

MECCANISMI PER TRASMISSIONI (ORGANI DI TRASMISSIONE)

Sono classificati sotto questo nome meccanismi la cui funzione principale è la trasmissione di potenza con un rapporto di trasmissione costante o variabile a comando, giunti, innesti e freni.

10-1 Classificazione dei meccanismi a rapporto di trasmissione costante

I meccanismi a rapporto di trasmissione costante hanno la funzione di ridurre (*riduttori*) o aumentare (*moltiplicatori*) la velocità angolare, variandone inversamente la coppia trasmessa. Nella maggior parte dei casi si impiegano riduttori di velocità, essendo in genere i motori adatti a ruotare più velocemente dei carichi. Possono essere realizzati con ruote circolari a contatto diretto o mediato. Coppie e potenze possono essere trasmessi o utilizzando l'azione di forze tangenziali alle superfici a contatto (forze di attrito radente), nel qual caso si parla di *trasmissioni di forza*, o mediante l'azione delle forze normali alle superfici stesse, nel qual caso si parla di *trasmissioni di forma*. Nel sistema di trasmissione possono essere presenti solo corpi rigidi oppure almeno un elemento flessibile. Una classificazione delle trasmissioni in base a tali diverse possibilità è riportata Nella tabella seguente.

	Trasmissione di forza	Trasmissione di forma
Trasmissione rigida	Ruote di frizione	Ruote dentate
Trasmissione con flessibili	Cinghie (piane e trapezie). Funi	Catene. Cinghie dentate

Per ciascuno dei tipi di trasmissione verranno dati alcuni cenni descrittivi ed un'introduzione alle loro principali caratteristiche funzionali.

10-2 Ruote di frizione

La trasmissione con ruote di frizione costituisce il modo concettualmente più semplice per realizzare un dato rapporto di trasmissione costante. Due ruote circolari (ovvero cilindriche se si considera anche la terza dimensione), con raggi r_1 e r_2 , sono a contatto in un punto e vengono premute una contro l'altra da due forze N uguali ed opposte applicate ai rispettivi centri (Fig. 10.1-a).

Nel punto di contatto (Fig. 10.1-b) agisce su ciascuna ruota una forza $R_n = -N$ (diretta radialmente rispetto alla circonferenza) che può produrre una forza di attrito R_t su ciascuna ruota (tangente alla circonferenza). Per evitare strisciamento fra le ruote occorre che sia verificata la condizione

$$R_t \leq f_s N$$

essendo f_s è il fattore di attrito statico delle ruote. A regime il momento delle forze applicate alla ruota 1 deve essere nullo. Se ad essa è applicata la coppia motrice M_1 e si assume il centro della ruota come polo per il calcolo dei momenti, si ottiene

$$M_1 - R_t r_1 = 0$$

da cui

$$M_1 \leq f_s N r_1$$

Esiste cioè un limite alla coppia (e quindi alla potenza) che si può trasmettere senza che le ruote striscino e, anche per piccole coppie, occorre premere le ruote con forze N adeguate: tali forze caricano i cuscinetti delle ruote, producono elevati attriti volventi (che nel calcolo precedente sono stati trascurati) e notevole usura.

Se la condizione di non strisciamento è realizzata, sono uguali fra loro le velocità del punto di contatto pensato come punto delle due ruote: pertanto

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

ovvero il rapporto di trasmissione è

$$\tau = \omega_2/\omega_1 = r_1/r_2$$

Data la difficoltà di realizzare un contatto senza strisciamento le ruote di frizione sono usate per trasmettere piccole coppie e potenze. Fanno eccezione i casi in cui la rilevante forza peso del corpo collegato ad una delle due ruote costituisce la forza N , come nell'accoppiamento fra la ruota di un veicolo e la strada (o la rotaia) dove una delle ruote (la strada o la rotaia) assume raggio infinito.

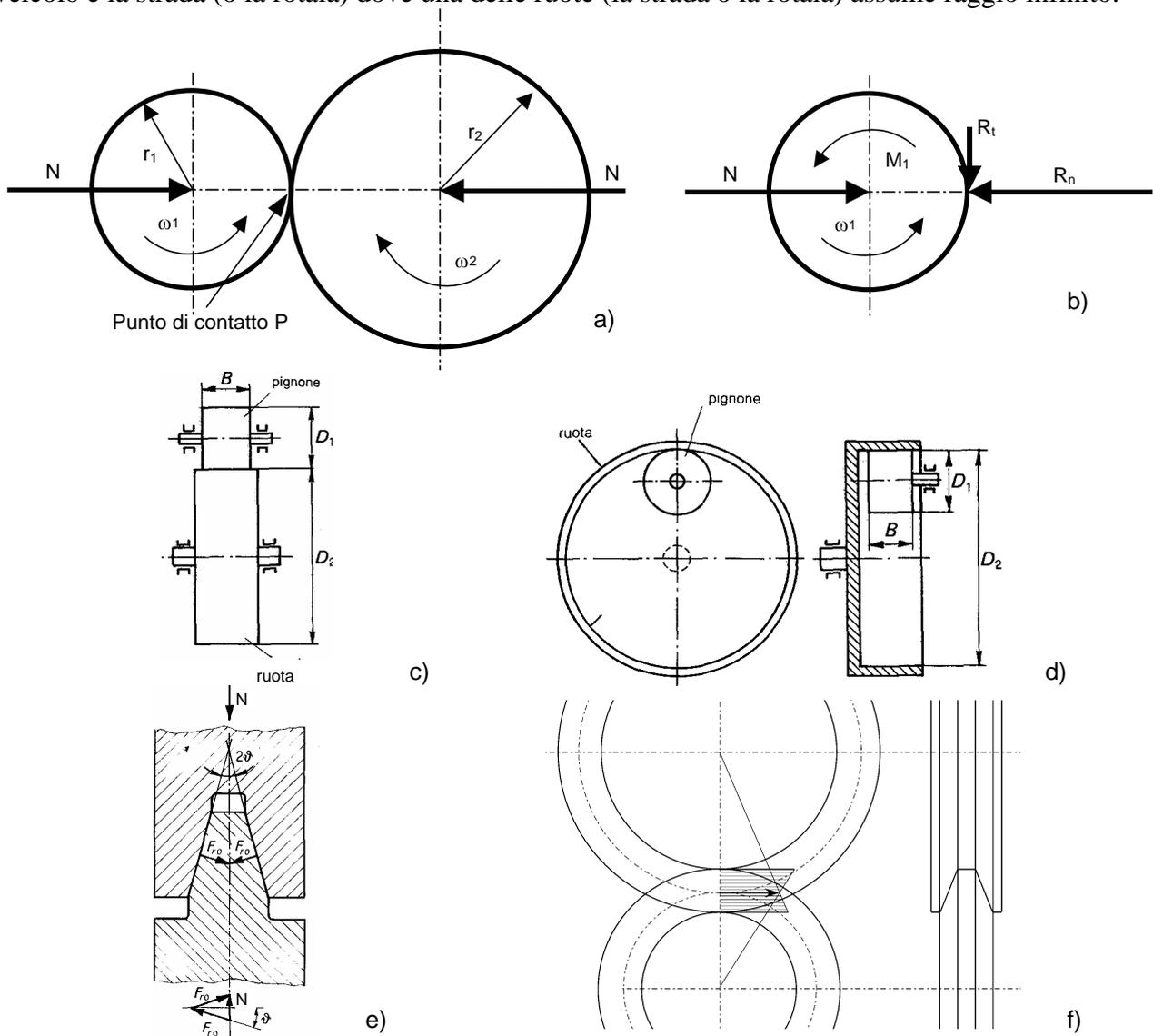


Fig. 10.1 Ruote di frizione a superfici cilindriche: esterne (c), interne (d) e a cono (e-f)

Adottando superfici di contatto cilindriche si ottengono le soluzioni riportate in Fig. 10.1-c e 10.1-d, con ruote esterne e con ruote interne rispettivamente. Per aumentare la forza tangenziale trasmessa, a parità di forza normale, si possono usare le ruote a cono, adottando superfici di contatto coniche con angolo di apertura 2θ (Fig. 10.1-e). Infatti, premendo le due ruote una contro l'altra con forza N , su entrambe le superfici coniche di contatto agisce la forza F_{r0} che, per l'equilibrio (vedere diagramma in basso alla Fig. 10.1-e) deve essere

$$F_{r0} = \frac{N}{2 \sin \theta}$$

e la forza tangenziale di attrito che ne risulta deve verificare la condizione di non strisciamento

$$F_t \leq 2f_s F_{r0} = \frac{f_s}{\sin \theta} N$$

ovvero

$$F_t \leq f^* N$$

avendo posto

$$f^* = f_s / \sin\theta \text{ (fattore di attrito apparente o virtuale)} \quad (10.1)$$

Essendo il seno sempre inferiore a 1 il fattore di attrito apparente è sempre maggiore di quello statico e si può dunque trasmettere una forza tangenziale tanto maggiore quanto l'angolo θ è piccolo. Valori usuali di θ sono attorno a 0.3 rad (20°) per il quale $f^* \cong 3f_s$. Valori troppo piccoli di θ porterebbero a valori eccessivi di F_{r0} con conseguenti deformazioni o rotture della ruota a cuneo femmina o all'inceppamento del meccanismo per "effetto cuneo". Si noti (Fig. 10.1-f) che esiste nelle ruote a cuneo uno strisciamento macroscopico, in quanto le velocità sono uguali solo in corrispondenza delle primitive.

Le perdite di potenza nelle trasmissioni con ruote di frizione sono dovute a: perdite per attrito volvente (e di strisciamento nel caso di ruote a cuneo) nel contatto fra le superfici delle ruote, perdite nei cuscinetti per via del carico N , perdite per ventilazione ed eventuale sbattimento del lubrificante. Di solito la somma delle perdite oscilla fra il 2 e il 5% dando un rendimento variabile fra 0.95 e 0.98.

10-3 Ruote dentate e ingranaggi

10-3.1 DENTATURE

Le ruote dentate realizzano la trasmissione di potenza fra corpi rigidi con contatto di forma per l'azione dei denti successivamente in contatto. Al contrario delle ruote di frizione la potenza non è trasmessa per attrito, ma attraverso le forze che i denti si scambiano perpendicolarmente ai propri profili. Due ruote dentate con i rispettivi denti a contatto (*in presa*) costituiscono (con il telaio) un *ingranaggio*. Gli ingranaggi sono gli organi di trasmissione più importanti e diffusi: possono trasmettere potenze elevatissime, hanno vita elevata e funzionamento regolare, hanno rapporto di trasmissione invariante, si possono costruire e montare in modo semplice e relativamente economico.

