} \cdot (\mathbf{d\vec{r}_j} - \mathbf{d\vec{r}_i}) = \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i\text{-}j}} \cdot \mathbf{d\vec{r}_{ji}}$$

$$\mathbf{d\vec{r}_{ji}} = \textbf{spostamento relativo tra le masse}$$

E quindi **il lavoro è nullo solo se gli spostamenti relativi $\mathbf{d\vec{r}_{ji}}$ sono nulli o ortogonali alla forza $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i-j}}$**.

In generale per un sistema di punti materiali nell'applicare il Teorema Lavoro Energia, si dovrà tenere conto non solo del lavoro delle Forze Esterne, ma anche del lavoro delle Forze Interne. Sebbene la risultante delle Forze Interne sia sempre nulla (III[a] Legge), non è detto che lo sia anche il loro lavoro. **Se c'e moto relativo tra le parti del sistema il Lavoro delle Forze Interne non è nullo**.

OSSERVAZIONI

Quando si studia il moto di un punto materiale (N=1) o un sistema di N punti materiali, **ma legati da vincoli rigidi**, le relazioni che ci permettono di studiare il moto sono:

$$\sum \vec{F}_i = m_i \ \vec{a}_i \quad \textbf{ed} \quad \textbf{eventuali relazioni tra le} \ \ \vec{a}_i \ ; \qquad \textbf{(approccio dinamico)}$$

oppure:

$$\sum_{i=1}^{N} (L_{tot})_i = \sum_{i=1}^{N} \Delta K_i \ \textbf{(Teorema Lavoro Energia)} \ + \textbf{relazioni cinematiche}$$

Quando invece il **sistema di punti è legato da vincoli non rigidi, oppure esiste un moto relativo tra le parti del sistema**, lo studio va fatto utilizzando il **modello di Sistema di Punti Materiali**, e cioè:

$$\sum \vec{F}_{Est} = M_{Tot}\vec{a}_{C.M.} = \frac{d\vec{P}_{Sist}}{dt} \quad \textbf{(Legge del moto per Sistema di Punti Materiali)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} L_i^{Int} + \sum_{i=1}^{N} L_i^{Est} = \sum_{i=1}^{N} \Delta K_i \qquad \textbf{(Teorema Lavoro Energia)}$$

Quest'ultimo può essere scritto nella forma:

$$\sum_{i=1}^{N} L_i^{Int} + \sum_{i=1}^{N} L_i^{Est} = \Delta K_{C.M.} + \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta K_i \right)^{(C.M.)}$$

e inoltre ci possono essere delle relazioni tra le accelerazioni assolute e relative tra le varie parti del sistema. Attenzione che non è detto che la $\vec{a}_{C.M.}$ coincida con la $\vec{a}_{Tra}$ a sua volta vista nel caso di moti relativi.

Nella seconda forma con cui è espresso del Teorema Lavoro Energia, è esplicitamente fatto riferimento al modo di vedere il moto del sistema come moto di insieme (del C.M.) + moto relativo al C.M.

Nella prima forma invece, questo non è evidenziato e le velocità che intervengono nelle ΔK_i sono i moduli delle velocità assolute (cioè riferite ad un sistema di riferimento inerziale, cioè fisso o in moto rettilineo e uniforme).

E' opportuno ricordare che le relazioni che studiano la Dinamica dei Sistemi di Punti Materiali, valgono anche per i Corpi rigidi (sistemi di punti in posizioni fisse; $L_{int} = 0$)

Si dovrebbe osservare che le Forze Interne potrebbero determinare **non solo un moto macroscopico** relativo al C.M, ma anche una **moto interno microscopico**. Si pensi per esempio ad un sistema di atomi di gas o di molecole che possono avere anche **moto vibrazionali e rotazionali della molecola**. Questi moti microscopici danno origine a quella che viene definita **Energia Interna** del sistema, tipica dei sistemi Termodinamici. Va ricordato però che **in meccanica si trattano solo sistemi di corpi rigidi** (i gas non lo sono).

Per il calcolo dei vari lavori ricordiamo ora che può essere utile distinguere le Forze tra Conservative e non Conservative, soprattutto per quanto riguarda le Forze Interne, che come abbiamo visto non sempre sono determinabili esplicitamente a priori. Allora tenendo conto che al lavoro di una Forza Conservativa è associabile sempre la variazione della Energia Potenziale associata alla Forza Conservativa, possiamo riscrivere il Teorema Lavoro Energia nella seguente forma:

$$(\mathbf{L}_{Tot})_{Sistema} = \sum_{i=1}^{N} \Delta \mathbf{K}_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\sum \mathbf{L}_i^{Est}\right) + \sum_{i=1}^{N} \left(\sum \mathbf{L}_i^{Int}\right) = \Delta \mathbf{K}_{C.M} + \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta \mathbf{K}_i\right)_{Int}^{(C.M.)}$$

$$\left(\sum \mathbf{L}_i^{Est}\right)_{Cons} + \left(\sum \mathbf{L}_i^{Est}\right)_{NonCons.} + \left(\sum \mathbf{L}_i^{Int}\right)_{Cons} + \left(\sum \mathbf{L}_i^{Int}\right)_{NonCons.} = \Delta \mathbf{K}_{C.M} + \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta \mathbf{K}_i\right)_{Int}^{(C.M.)}$$

$$-\Delta \mathbf{U}_{C.M} + \left(\sum \mathbf{L}_i^{Est}\right)_{NonCons.} - \left(\sum \mathbf{U}_i^{Int}\right)_{Cons} + \left(\sum \mathbf{L}_i^{Int}\right)_{NonCons.} = \Delta \mathbf{K}_{C.M} + \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta \mathbf{K}_i\right)_{Int}^{(C.M.)}$$

Da cui possiamo ricavare

$$\left(\sum \mathbf{L}_i^{\mathbf{Est}}\right)_{\mathbf{NonCons.}} + \left(\sum \mathbf{L}_i^{\mathbf{Int}}\right)_{\mathbf{NonCons.}} = \Delta\mathbf{U}_{\mathbf{C.M}} + \Delta\mathbf{K}_{\mathbf{C.M}} + \left(\sum \mathbf{U}_i^{\mathbf{Int}}\right)_{\mathbf{Cons}} + \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta\mathbf{K}_i\right)_{\mathbf{Int}}^{(\mathbf{C.M.})}$$

$$\left(\sum \mathbf{L}_i^{\mathbf{Est}}\right)_{\mathbf{NonCons.}} + \left(\sum \mathbf{L}_i^{\mathbf{Int}}\right)_{\mathbf{NonCons.}} = \Delta\mathbf{E}_{\mathbf{C.M}}^{\mathbf{Mec}} + \sum \Delta\mathbf{E}_i^{\mathbf{Mec}}$$

9,6 URTI

Un fenomeno che è opportuni trattare con il modello di "sistema di punti materiali ", è rappresentato dagli **urti** che rappresenta un caso molto particolare interazione tra corpi. I corpi venendo a contatto si deformano, nascono di conseguenza delle forze di repulsione che agendo sui corpi stessi forniscono loro Energia Cinetica, se erano fermi prima dell'urto, o ne fanno variare la velocità (come vettore) se già in moto.

Esaminiamo il caso di **urto tra due corpi liberi** (o al massimo vincolati a muoversi su un piano). **Studiamo il moto del sistema formato dai due corpi** che definiamo come **sistema libero**, **durante l'urto**. Cioè vogliamo valutare come variano i parametri del moto dei due corpi a seguito dell'urto, che è un fenomeno che dura pochi centesimi di secondo; in questa fase non ci preoccupiamo del moto dei due corpi prima dell'urto (già noto per altra via) o del moto dopo che i due corpi si sono allontanati (che eventualmente studieremo con le leggi della dinamica dei sistemi; lo stato iniziale diventa quello subito dopo l'urto)

E' importante notare che si deve fare distinzione tra **sistema libero** (per esempio due palline da biliardo o due auto) e **sistema vincolato** (per esempio un proiettile che urta un'asta incernierata per un estremo) è fondamentale. I due casi si risolvono in maniera diversa.