Cinematicamente le ruote dentate equivalgono a due ruote di frizione dette *primitive*. Con procedimenti geometrici classici si possono disegnare i profili dei denti che realizzano il desiderato movimento di rotolamento delle primitive. I profili più diffusi hanno la forma di una *evolvente*, una curva ottenuta come traiettoria di un punto appartenente ad una retta che rotola senza strisciare su una circonferenza, detta *di base*, che ha raggio minore di quello della primitiva della ruota. In Fig. 10.2-a il profilo di un dente è tracciato considerando la tangente t alle primitive nel punto di contatto P . Una retta r , passante per P , ed inclinata di θ rispetto a t , rotola senza strisciare sulla circonferenza di base, la traiettoria del punto P , assunto come punto di r , genera una evolvente che realizza il profilo del dente. La retta r è detta *retta di azione*, l'angolo θ è l'*angolo di pressione*.

Il procedimento utilizzato ha consentito di tracciare il profilo del dente per una ruota, indipendentemente dall'altra ruota. Seguendo lo stesso procedimento, con lo stesso angolo di pressione, per qualunque altra primitiva, si tratterà un secondo profilo ad evolvente. I profili così creati potranno essere accoppiati fra loro, generando il desiderato rotolamento senza strisciamento delle primitive (Fig. 10.2-b). In tal modo si garantirà il movimento desiderato delle primitive accoppiando profili ad evolvente tracciati su di esse con il medesimo angolo di pressione. In assenza di attrito la forza di contatto fra i denti sarà sempre diretta lungo la retta r .

I profili devono poter trasmettere potenza con continuità per tutta la rotazione delle ruote; si ricavano pertanto più profili in modo da assicurare che vi sia sempre contatto fra almeno una coppia di essi (uno su ogni ruota). Inoltre, per consentire il movimento delle ruote nei due versi si costruiscono altri profili simmetrici ai precedenti, realizzando così i denti della ruota (Fig. 10.3).

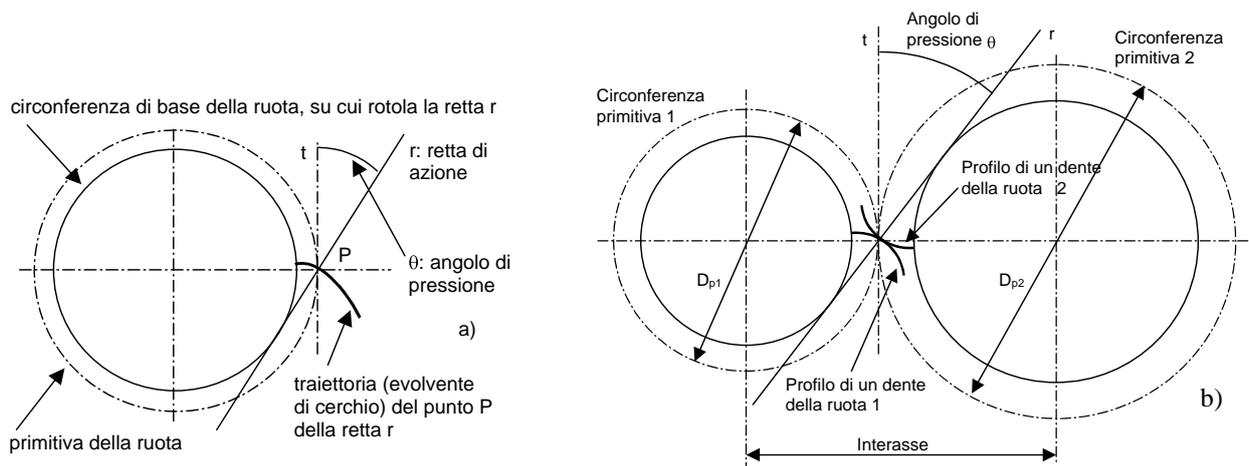


Fig. 10.2 Tracciamento di profili ad evolvente

Una volta tracciati i profili ad evolvente occorre stabilire l'altezza h dei denti e di quanto essi sporgano (*addendum*) o rientrano (*dedendum*) rispetto alle primitive. Questi valori devono consentire

- la continuità della trasmissione, ripartendo il carico anche fra più denti contemporaneamente in presa: ciò richiede che i denti abbiano altezza elevata;
- un limitato strisciamento fra i denti, basse sollecitazioni sugli stessi ed assenza di *interferenza* (compenetrazione tra i denti delle due ruote): ciò richiede che i denti abbiano altezza modesta.

Una soluzione di compromesso fra le contrastanti esigenze è fornita dal *proporzionamento modulare* (unificato) secondo il quale tutti i parametri geometrici della dentatura sono definiti in base ad una grandezza detta *modulo*. Gli ingranaggi a proporzionamento modulare sono anche detti *ingranaggi normali*.

I parametri indipendenti più significativi per definire una ruota dentata sono (Fig. 10.2 e 10.3):

- θ , *angolo di pressione*: determina la direzione (costante) della normale ai profili in contatto e della forza ideale (senza attrito) scambiata fra i denti di un ingranaggio; il valore usuale è di 20° ;
- z , *numero di denti*: il valore minimo del numero di denti della ruota più piccola di un ingranaggio è stabilito dalla necessità di non avere interferenza fra i denti; è funzione del rapporto di trasmissione e , nel caso di proporzionamento modulare, deve essere superiore a 17;
- m , *modulo della ruota*: è pari alla lunghezza dell'arco di primitiva fra i profili omologhi di due denti successivi (detto *passo*) divisa per π ; nel proporzionamento modulare determina la geometria del dente.

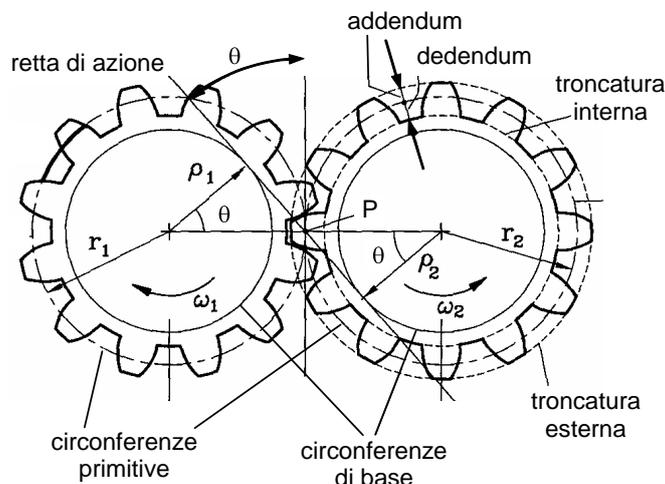


Fig. 10.3 Ingranaggio

Dai precedenti parametri si possono ricavare:

- D_p , diametro primitivo della ruota: $D_p = mz$;
- p , *passo della ruota*: è pari al modulo moltiplicato per π , $p = m\pi$;
- *spessore del dente* = $p/2$;
- *vano fra i denti* = $p/2$;
- L_p , lunghezza della circonferenza primitiva; $L_p = zm\pi$;
- h_a , *addendum*: sporgenza del dente al di fuori della primitiva; se la ruota ha proporzionamento modulare $h_a = m$;
- h_f , *dedendum*: rientranza del dente nella primitiva; se la ruota ha proporzionamento modulare $h_f = 1.25m$;
- h , *altezza totale del dente*: $h = h_a + h_f$; se la ruota ha proporzionamento modulare $h = 2.25m$.

E' possibile realizzare un ingranaggio accoppiando due ruote dentate qualunque con denti a profili ad evolvente e a proporzionamento modulare ogniqualvolta

- le ruote hanno lo stesso angolo di pressione;
- le ruote hanno lo stesso modulo.

L'ingranaggio così realizzato ha

- τ , rapporto di trasmissione: $\tau = \omega_2/\omega_1 = D_1/D_2 = z_1/z_2$;
- I , *interasse*: distanza fra i centri delle ruote: $I = (D_1 + D_2)/2 = (z_1 + z_2)m/2$

10-3.2 INGRANAGGI ORDINARI

Gli ingranaggi con tutti gli assi di rotazione fissi sono detti *ordinari*.

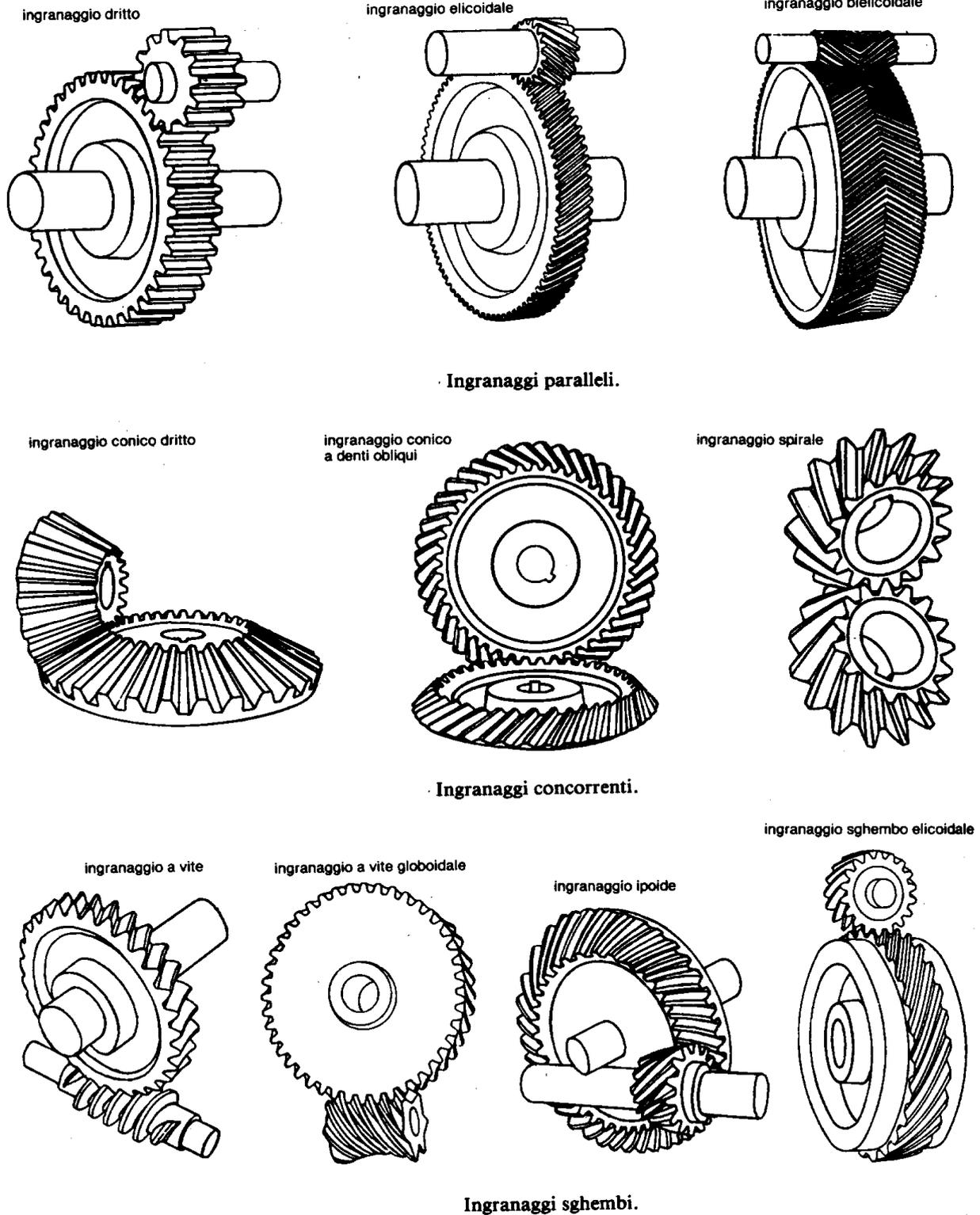


Fig. 10.4 Tipi di ingranaggi

Gli ingranaggi ordinari possono essere (Fig. 10.4):

- *paralleli*, se composti da ruote con assi di rotazione paralleli. La forma delle primitive delle ruote (tenendo conto della terza dimensione) è cilindrica; le dentature possono essere *diritte*, *elicoidali*, *bielicoidali*; le dentature elicoidali hanno funzionamento più dolce, silenzioso e pertanto rendimenti leggermente più elevati, ma generano spinte assiali; le bielicoidali, più complesse, hanno i vantaggi delle elicoidali ed in più il bilanciamento delle forze assiali;
- *concorrenti*, se composti da ruote con assi di rotazione che si intersecano; la forma delle primitive delle ruote (tenendo conto della terza dimensione) è a tronco di cono; le dentature possono essere *diritte*, *oblique*, *a spirale*;
- *sghembi*, se composti da ruote con assi di rotazione sghembi; le dentature possono essere *a vite*, *a vite globoidale*, *ipoidi*, *elicoidali*.

Collegando fra loro più ingranaggi si ottengono *treni di ingranaggi*. Con ingranaggi disposti in serie si ottengono rapporti di trasmissione pari al prodotto dei rapporti di trasmissione dei singoli ingranaggi (vedi Capitolo 6).

La dissipazione di energia nel movimento degli ingranaggi deriva principalmente dallo strisciamento fra i denti e dagli attriti nei cuscinetti ai quali sono appoggiate le ruote; vi sono inoltre perdite per ventilazione e sbattimento del lubrificante. Ingranaggi paralleli e concorrenti ben costruiti e ben lubrificati, funzionanti in scatole chiuse, hanno in genere rendimenti superiori a 0.97. Il rendimento degli ingranaggi sghembi è in generale molto più basso, dato che gli strisciamenti fra i denti sono molto maggiori che nel caso precedente. Per l'ingranaggio a vite e per l'ingranaggio sghembo elicoidale rendimenti superiori a 0.75 sono considerati elevati. Per l'ingranaggio a vite (con il quale si possono ottenere grandi riduzioni di velocità anche con costruzioni molto compatte) il rendimento può spesso scendere fino a valori intorno a 0.5. Questa elevata perdita di potenza viene accettata in applicazioni dove è conveniente che elevate forze di attrito tendano a frenare "automaticamente" la macchina qualora il suo funzionamento non sia corretto (per esempio per mancato funzionamento del freno): esempi sono i riduttori per ascensori e i cric per autovettura.

L'ingranaggio ipoide può avere rendimento confrontabile con quello degli ingranaggi paralleli o concorrenti; tale soluzione semplifica costruttivamente il meccanismo, in particolare il posizionamento dei cuscinetti, rispetto a quella con assi concorrenti.

Il verso di rotazione fra le ruote di ingranaggi può essere invertito, senza alterare il rapporto di trasmissione, utilizzando una *ruota oziosa* (Fig. 10.5).

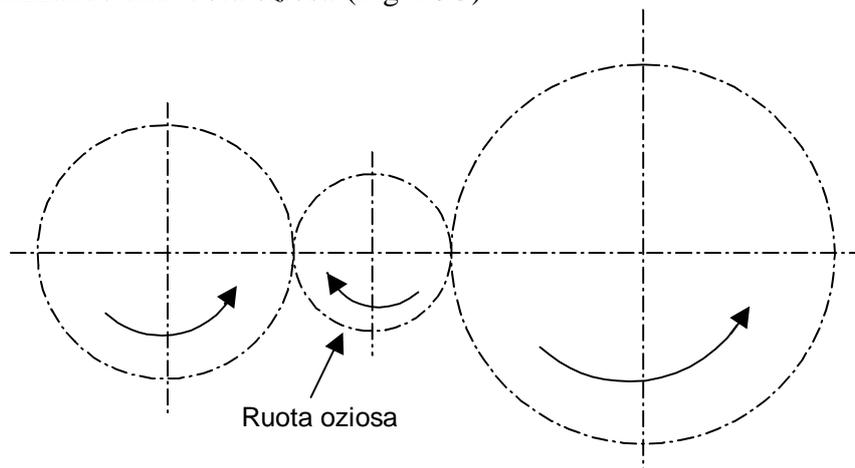


Fig. 10.5 Versi di rotazione con ruota oziosa

10-3.3 INGRANAGGI EPICICLOIDALI

Gli ingranaggi considerati fino ad ora hanno gli assi di rotazione fissi. Vengono detti *rotismi ordinari*. Quando almeno uno degli assi è in movimento si hanno *rotismi epicicloidali*.

L'esempio più semplice di rotismo epicicloidale è mostrato in Fig. 10.6 dove le ruote 1 e 2 di un ingranaggio (schematizzate attraverso le loro primitive) sono collegate rotoidalmente ad un corpo 3 a sua volta collegato rotoidalmente al telaio della macchina. Tenendo ferma la ruota 1 e facendo ruotare il corpo 3 rispetto al telaio, la ruota 2 ruota su sé stessa e attorno alla ruota 1.

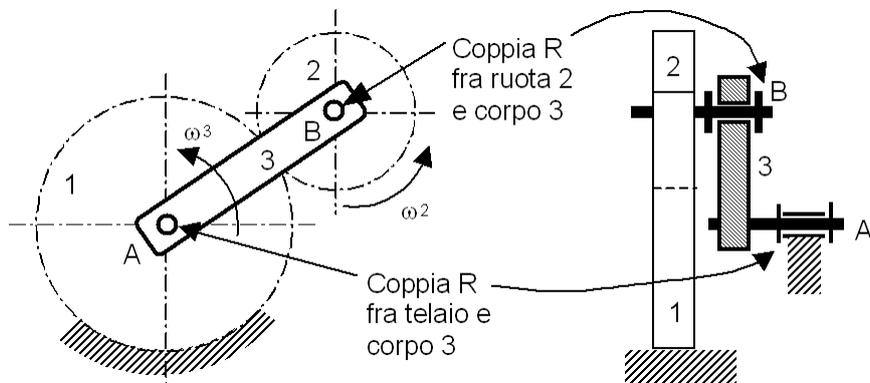


Fig. 10.6 Rotismo epicicloidale con due ruote e un portatreno

Questo semplice rotismo trova applicazione nei mescolatori, collegando il rotore del motore al corpo 3 (e lo statore al telaio) e le pale mescolatrici alla ruota 2. E' però molto più frequente il caso in cui si vogliono avere assi di rotazione fissi sia per il motore che per il carico. Occorre allora aggiungere al rotismo precedente almeno un'altra ruota con asse fisso, ottenendo le soluzioni visibili in Fig. 10.7. Le ruote dei rotismi epicicloidali che hanno l'asse fisso vengono dette *solari* (se a dentatura esterna) o *corone* (se a dentatura interna), mentre le ruote ad asse mobile sono dette *satelliti*. Il corpo al quale sono vincolati rotoidalmente i satelliti è detto *portasatelliti* o *portatreno*. Con linea sottile sono state rappresentate in figura le ruote non cinematicamente significative, ma necessarie (eventualmente con fasatura diversa da quella disegnata in figura) per il bilanciamento del rotismo e delle sue forze interne: in questo caso si ha *disposizione a planetario* un cui disegno è riportato anche in Fig. 10.8-a.

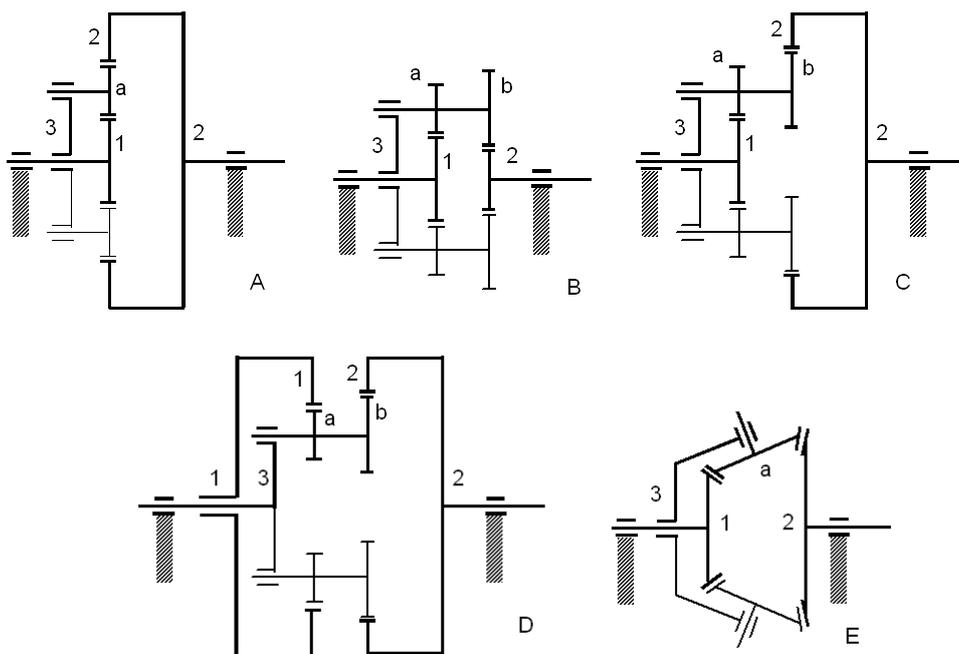


Fig. 10.7 Rotismi epicicloidali semplici (con due ingranaggi)

Tutte i rotismi della Fig. 10.7 possono essere usati, analogamente a quello con un ingranaggio, bloccando una delle ruote, ma possono anche essere usati lasciandole tutte libere di girare. Nella prima eventualità il meccanismo ha un grado di libertà (una rotazione in uscita in funzione di una in ingresso), nella seconda ne ha due e il rotismo è detto *combinatorio* (una rotazione in uscita in funzione di due in ingresso) o *differenziale* (due rotazioni in uscita, legate tra loro, in funzione di una in ingresso).