Consideriamo due masse $\mathbf{m_1}$ e $\mathbf{m_2}$ che si muovono su un piano e vanno ad urtarsi. Indichiamo con $\vec{\mathbf{v}}_1$ e $\vec{\mathbf{v}}_2$ le velocità delle due masse subito **prima dell'urto** e con $\vec{\mathbf{u}}_1$ e $\vec{\mathbf{u}}_2$ le velocità delle due masse subito **dopo dell'urto**.

Lo stato del sistema prima dell'urto è generalmente noto; quello che si deve determinare sono proprio i parametri dopo l'urto.

Durante l'interazione (che si deve ricordare ha una durata dell'ordine del centesimo di secondo) si manifestano delle **Forze Interne** di interazione tra le masse che indichiamo con $\vec{\mathbf{F}}_{1,2}$ e $\vec{\mathbf{F}}_{2,1}$ $(\vec{\mathbf{F}}_{1,2} = -\vec{\mathbf{F}}_{2,1})$. Sul sistema agiscono pio anche due forze esterna: le forze Peso $\vec{\mathbf{P}}_i$ e le Reazioni del piano $\vec{\mathbf{R}}_i$ (non necessariamente liscio) sulle masse. Sicuramente queste forze influenzano il moto prima e dopo l'urto. Dobbiamo osservare che **l'urto vero e proprio**, cioè quando la dimensione del sistema formato dai due corpi a contatto è < della somma delle loro dimensioni **avviene in un intervallo molto piccolo**, mentre le forze di interazioni possono essere **molto intense e sicuramente non costanti**. Ha quindi senso calcolare l'impulso delle forze applicare al sistema $\mathbf{J}_{Tot}$ nell'intervallo di tempo τ = $\mathbf{t_2 - t_1}$:

$$\vec{\mathbf{J}}_{Tot} = \vec{\mathbf{J}}_{est} + \vec{\mathbf{J}}_{int} = \vec{\mathbf{J}}_{est} + \vec{\mathbf{J}}_{1,2} + \vec{\mathbf{J}}_{2,1}$$

dove:

$$\vec{\mathbf{J}}_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathbf{F}}_{1,2}\mathbf{dt} \qquad \vec{\mathbf{J}}_{2,1} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathbf{F}}_{2,1}\mathbf{dt} \qquad \vec{\mathbf{J}}_{Est} = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{\mathbf{F}}_{Est}\mathbf{dt}$$

Sebbene l'intervallo di tempo sia molto piccolo, le **forze interne di tipo impulsivo** possono esser molto intense per cui è possibile che $\vec{\mathbf{J}}_{1,2} = \bar{\vec{\mathbf{F}}}_{1,2}\,\tau \neq \mathbf{0}$ e $\vec{\mathbf{J}}_{2,1} = \bar{\vec{\mathbf{F}}}_{2,1}\,\tau \neq \mathbf{0}$ mentre **se le forze esterne non sono impulsive** $\vec{\mathbf{J}}_{est} = \bar{\vec{\mathbf{F}}}_{est}\,\tau \approx \mathbf{0}$ (perché t $\Rightarrow$ 0).

Poiché per la III Legge della Dinamica $\quad \vec{\mathbf{F}}_{2,1} = -\vec{\mathbf{F}}_{1,2} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{J}}_{2,1} = -\vec{\mathbf{J}}_{1,2}$

possiamo scrivere:

$$\vec{\mathbf{J}}_{Tot} = \vec{\mathbf{J}}_{1,2} + \vec{\mathbf{J}}_{2,1} = \Delta\vec{\mathbf{P}}_{Sist.} = \mathbf{0}$$

Possiamo allora concludere che **se le forze esterne non sono di tipo impulsivo**, **nell'urto vero e proprio** **si conserva la quantità di moto totale del sistema**, **calcolata un istante prima e un istante dopo l'urto**.