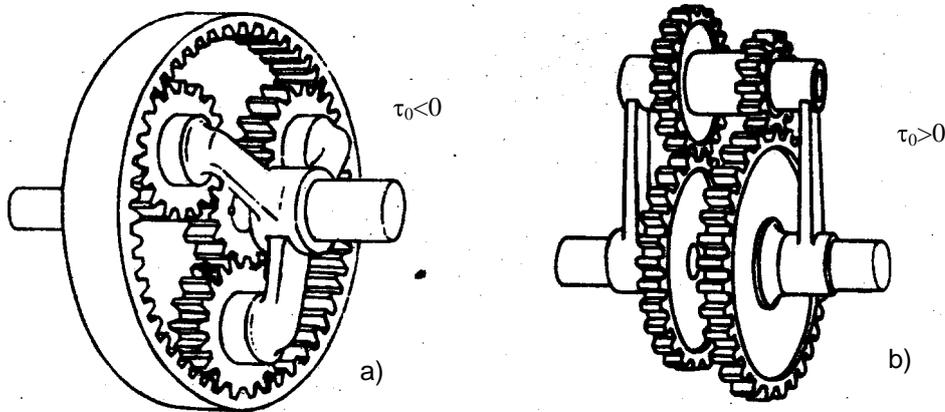


Fig. 10.8 Rotismi epicicloidali con τ_0 negativo e positivo

Caratteristica cinematica del rotismo è il *rapporto di trasmissione a portatreno fermo* τ_0 (detto anche *rapporto di trasmissione base*) che viene calcolato per il rotismo ordinario ottenuto bloccando il portatreno del rotismo epicicloidale e lasciando libere tutte le altre ruote; il rotismo a portatreno bloccato viene detto *rotismo base*. La tabella riporta le espressioni di τ_0 per i 5 casi di Fig. 10.7. In tabella τ_0 è il rapporto fra la velocità angolare della ruota 2 e la velocità angolare della ruota 1: il segno del rapporto è rilevante (positivo se versi concordi, negativo se discordi) e giustifica (in parte) la scelta della configurazione del rotismo. In tabella z_i indica il numero di denti della ruota i .

TIPO (Fig. 10.7)	A	B	C	D	E
$\tau_0 = \omega_2 / \omega_1$	$-z_1 / z_2$	$z_1 z_b / z_a z_2$	$-z_1 z_b / z_a z_2$	$z_1 z_b / z_a z_2$	$-z_1 / z_2$

Indicando con $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ le velocità effettive delle ruote 1 e 2 e del portatreno 3, e con ω_{1r}, ω_{2r} le velocità relative delle ruote 1 e 2 rispetto al portatreno, vale la *formula di Willis*

$$\tau_0 = \frac{\omega_{2r}}{\omega_{1r}} = \frac{\omega_2 - \omega_3}{\omega_1 - \omega_3} \quad (10.2)$$

che collega fra di loro le 3 velocità angolari effettive. Il rotismo ha dunque 2 gradi di libertà: due delle tre velocità angolari possono essere assegnate a piacere e la terza risulta determinata in funzione delle prime due e di τ_0 .

Per ottenere un riduttore (o un moltiplicatore) di velocità si blocca la rotazione rispetto al telaio di una delle ruote 1 o 2, riducendo il rotismo ad un grado di libertà. Indicando con 1 la ruota bloccata, per cui $\omega_1=0$, la formula di Willis (10.2) si riduce a

$$\tau_0 = \frac{\omega_2 - \omega_3}{-\omega_3}$$

ovvero

$$(1 - \tau_0)\omega_3 = \omega_2$$

Si hanno i due casi:

a) ruota 2 motrice, portatreno condotto

$$\tau = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{1}{1 - \tau_0} \quad \text{ovvero} \quad \tau_0 = 1 - \frac{1}{\tau}$$

b) portatreno motore, ruota 2 condotta

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_3} = (1 - \tau_0) \quad \text{ovvero} \quad \tau_0 = 1 - \tau$$

Volendo avere una forte riduzione di velocità ($|\tau| \ll 1$) è possibile usare la soluzione con portatreno motore e $\tau_0 \cong 1$. E' però dimostrabile che in tal caso il rendimento del rotismo diventa molto piccolo e tende a zero quando $|\tau|$ tende a zero.

Rotismi epicicloidali semplici possono essere collegati fra loro in varie combinazioni. Interessanti sono le realizzazioni di cambi di velocità per veicoli pesanti e per quelli a trasmissione automatica. In Fig. 10.9 è mostrato uno schema di una sezione di una parte di un cambio (senza la rappresentazione delle ruote necessarie per ottenere la retromarcia).

Nel rotismo composto si distinguono l'albero di ingresso 1 (collegato al motore), l'albero di uscita 2 (collegato al carico) e tre rotismi epicicloidali semplici, ciascuno costituito da 3 ruote secondo lo schema di Fig. 10.7-A:

- A (ruota solare a dentatura esterna), C (satellite a dentatura esterna), H (corona a dentatura interna);
- B (ruota solare a dentatura esterna), D (satellite a dentatura esterna), I (corona a dentatura interna);
- G (ruota solare a dentatura esterna), F (satellite a dentatura esterna), E (corona a dentatura interna).

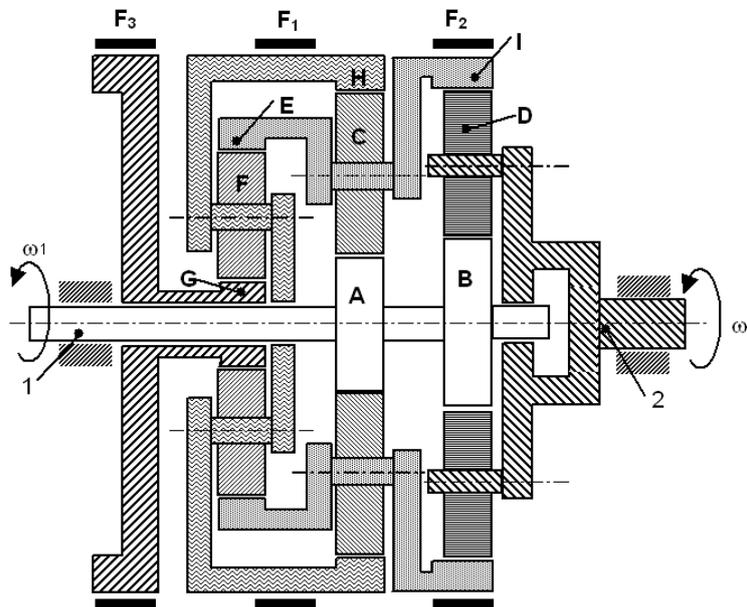


Fig. 10.9 Schema parziale del cambio epicicloidale

Le parti rigidamente collegate fra di loro sono evidenziate in figura con lo stesso tratteggio:

- l'albero 1 e le ruote A e B;
- la ruota H e il portatreno della ruota F₁;
- la ruota E, il portatreno della ruota C e la ruota I;
- la ruota G e una corona, non dentata alla sua sinistra;
- l'albero 2 e il portatreno della ruota D.

Le tre corone delle ruote G, H, I possono essere bloccate da tre freni a nastro (vedi capitolo 10-9) F_1, F_2, F_3 . Lo schema topologico del rotismo è riportato in Fig. 10.10 dove i quadrati rappresentano i tre rotismi epicicloidali semplici e le linee di connessione definiscono i collegamenti rigidi fra i diversi corpi dei rotismi. Scopo del rotismo è far variare il rapporto di trasmissione $\tau = \omega_2/\omega_1$ fra l'albero di uscita 2 e l'albero di ingresso 1, azionando alternativamente uno dei tre freni con cui si blocca la rispettiva corona.

Si consideri per primo il caso in cui il freno F_2 blocca la corona I. La conseguente trasmissione di movimento attraverso i treni planetari è mostrata in Fig. 10.10 (in alto a destra): essendo I bloccata, il rotismo B, D, I muove direttamente il portatreno e determina la velocità dell'albero di uscita; gli altri rotismi vengono trascinati, senza partecipare alla trasmissione di movimento da 1 a 2.

Applicando la (10.2) al rotismo B, D, I, si ottiene

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{-\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} = -\frac{Z_B}{Z_I}$$

da cui si ricava il rapporto di trasmissione uscita/ingresso

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{Z_B}{Z_B + Z_I}$$

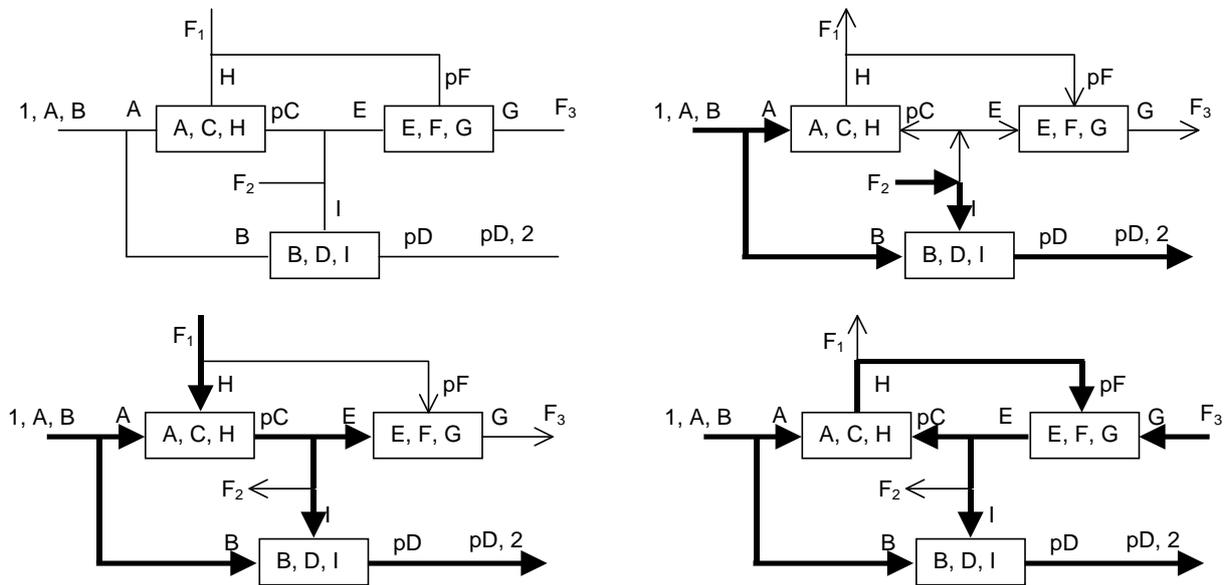


Fig. 10.10 Topologia del rotismo e trasmissione del movimento

Azionando invece il freno F_1 , viene bloccata la ruota H e quindi il rotismo A, C, H determina la velocità angolare del portatreno della ruota C. Dato che questo è connesso alla ruota I, anche la velocità di questa è determinata. Pertanto nel rotismo B, D, I, le velocità di B (uguale a quella dell'albero 1) e della ruota I si combinano determinando la velocità del portatreno della ruota D, che coincide con quella dell'albero di uscita. Lo schema della corrispondente trasmissione di movimento è riportato in Fig. 10.10 (in basso a sinistra). Per determinare il rapporto di trasmissione occorre applicare due volte la (10.2), una volta per ciascun rotismo epicicloidale coinvolto nella trasmissione da 1 a 2, cioè per i rotismi A, C, H e B, D, I

$$\frac{\omega_H - \omega_1}{\omega_1 - \omega_1} = \frac{-\omega_1}{\omega_1 - \omega_1} = -\frac{Z_A}{Z_H}$$

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 - \omega_2} = -\frac{Z_B}{Z_I}$$

dalle quali eliminando ω_1 si ottiene il rapporto di trasmissione uscita/ingresso:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_B}{z_B + z_I} + \frac{z_A z_I}{(z_A + z_H)(z_B + z_I)}$$

Quando si blocca il freno F_3 e con esso la ruota G, tutti i tre rotismi sono coinvolti nella trasmissione del movimento fra ingresso e uscita, il cui schema è riportato in Fig. 10.10 (in basso a destra). Applicando la (10.2) ai tre rotismi e sviluppando i calcoli si ottiene un terzo rapporto di trasmissione

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_B}{z_B + z_I} + \frac{z_A z_I (z_E + z_G)}{(z_B + z_I)(z_A z_E + z_A z_G + z_G z_H)}$$

Il rotismo di Fig. 10.9 può anche essere azionato sbloccando tutti i freni e collegando, mediante un innesto a frizione (non disegnato in figura) l'albero 1 alla ruota G. In tal modo le ruote A, B, G assumono tutte la stessa velocità angolare e il rotismo si comporta come un unico corpo rigido, cosicché la velocità di uscita è uguale a quella di ingresso e si realizza la presa diretta.

In definitiva, azionando alternativamente i tre freni o l'innesto a frizione si ottengono 4 diversi rapporti di trasmissione, calcolabili secondo le espressioni sopra riportate e funzioni dei numeri di denti delle diverse ruote dentate.

Un diverso modo di realizzare un cambio di velocità può essere ottenuto collegando un carico a più motori mediante rotismi combinatori. Si consideri ad esempio un sistema di sollevamento per il quale si richiede di realizzare 4 diverse velocità di sollevamento ($v, v/4, v/2, v/4$) e 4 di discesa ($-v, -3v/4, -v/2, -v/4$). Un rotismo combinatorio del tipo schematizzato in Fig. 10.7-A, avente ruote con numeri di denti $z_1 = 20, z_a = 20, z_2 = 60$, è utilizzato per azionare un tamburo sul quale si avvolge la fune che sostiene il carico. Un motore elettrico M_1 è collegato alla ruota solare del rotismo (ruota 1), un motore elettrico M_2 è collegato alla corona (ruota 2), il carico è collegato all'albero del portatreno (corpo 3) tramite un riduttore a rapporto di trasmissione costante. Per ottenere le desiderate velocità del carico occorre consentire al tamburo, e quindi al portatreno, di ruotare a differenti velocità, il che viene ottenuto azionando in diversi modi i due motori elettrici e combinandone gli effetti con il rotismo.

Dalla (10.2) si ricava

$$\frac{\omega_2 - \omega_3}{\omega_1 - \omega_3} = \tau_0 = -\frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{3}$$

che, risolta rispetto alla velocità di uscita in funzione delle velocità di ingresso, fornisce

$$\omega_3 = (\omega_1 + 3\omega_2)/4 \quad (10.3)$$

da cui si vede che le velocità dei due ingressi (solare 1 e corona 2) vengono combinate in modo pesato per produrre la velocità di uscita (portatreno 3). Le condizioni di funzionamento a regime di ciascun motore elettrico sono 3:

- velocità (approssimativamente) nominale in un verso di rotazione, $\omega = \omega_n$;
- velocità (approssimativamente) nominale nel verso opposto, $\omega = -\omega_n$;
- velocità nulla, $\omega = 0$.

Combinando le 3 possibilità di funzionamento si ottengono 9 diverse condizioni di azionamento del rotismo che, in base alla (10.3) producono 9 diverse velocità di rotazione del portatreno le cui espressioni sono riportate in tabella.

	$\omega_1 = \omega_n$	$\omega_1 = 0$	$\omega_1 = -\omega_n$
$\omega_2 = \omega_n$	ω_n	$3\omega_n/4$	$\omega_n/2$
$\omega_2 = 0$	$\omega_n/4$	0	$-\omega_n/4$
$\omega_2 = -\omega_n$	$-\omega_n/2$	$-3\omega_n/4$	$-\omega_n$

Condizioni di funzionamento di un rotismo combinatorio

Le 9 diverse velocità di rotazione dell'albero di uscita corrispondono a:

- albero di uscita fermo (entrambi i motori fermi);
- 4 rapporti di trasmissione (1/4, 1/2, 3/4, 1) con rotazione in un verso;
- 4 rapporti di trasmissione (1/4, 1/2, 3/4, 1) con rotazione in verso opposto.

Pertanto il rotismo consente di sollevare o abbassare il carico alle diverse velocità semplicemente accendendo o spegnendo i motori e variandone il verso di rotazione, il che per i motori asincroni trifase è facilmente ottenibile con lo scambio di due delle tre fasi.

Un noto esempio di rotismo epicicloideale è costituito dal *differenziale* utilizzato per adeguare le ruote motrici dei veicoli alle condizioni di aderenza al terreno. L'applicazione più comune si trova negli autoveicoli con 2 ruote motrici. Quando un veicolo marcia in rettilineo le due ruote motrici percorrono la stessa traiettoria e devono quindi ruotare dello stesso angolo in un dato tempo e quindi avere la stessa velocità. Quando il veicolo è in curva, la ruota esterna deve percorrere una traiettoria più lunga e quindi avere velocità maggiore della ruota interna (se si vuol mantenere aderenza fra ruote e terreno). Non è dunque possibile collegare direttamente entrambe le ruote all'unica uscita della trasmissione del veicolo (motore, cambio, rapporto di trasmissione base). Il differenziale ha la funzione di collegare l'uscita della trasmissione, che ha velocità angolare ω_u , con le due ruote, consentendo a queste di assumere le velocità angolari ω_s e ω_d , compatibili con il raggio della curva e con la necessità di mantenere aderenza. Lo schema del differenziale si ottiene da quello di Fig. 10.7-E facendo uguali le ruote 1 e 2.

Le ruote dentate 1 e 2 sono collegate al veicolo nel modo seguente: l'albero di uscita della trasmissione (disegnato in alto al centro in Fig. 10.11) mette in rotazione la scatola del differenziale tramite un ingranaggio (conico od ipoide) che realizza il rapporto di trasmissione base.

- la scatola del differenziale costituisce il portatreno del rotismo ($\omega_u = \omega_3$);
- la ruota dentata solare di sinistra è collegata, tramite un semiasse, alla ruota motrice di sinistra del veicolo ($\omega_s = \omega_1$);
- la ruota dentata solare di destra è collegata, tramite un semiasse, alla ruota motrice di destra del veicolo ($\omega_d = \omega_2$);
- sebbene per la realizzazione del rotismo sia necessaria una sola ruota satellite, ne viene aggiunta una seconda, simmetricamente disposta, per bilanciare le forze di inerzia.

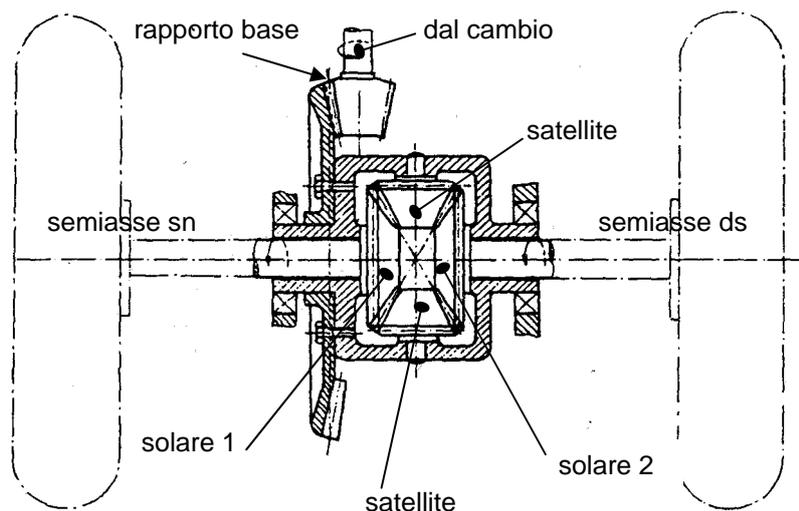


Fig. 10.11 Schema di un differenziale automobilistico

Dato che le ruote 1 e 2 hanno lo stesso numero di denti e che la ruota a è oziosa, il rapporto di trasmissione base è

$$\tau_0 = -z_1/z_2 = -1$$

e applicando la (10.2):

$$\frac{\omega_2 - \omega_3}{\omega_1 - \omega_3} = \tau_0 = -1$$

ossia:

$$\omega_u = \frac{\omega_s + \omega_d}{2} \quad (10.4)$$

Pertanto il differenziale non impone alle ruote del veicolo di procedere alla stessa velocità della sua scatola, ma che questa sia uguale alla media delle velocità delle ruote. In tal modo in rettilineo le due ruote possono avere $\omega_u = \omega_s = \omega_d$; in una curva a destra si avrà $\omega_s > \omega_u > \omega_d$; in una curva a sinistra si avrà $\omega_s < \omega_u < \omega_d$.