Variano le quantità di moto delle singole masse , ma in maniera **uguale e contraria**.

Il problema generale negli urti tra corpi è quello di determinare la velocità dei corpi subito dopo l'urto, nota quella prima dell'urto. In questo caso **il problema è perfettamente risolvibile solo in due casi particolari, cioè nel caso di urto perfettamente elastico e nel caso di urto completamente anelastico**.

Un urto si dice **completamente elastico** quando i corpi interagenti rimbalzano in modo che **durante l'urto si conserva l'energia cinetica totale del sistema**. In questo caso in base al teorema Lavoro Energia possiamo ammettere che **durante l'urto** $\left(\sum \mathbf{L}\right)_{\mathbf{Int}} = \mathbf{0}$ oppure che le Forze Interne siano conservative e anche che $\left(\sum \mathbf{L}\right)_{\mathbf{Est}} = \mathbf{0}$. Questa ultima condizione significa supporre che la posizione dei corpi interagenti sia praticamente invariata durante l'urto.

Un urto si dice **anelastico** quando parte dell'energia cinetica iniziale, prima dell'urto, viene **trasformata** in qualche altra forma di **energia non meccanica**. In questi casi il problema e abbastanza complesso e spesso non risolvibile con soli dati cinematica. Risulta risolvibile solamente l'**urto completamente anelastico**, cioè quando i **corpi interagenti restano a contatto** dopo l'urto.

Esaminiamo separatamente questi due casi particolari di urto distinguendo i casi di **urti centrali**, cioè **quando i vettori velocità** , **prima e dopo l'urto**, **sono uno sul prolungamento dell'altro**, e **urti non centrali**. In questo caso più generale le masse si muovono secondo direzioni diverse prima e dopo l'urto e per uno studio completo dell'urto è necessario conoscere quelli che vengono chiamati **parametri d'urto**, cioè gli angoli di uscita, rispetto alla direzione di una dei due corpi.

<u>9,7 URTO CENTRALE ELASTICO</u>.

Esaminiamo il caso di urto completamente elastico tra due corpi di massa $\mathbf{m_1}$ e $\mathbf{m_2}$ che si muovono secondo una direzione di cui fissiamo un verso positivo (per esempio quello verso destra). Indichiamo con $\vec{\mathbf{v}}_1$ e $\vec{\mathbf{v}}_2$ le velocità delle masse **prima dell'urto** e con $\vec{\mathbf{u}}_1$ e $\vec{\mathbf{u}}_2$ le velocità subito **dopo l'urto**. Noti i **vettori velocità iniziali**, vogliamo determinare i **vettori velocità finali**.

Il sistema da studiare è il sistema $\mathbf{m_1+m_2}$ e ci mettiamo in un sistema inerziale. Per il principio di conservazione della quantità di moto possiamo scrivere:

$$\mathbf{m_1\,\vec{v}_1 + m_2\,\vec{v}_2 = m_1\,\vec{u}_1 + m_2\,\vec{u}_2}$$

e nell'ipotesi di **urto perfettamente** elastico per il quale **si conserva l'energia cinetica totale del sistema**, possiamo scrivere:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{m_1\,v_1^2} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{m_2\,v_2^2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{m_1\,u_1^2} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{m_2\,u_2^2}$$

possiamo scrivere le due relazioni nella forma:

$$\mathbf{m_1\,(\vec{v}_1 - \vec{u}_1)(\vec{v}_1 + \vec{u}_1) = m_2\,(\vec{u}_2 - \vec{v}_2)(\vec{u}_2 + \vec{v}_2)}$$

$$\mathbf{m_1\,(\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = m_2\,(\vec{u}_2 - \vec{v}_2)}$$

e dividendo membro a membro si ottiene:

$$\mathbf{\vec{v}_1 + \vec{u}_1 = \vec{u}_2 + \vec{v}_2}$$

da cui:

$$\mathbf{\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)}$$

che si legge:

" **in un urto centrale completamente elastico la velocità relativa delle due masse dopo l'urto è uguale e contraria alla velocità relativa prima dell'urto**"

E' possibile ricavare le velocità finali in funzione delle velocità iniziali risolvendo il sistema :

$$\begin{cases} \mathbf{m_1\ \vec{v}_1 + m_2\ \vec{v}_2\ =\ m_2\ \vec{u}_1 + m_2\ \vec{u}_2} \\ \\ \mathbf{\vec{v}_1 - \vec{v}_2\ = -(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)} \end{cases}$$

E' da osservare che si tratta un sistema tra grandezze vettoriali,e quindi equivale a più sistemi relativi alle componenti delle velocità dove si deve tenere conto del verso positivo fissato.

Ricavando $\mathbf{\vec{v}_1}$ dalla seconda e sostituendo nella prima si ottiene:

$$\mathbf{\vec{u}_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2\ + 2\,m_1\ \vec{v}_1}{m_2 + m_1}}$$

e quindi:

$$\mathbf{\vec{u}_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1\ + 2\,m_2\ \vec{v}_2}{m_2 + m_1}}$$

E' da ricordate che il **moto è in una direzione e l'urto è centrale**.

Si possono esaminare alcuni **casi particolari**.

a) Masse uguali : $\mathbf{m_2 = m_1 = m}$

$$\begin{cases} \mathbf{\vec{u}_1 = \vec{v}_2} \\ \\ \mathbf{\vec{u}_2 = \vec{v}_1} \end{cases}$$

Le masse si scambiano le velocità in modulo e verso (la direzione è sempre la stessa).

b) Urto con **una massa ferma**, per esempio $\mathbf{\vec{v}_2 = 0}$

$$\begin{cases} \mathbf{\vec{u}_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_1} \\ \\ \mathbf{\vec{u}_2 = \dfrac{2\,m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1} \end{cases}$$

Se $\mathbf{m_1 > m_2}$

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{u}}_1 \ \ \textbf{concorde con} \ \ \vec{\mathbf{v}}_1 \\ |\vec{\mathbf{u}}_1| < |\vec{\mathbf{u}}_2| \\ |\vec{\mathbf{u}}_2| > |\vec{\mathbf{v}}_1| \qquad \mathbf{2\,m_1 > m_1 + m_2} \\ |\vec{\mathbf{u}}_1| < |\vec{\mathbf{v}}_1| \qquad \mathbf{m_1 - m_2 < m_1 + m_2} \end{cases}$$

Se $\mathbf{m_2 = m_1 = m}$

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{0} \\ \vec{\mathbf{u}}_2 = \vec{\mathbf{v}}_1 \end{cases}$$

Le masse si scambiano le velocità: m_1 si ferma e m_2 riparte con la stessa velocità che aveva m_1

Se $\mathbf{m_1 < m_2}$

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{u}}_1 = -\,\boldsymbol{\alpha}\,\vec{\mathbf{v}}_1 \\ |\vec{\mathbf{u}}_2| < |\vec{\mathbf{v}}_1| \qquad \mathbf{2\,m_1 < m_1 + m_2} \\ |\vec{\mathbf{u}}_1| < |\vec{\mathbf{v}}_1| \qquad \mathbf{m_1 - m_2 < m_1 + m_2} \end{cases}$$

c) $\mathbf{m_2} \Rightarrow \infty$ (urto contro un parete)

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{u}}_1 = -\vec{\mathbf{v}}_1 \\ \vec{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{0} \end{cases}$$

la massa $\mathbf{m_1}$ **inverte il moto**.

<u>9,8 URTO CENTRALE ELASTICO</u>.

Come gia accennato, negli urti anelatici determinare le velocità finali, note solamente quelle iniziali, è piuttosto complesso se non impossibile. Infatti pur rimanendo valido il principio di conservazione della quantità di moto totale del sistema, non possiamo fare nessuna ipotesi riguardo a bilanci energetici.