Un evidente svantaggio del differenziale si evidenzia se l'aderenza di una delle due ruote motrici diventa molto piccola (per esempio se una ruota è sul ghiaccio mentre l'altra è sull'asfalto. In questo caso il differenziale consente alla ruota con elevata aderenza di restare ferma mentre l'altra ruota striscia: infatti la (10.4) è perfettamente compatibile con l'arresto di una delle due ruote mentre l'altra gira a velocità doppia di quella della scatola.

Il rendimento dei rotismi epicicloidali può essere molto diverso dal rendimento del corrispondente rotismo ordinario ottenuto bloccando il portatreno. Ciò è dovuto al fatto che, al contrario di quanto avviene nei rotismi ordinari, la potenza non passa in ugual misura attraverso le varie parti del rotismo, ma si distribuisce in percorsi diversi (si dice che c'è *ricircolo di potenza* internamente al rotismo). Senza entrare nei dettagli del problema si riporta un grafico (Fig. 10.12) in cui si mostra l'andamento del rendimento di un rotismo epicicloidale semplice in funzione del rapporto di trasmissione ottenibile. Si osserva che il rendimento è elevato per rapporti di trasmissione non troppo spinti, ma diminuisce molto rapidamente per rapporti di trasmissione che tendono a zero. Nel caso di riduttore con portatreno condotto e per rapporti molto spinti il movimento può divenire impossibile.

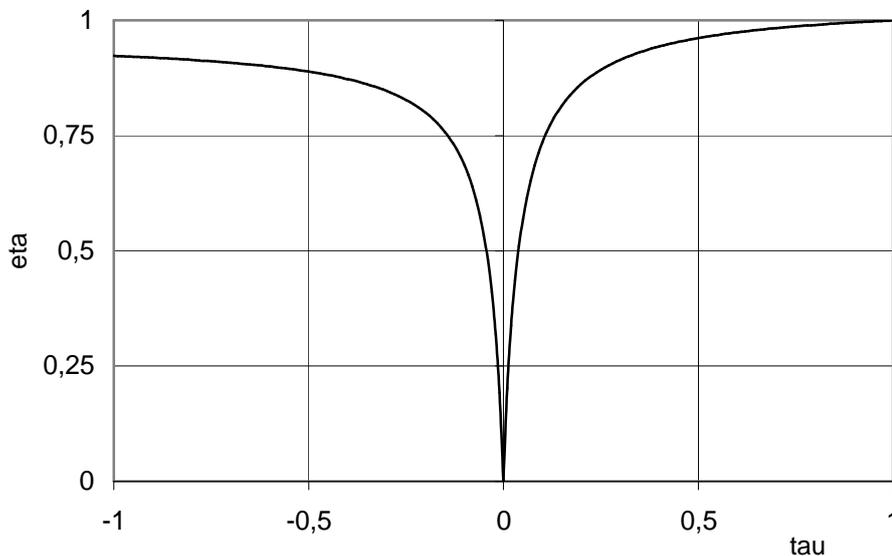


Fig. 10.12 Rendimento di un rotismo epicicloidale (portatreno motore)

Esistono trasmissioni interessanti in cui gli assi di ingranaggi non sono fissi, e realizzano dunque un rotismo epicicloidale, senza che però questo sia facilmente riconoscibile negli schemi evidenziati in precedenza. Un esempio è riportato in Fig. 10.13-a dove sono schematizzati il polso e l'organo di presa (pinza) di un robot industriale. Il polso non ha i tre gradi di libertà di rotazione che ne garantirebbero il completo orientamento, ma ne ha solo due: i suoi schemi cinematici sono riportati in Fig. 10.13-b e 10.13-c. In Fig. 10.13-b si vede la sola catena cinematica che realizza i due gradi di libertà di rotazione del terminale mediante la successione di due coppie rotoidali, mentre in Fig. 10.13-c sono schematizzate anche le catene cinematiche che portano il movimento dai motori a tali

coppie. La pinza può ruotare su sé stessa (movimento 1) e ruotare fuori dal piano del disegno (movimento 2).

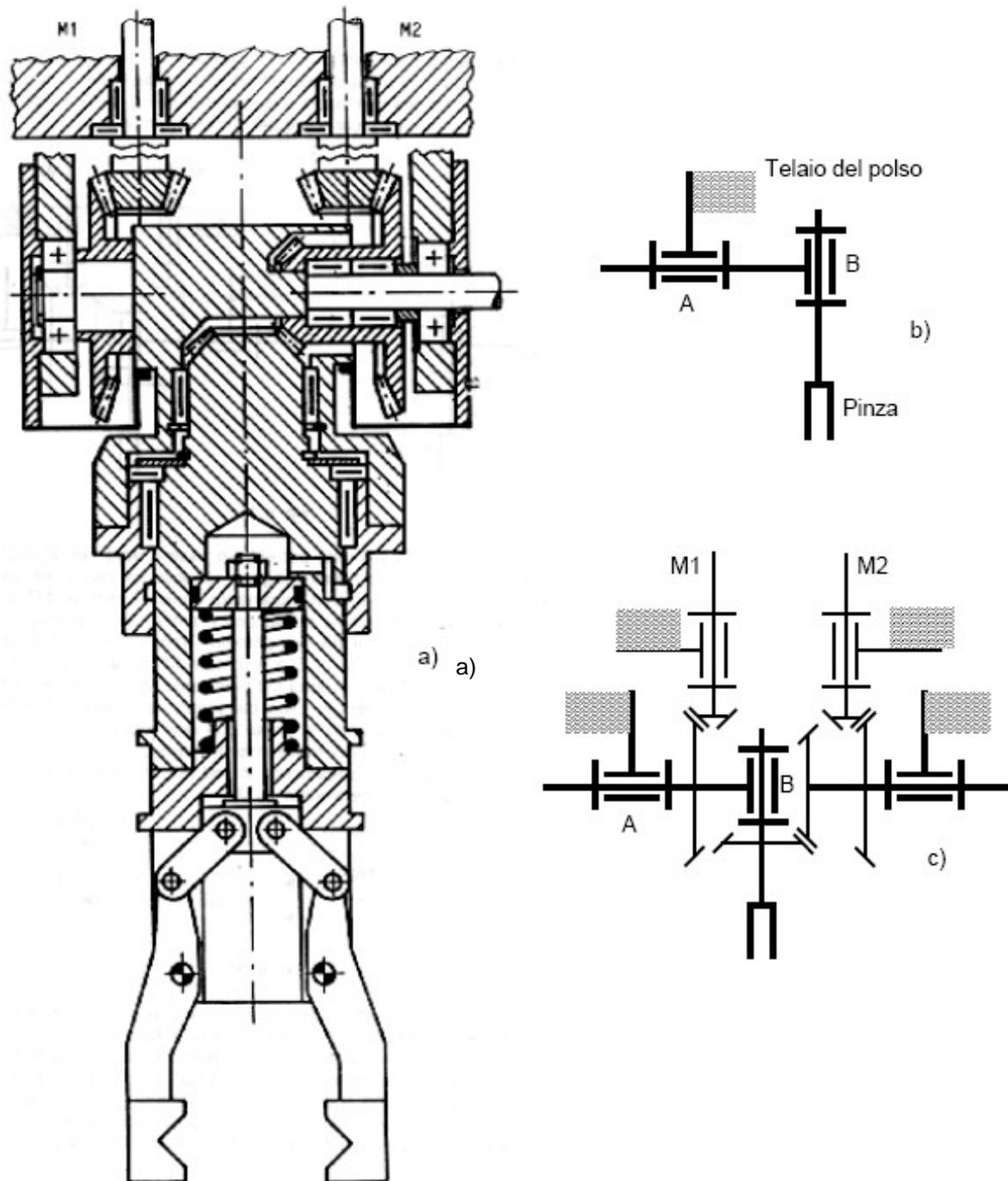


Fig. 10.13 Polso e pinza di un robot e catena cinematica del polso

I motori (e gli eventuali riduttori di velocità) potrebbero essere applicati direttamente alle coppie rotoidali A e B, ma nella soluzione in figura vengono collocati sul telaio del polso, trasferendo il movimento dai motori alle coppie mediante ingranaggi conici. Il motore M1 aziona (tramite un ingranaggio conico) la coppia A, il motore M2 aziona (tramite due ingranaggi conici in serie) la coppia B. Per effetto della configurazione del sistema i movimenti delle coppie non sono più indipendenti. E' facile vedere che se si blocca il motore M1 e si aziona M2 si ottiene il solo movimento della coppia B, ma se si aziona il motore M1 bloccando M2, si ottengono movimenti sia di A che di B. Infatti quando il corpo terminale esce dal piano del disegno, l'ultima ruota conica è

costretta a ruotare su sé stessa essendo in presa con una ruota che è bloccata. La Fig. 10.14 mostra lo schema dell'accoppiamento dei movimenti. Pertanto, se si desidera far ruotare solo la coppia A, occorre azionare contemporaneamente M1 ed M2, in modo da compensare con M2 la rotazione del terminale su sé stesso provocata da M1. Il che può essere ottenuto con un adeguato sistema di controllo, sia con un dispositivo meccanico piuttosto complesso.

La pinza è costituita da un sistema articolato piano (Fig. 10.15) ad un grado di libertà, con 5 corpi mobili (rispetto al corpo terminale del robot), 1 coppia prismatica e 6 coppie rotoidali (lo schema cinematico della pinza è anche rappresentato in Fig. 1.5 del Capitolo 1). Il movimento della pinza è ottenuto controllando lo spostamento della coppia prismatica, il che viene fatto inviando olio in pressione nel cilindro soprastante. Il movimento di ritorno è ottenuto con una molla.

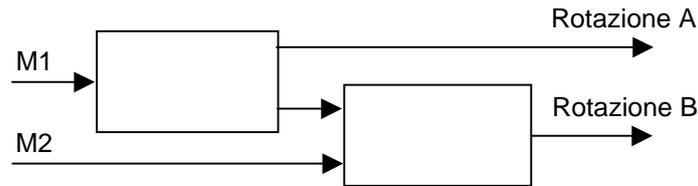


Fig. 10.14 Combinazione delle rotazioni dei motori

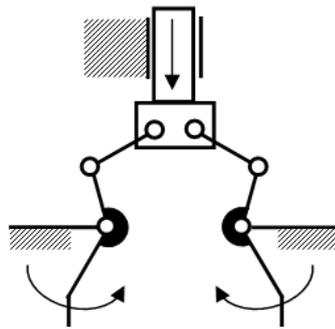


Fig. 10.15 Schema cinematico della pinza del robot

10-3.4 RIDUTTORI DI VELOCITÀ E MOTORIDUTTORI

Nella Fig. 10.16 sono disegnati 3 esempi di riduttori. Il primo, è un riduttore con un ingranaggio (uno *stadio di riduzione*) ad assi paralleli e dentatura diritta; il secondo ha due ingranaggi (due *stadi di riduzione*) ad assi paralleli a denti elicoidali; il terzo ha tre ingranaggi (tre *stadi di riduzione*) il primo a ruote coniche per assi concorrenti, gli ultimi due ad assi paralleli.

Come già visto, il rapporto di trasmissione del riduttore è il prodotto dei rapporti di trasmissione dei singoli ingranaggi e il rendimento del riduttore è il prodotto dei rendimenti dei singoli ingranaggi. Le applicazioni dei riduttori di velocità possono riguardare casi singoli o speciali nei quali è conveniente effettuare un progetto ad hoc cercando la soluzione ottimale di un problema ben circoscritto. Rientrano in questa categoria i riduttori navali e i cambi di velocità per autoveicoli. D'altro canto è molto frequente che per le applicazioni più varie si scelga un riduttore *di serie*, disponibile sul mercato e compreso nei cataloghi dei costruttori.

I costruttori di ingranaggi presentano a catalogo anche sistemi di serie per riduzione di velocità già forniti di adeguati motori, detti *motoriduttori*.

Data la molteplice varietà delle applicazioni esistono molte possibilità di montaggio e combinazione fra diversi tipi di ingranaggi e motori corredandoli, quando richiesto, di ulteriori elementi di trasmissione, quali freni e variatori di velocità.

Le caratteristiche operative dei motoriduttori riguardano:

- ingombro: l'apparato deve essere compatto;
- possibilità di montaggio: la costruzione deve prevedere flangia di attacco o piedi per il collegamento alle altre parti della macchina;
- comportamento in esercizio: la velocità di rotazione deve essere costante, senza oscillazioni, il rendimento elevato, il rumore minimo, la vita sufficientemente lunga;
- semplicità di manutenzione: la manutenzione deve essere ridotta al minimo e deve poter essere effettuata con utensili facilmente reperibili e con competenze tecniche non specialistiche; i lubrificanti non devono essere di tipo speciale.

Le potenze trasmesse da motoriduttori di serie vanno in genere da frazioni di kW a centinaia di kW. Ovviamente non è possibile disporre di un motoriduttore di serie con qualunque potenza desiderata e quindi i motoriduttori vengono costruiti scaglionando la potenza (o la coppia) in valori discreti. Uno scaglionamento molto stretto favorisce meglio le esigenze di impiego, ma richiede una fabbricazione poco economica e aumenta il prezzo di ogni unità. Uno scaglionamento troppo largo può costringere all'uso di un motoriduttore molto più grande di quanto necessario. Si adottano quindi soluzioni di compromesso. Gli scaglionamenti vengono effettuati in base ai numeri normali con ragione fra 1.4 e 2. Analogamente è necessario scaglionare anche i valori del rapporto di trasmissione.

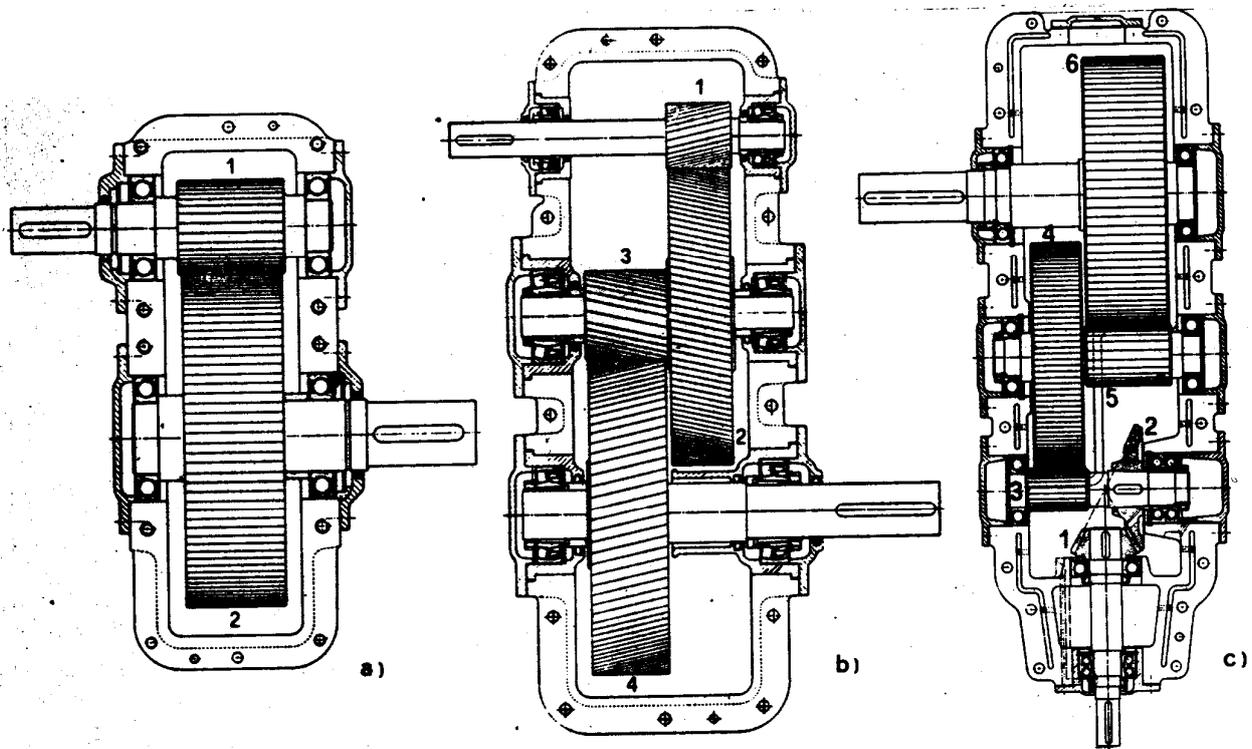


Fig. 10.16 Esempi di riduttori ad ingranaggi

I riduttori possono avere uno, due o tre stadi di riduzione. Per riduttori ad assi paralleli è buona norma realizzare il primo stadio con ingranaggi a dentatura elicoidale. Essi hanno comportamento migliore di quelli a denti dritti (miglior rendimento, maggior regolarità di ingranamento, minor rumorosità), ma producono spinte assiali; tuttavia nel primo stadio le velocità sono elevate e le forze trasmesse piccole, per cui la spinta assiale non è eccessiva. Gli angoli di elica sono compresi fra 15° e 30° . Lo stadio di riduzione finale (lento) trasmette le forze maggiori per cui può essere conveniente realizzarlo con dentature drette per evitare spinte assiali. Se si adotta invece la dentatura elicoidale si useranno angoli d'elica fra 8° e 10° . Se lo stadio di riduzione intermedio ha entrambe le dentature elicoidali, le forze assiali possono essere in parte bilanciate adottando versi opposti delle eliche dei due ingranaggi e/o angoli d'elica opportuni.

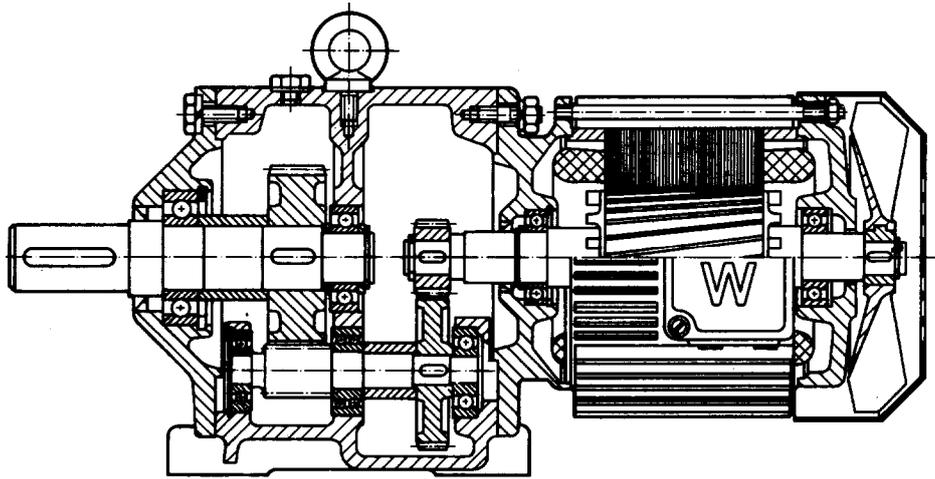


Fig. 10.17 Motoriduttore a due stadi ad assi paralleli

Un motoriduttore a due stadi ad ingranaggi per assi paralleli è schematizzato in Fig. 10.17. A destra si vedono, attraverso una sezione parziale della carcassa, lo statore del motore asincrono trifase e il rotore a gabbia, sull'estrema destra del quale è applicata una ventola per il raffreddamento. La carcassa è alettata per facilitare lo smaltimento del calore prodotto dai fenomeni dissipativi. A sinistra in figura si vede il riduttore che presenta due stadi di riduzione (due ingranaggi cilindrici). Per il primo stadio di riduzione si utilizza un ingranaggio con ruote elicoidali dati i vantaggi di queste (miglior rendimento, maggior regolarità di ingranamento, minor rumorosità). Per il secondo stadio di riduzione si utilizza un ingranaggio con ruote a denti diritti (per evitare elevate spinte assiali). Alla carcassa del motoriduttore, realizzata in più parti collegate da viti prigioniere in modo da render agevole il montaggio e l'eventuale sostituzione di pezzi, è avvitato un *golfare di sollevamento* che ne facilita il trasporto e la messa in opera. Tutti i cuscinetti sono volventi a sfere.

La lubrificazione può essere ad olio o a grasso. Quella con olio è in generale preferibile ed avviene per sbattimento: l'olio che riempie parzialmente la carcassa del riduttore viene trascinato e spruzzato sulle pareti dal movimento degli ingranaggi. Oltre a lubrificare i cuscinetti e le dentature, l'olio sottrae calore alle parti in movimento e lo trasferisce alla carcassa per essere da questa smaltito verso l'esterno. Il cambio dell'olio è realizzato in modo semplice e rapido dato che la carcassa dispone di un foro di uscita in basso e uno di ingresso in alto, mentre il cambio del grasso richiederebbe tempo e operazioni più complicate tanto che spesso non viene effettuato.