Il problema è risolvibile **solo nel caso di urto centrale completamente anelastico** tra due corpi di massa $\mathbf{m_1}$ e $\mathbf{m_2}$ che si muovono secondo una direzione di cui fissiamo un verso positivo (per esempio quello verso destra). Indichiamo ancora con $\vec{\mathbf{v}}_1$ e $\vec{\mathbf{v}}_2$ le velocità delle masse **prima dell'urto** e con $\vec{\mathbf{u}}$ la velocità dei due corpi subito **dopo l'urto**. Noti i **vettori velocità iniziali**, vogliamo determinare il **vettore velocità finale**.

Il sistema da studiare è il sistema $\mathbf{m_1+m_2}$ e ci mettiamo in un sistema inerziale. Per il principio di conservazione della quantità di moto possiamo scrivere:

$$\mathbf{m_1}\,\vec{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{m_2}\,\vec{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{m_1}\,\vec{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{m_2}\,\vec{\mathbf{u}}_2$$

da cui si ottiene:

$$\vec{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{m_1}\,\vec{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{m_2}\,\vec{\mathbf{v}}_2}{\mathbf{m_1} + \mathbf{m_2}}$$

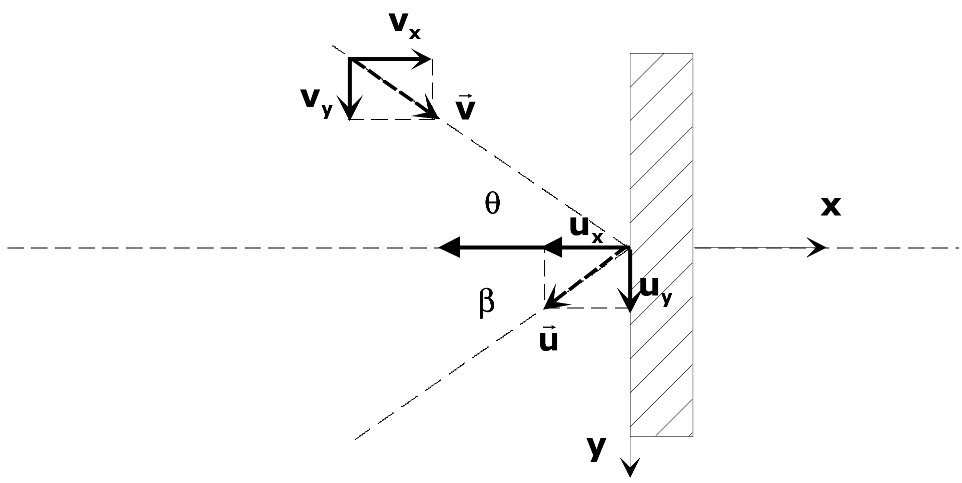
9,9 URTI IN DUE DIMENSIONI.

In questo caso più generale le masse si muovono secondo direzioni diverse prima e dopo l'urto. La trattazione del problema è identica al caso unidirezionale con la distinzione anche in questo caso di urto completamente elastico e completamente anelastico.

Esaminiamo più in dettaglio due casi tipici.

Esempio 1

Una massa m_1 si muove con velocità $\vec{\mathbf{v}}$ e urta in modo **non perpendicolare** una parete che supponiamo liscia. Il problema è analogo al caso di urto contro una massa $\mathbf{m_2} \to \infty$. Il sistema in esame è $\mathbf{m_1}$ **+ muro** e il sistema di riferimento inerziale ha assi orientati come in figura.



Possiamo dire che durante l'urto il sistema è isolato, quindi:

$$\sum \vec{F}_{Est} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{P}_{Sist} = \text{Cost.}$$

da cui:

$$m_1 \vec{v} = m_1 \vec{u} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} m_1 v_x = -m_1 u_x \\ m_1 v_y = m_1 u_y \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} v \cos\theta = - u \cos\beta \\ v \,\text{sen}\theta = u \,\text{sen}\beta \end{cases}$$

dalle quali si deduce che l'urto è elastico in quanto si può ricavare:

$$\begin{cases} v_x = -u_x \\ v_y = u_y \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 u^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta K = 0$$

inoltre facendo i rapporti si può ricavare che:

$$\text{tg}\,\theta = -\,\text{tg}\,\beta = \text{tg}\,(-\beta) \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \beta$$

che rappresenta la legge della riflessione meccanica secondo la quale:

a) la velocità $\vec{u}$ con cui rimbalza la massa, giace nel piano di $\vec{v}$ e **della normale al piano**;
b) **l'angolo di riflessione** è uguale **all'angolo di incidenza**.