La soluzione di Fig. 10.17 con l'asse dell'albero del motore allineato all'asse dell'albero di uscita impone che l'interasse I' tra l'albero motore e l'albero intermedio sia uguale all'interasse I'' tra lo stesso albero intermedio e quello di uscita. Dato che l'interasse di un ingranaggio è pari alla semisomma dei diametri delle ruote e che un diametro è uguale al modulo m dell'ingranaggio per il numero di denti z della ruota, risulta

$$I' = m' (z_1 + z_2)/2$$

$$I'' = m'' (z_3 + z_4)/2$$

essendo m' e m'' i moduli dei due ingranaggi, z_1, z_2, z_3, z_4 i numeri di denti delle ruote.

Deve pertanto valere la condizione

$$m' (z_1 + z_2) = m'' (z_3 + z_4)$$

che va rispettata tenendo conto che i numeri di denti sono numeri interi e che i valori dei moduli non sono continui, ma devono essere scelti in un insieme discreto di valori unificati.

Questa condizione può essere evitata costruendo denti (a proporzionamento non modulare) con correzione dei profili con variazione di interasse.

10-3.5 FORZE AGENTI NEI RIDUTTORI

Si consideri ancora il motoriduttore a 2 stadi di Fig. 10.17. Per procedere al calcolo degli alberi di un riduttore e alla scelta dei cuscinetti è necessario conoscere le forze agenti su di essi. Nel caso di trasmissioni ad ingranaggi il calcolo viene effettuato considerando le forze ideali, trascurando gli effetti di attrito.

Per prima cosa occorre stabilire uno schema statico degli alberi e dei loro cuscinetti. In genere gli alberi sono schematizzati da travi di sezione costante o variabile a seconda se il diametro degli alberi sia costante o variabile. I cuscinetti sono schematizzati da vincoli statici in accordo alle possibilità di orientamento che i cuscinetti consentono all'asse di rotazione. Solitamente per i cuscinetti a lubrificazione fluida, per quelli ad una corona di sfere e per quelli orientabili, nei quali sono possibili piccole variazioni angolari della direzione dell'asse di rotazione, si adotta lo schema del semplice appoggio, mentre per cuscinetti a rulli si adotta lo schema dell'incastro. La risultante struttura trave-vincoli può risultare isostatica o iperstatica. In Fig. 10.17 l'albero motore è sostenuto da due cuscinetti a sfere e può essere schematizzato come una trave appoggiata in corrispondenza dei cuscinetti. I carichi agenti sulla trave sono, oltre ai pesi delle varie parti (prevalentemente quelli dell'albero e del rotore del motore elettrico) la coppia del motore, la forza applicata ai denti in presa del pignone, diretta secondo la linea di azione dell'ingranaggio e le reazioni dei cuscinetti, dirette radialmente rispetto all'albero. Lo schema statico conseguente è isostatico. Si osserva il carico *a sbalzo* dovuto al fatto che il pignone è collocato all'esterno dei cuscinetti. Il modello è isostatico.

Considerazioni identiche alle precedenti possono essere svolte per l'albero di uscita sostenuto da due cuscinetti a sfere e quindi schematizzato come una trave appoggiata in corrispondenza dei cuscinetti. I carichi agenti sulla trave sono, oltre ai pesi delle varie parti (prevalentemente quelli dell'albero e della ruota dentata) la forza/coppia resistente, la forza applicata ai denti in presa della ruota, diretta secondo la linea di azione dell'ingranaggio e le reazioni dei cuscinetti, dirette radialmente rispetto all'albero. Lo schema statico conseguente è isostatico. Si osserva ancora il carico a sbalzo dovuto al fatto che il carico è collocato all'esterno dei cuscinetti. Il modello è isostatico.

L'albero intermedio è supportato da tre cuscinetti a rotolamento: due a sfere alle estremità, uno intermedio a due corone di sfere. Mentre i primi due sono schematizzabili con semplici appoggi, il terzo richiede un vincolo di incastro. I carichi agenti sulla trave che schematizza l'albero sono: la forza applicata alla ruota dell'ingranaggio di collegamento con l'albero motore, la forza applicata al pignone dell'ingranaggio di collegamento con l'albero di uscita. Lo schema statico conseguente è iperstatico.

Una volta stabilito lo schema statico del riduttore si determinano le forze agenti su di esso.

Per ingranaggi cilindrici a denti dritti la forza trasmessa fra i denti a contatto è sempre ortogonale ai profili dei denti nel loro punto di contatto e quindi diretta secondo la linea di azione, inclinata dell'angolo di pressione θ rispetto alla tangente alle circonferenze primitive. Come esempio si consideri ancora l'albero di uscita del riduttore di Fig. 10.17. In Fig. 10.18 è riportato uno schema delle varie forze agenti (esclusi i pesi). È stato assunto un sistema di riferimento x, y, z , con l'asse z coincidente con l'asse di rotazione, l'asse x parallelo alla tangente alle primitive dell'ingranaggio nel punto di contatto, l'asse y diretto radialmente rispetto alle ruote.

Dati i versi di rotazione del pignone e della ruota le forze agenti sull'albero sono:

- \mathbf{R} forza che il pignone esercita sulla ruota, con componente \mathbf{R}_t tangente alle primitive e componente \mathbf{R}_n radiale;
- \mathbf{F} forza che il carico esercita sull'albero, applicata al punto E posto a distanza e dall'asse di rotazione, con proiezioni \mathbf{F}_x e \mathbf{F}_y lungo i rispettivi assi;
- \mathbf{R}_A reazione che il cuscinetto A esercita sull'albero con proiezioni \mathbf{R}_{Ax} e \mathbf{R}_{Ay} lungo i rispettivi assi;
- \mathbf{R}_B reazione che il cuscinetto B esercita sull'albero con proiezioni \mathbf{R}_{Bx} e \mathbf{R}_{By} lungo i rispettivi assi.

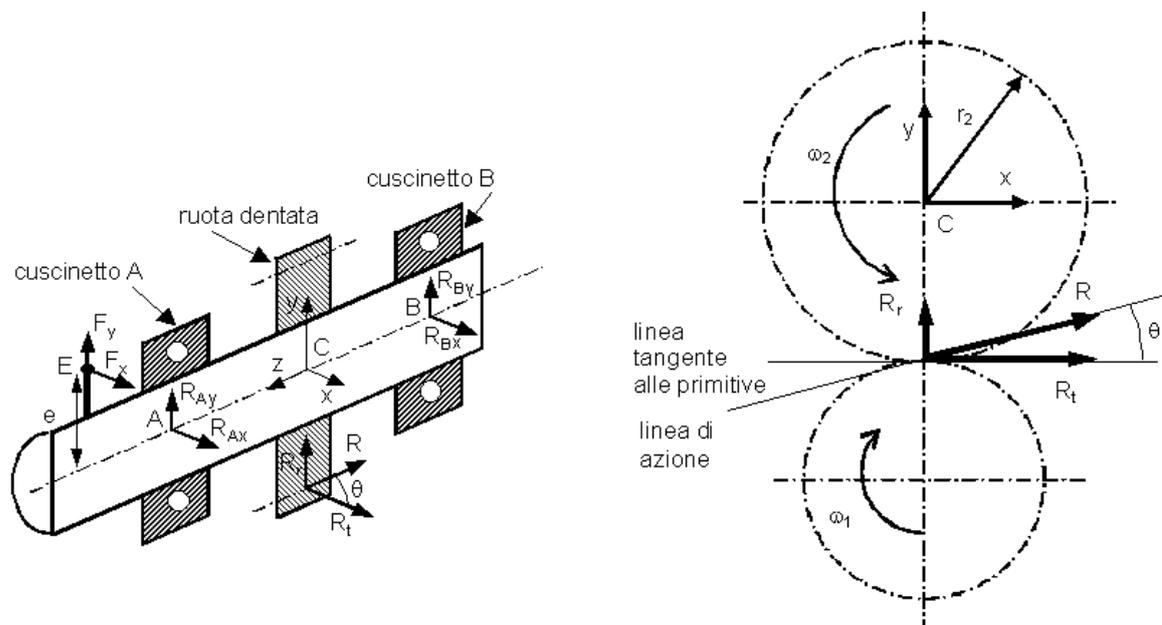


Fig. 10.18 Forze agenti sull'albero di uscita del riduttore

Considerando le proiezioni delle forze prima nel piano yz poi nel piano xz si ottengono gli schemi statici di Fig. 10.19.

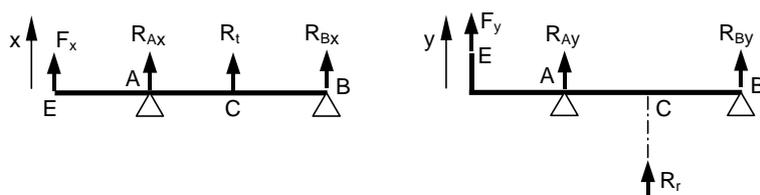


Fig. 10.19 Schemi statici dell'albero di uscita

Essendo il sistema isostatico è possibile determinare le reazioni nei cuscinetti con le equazioni di equilibrio della statica. Precisamente:

nel piano xz, equilibrio dei momenti rispetto ai punti A e B dove sono applicate le forze incognite R_{Ax} e R_{Bx})

$$-F_x EA + R_t CA + R_{Bx} BA = 0 \text{ (rispetto al punto A)}$$

$$-F_x EB - R_{Ax} AB - R_t CB = 0 \text{ (rispetto al punto B)}$$

dalle quali si ricavano le incognite

$$R_{Bx} = \frac{F_x EA - R_t CA}{BA}$$

$$R_{Ax} = \frac{-F_x EB - R_t CB}{AB}$$

Analogamente, nel piano yz

$$-F_y EA + R_r CA + R_{By} BA = 0 \text{ (rispetto al punto A)}$$

$$-F_y EB - R_{Ay} AB - R_r CB = 0 \text{ (rispetto al punto B)}$$

dalle quali si ricavano le incognite

$$R_{By} = \frac{F_y EA - R_r CA}{BA}$$

$$R_{Ay} = \frac{-F_y EB - R_r CB}{AB}$$

Si osservi che negli schemi di Fig. 10.19 le forze sono costanti e con posizioni fisse nello spazio. Dato che gli alberi ruotano, le sollecitazioni su di essi non sono costanti: nel moto relativo si può immaginare ciascun albero fisso mentre le forze ruotano attorno ad esso. Ciò comporta che gli alberi e i cuscinetti non sono sollecitati staticamente, ma *a fatica*.