Possiamo notare che la parete determina una **variazione di quantità di moto della massa**:

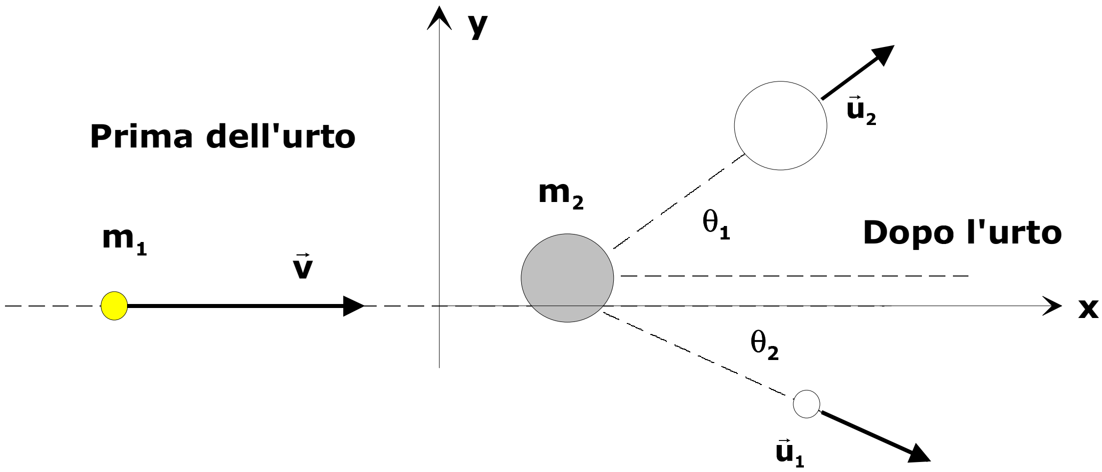
$$\Delta\vec{\mathbf{P}}_{Sist} = \vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\mathbf{p}}_i = \mathbf{m_1}\left[\left(-\mathbf{u}_x - \mathbf{v}_x\right)\cdot\vec{\mathbf{i}} + \left(\mathbf{u}_y - \mathbf{v}_y\right)\cdot\vec{\mathbf{j}}\right] = -\mathbf{2m_1 v_x}\cdot\vec{\mathbf{i}}$$

(avendo tenuto conto che $\mathbf{v_x} = -\mathbf{u_x}$) e che equivale anche all'impulso $\vec{\mathbf{J}}_{par,m_1}$ delle forze esterne al sistema, cioè di $\vec{\mathbf{N}}$ esercitata dalla parete sulla massa.

Si deve osservare che se la parete **non fosse stata liscia**, avremmo avuto anche una **componente y della reazione** della parete sulla massa, per cui varierebbero le considerazioni sulla **conservazione della componente y della quantità di moto**, **ma quelle sulla componente x**; **l'urto non sarebbe stato elastico**.

Esempio 2

m1Una massa $\mathbf{m_1}$ si muove con velocità $\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{v}\cdot\vec{\mathbf{i}}$ urta **non centralmente** in maniera **completamente elastica** una seconda massa m_2, inizialmente **ferma**.



Imponendo la **conservazione della quantità di moto dei sistema** $\mathbf{m_1+m_2}$, componendo secondo gli assi x e y, e tenendo conto che l'urto è completamente elastico possiamo scrivere possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \mathbf{m_1 v = m_1 u_{1,x} + m_2 u_{2,x}} \\ \mathbf{m_2 u_{2,y} = -m_1 u_{1,y}} \\ \mathbf{\frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2{}^2} \end{cases}$$

dalla figura si vede che:

$\mathbf{u_{1,x} = u_1 \cos\theta_1}$; $\mathbf{u_{1,y} = u_1\, sen\theta_1}$; $\mathbf{u_{2,x} = u_2 \cos\theta_2}$; $\mathbf{u_{2,y} = -u_2\, sen\theta_2}$

per cui:

$$\begin{cases} \mathbf{m_1 v = m_1 u_1 \cos\theta_1 + m_2 u_2 \cos\theta_2} \\ \mathbf{-m_2 u_2 sen\theta_2 = -m_1 u_1 sen\theta_1} \\ \mathbf{m_1 v^2 = m_1 u_1{}^2 + m_2 u_2{}^2} \end{cases}$$

dalle quali si ricava:

$$\begin{cases} \mathbf{u_1 = \frac{m_2}{m_1} \frac{sen\theta_1}{sen\theta_2} u_2} \\ \mathbf{m_1 v = m_1 \frac{m_2}{m_1} \frac{sen\theta_1}{sen\theta_2} u_2 \cos\theta_1 + m_2 u_2 \cos\theta_2} \\ \mathbf{m_1 v^2 = m_1 u_1{}^2 + m_2 u_2{}^2} \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} \mathbf{u_1 = \frac{m_2}{m_1} \frac{sen\theta_1}{sen\theta_2} u_2} \\ \mathbf{u_2 = \frac{m_2}{m_1} \frac{sen\theta_2}{\cos\theta_1 sen\theta_2 + sen\theta_1 \cos\theta_2} v} \\ \mathbf{m_1 v^2 = m_1 u_1{}^2 + m_2 u_2{}^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{u_1} = \dfrac{\mathbf{sen\theta_1}}{\mathbf{cos\theta_1 sen\theta_2 + sen\theta_1 cos\theta_2}}\mathbf{v} \\ \mathbf{u_2} = \dfrac{\mathbf{sen\theta_1}}{\mathbf{cos\theta_1 sen\theta_2 + sen\theta_1 cos\theta_2}}\mathbf{v} \\ \mathbf{m_2(cos\theta_1 sen\theta_2 + sen\theta_1 cos\theta_2)^2 = m_2 sen\theta_1{}^2 + m_1 sen\theta_2{}^2} \end{cases}$$

Caso particolare $m_1=m_2=m$

$$\begin{cases} \mathbf{u_1} = \dfrac{\mathbf{sen\theta_1}}{\mathbf{cos\theta_1 sen\theta_2 + sen\theta_1 cos\theta_2}}\mathbf{v} \\ \mathbf{u_2} = \dfrac{\mathbf{sen\theta_1}}{\mathbf{cos\theta_1 sen\theta_2 + sen\theta_1 cos\theta_2}}\mathbf{v} \\ \mathbf{(cos\theta_1 sen\theta_2 + sen\theta_1 cos\theta_2)^2 = sen\theta_1{}^2 + sen\theta_2{}^2} \end{cases}$$

e in particolare dalla terza si ottiene:

$$\mathbf{tg}\ \theta_1 = \mathbf{cotg}\ \theta_2 \qquad \Rightarrow \qquad \theta_1 + \theta_2 = 90°$$

Da questo esempio si può vedere come in generale la **sola conoscenza** delle **velocità iniziali** e del **tipo di urto** (elastico o anelastico) **non** sono sufficienti a determinare univocamente lo **stato finale** del sistema. Per determinare come le masse usciranno dopo l'urto è necessario avere informazioni anche sugli angoli θ_1 e θ_2 che sono detti **parametri d'urto**. In genere questo è possibile solo attraverso misure sperimentali sulla velocità iniziale e sulle traiettorie finali. Questo tipo di urto ha una applicazione notevole nello studio delle interazioni tra atomi e particelle. **E' proprio** dalla misura di questi dati che si ricavano informazioni sulle forze di interazione.