

FORZE NELLE COPPIE CINEMATICHE REALI ASCIUTTE

3-1 Attrito radente (o di strisciamento)

Quando due corpi sono a contatto fra di loro nasce una forza – perpendicolare alla superfici a contatto - che si oppone alle azioni che tendono a far compenetrare i corpi. Il fenomeno per il quale fra due superfici a contatto si manifestano anche forze parallele alle superfici è chiamato *attrito radente* o *attrito di strisciamento*. Se le superfici sono in movimento relativo queste forze provocano dissipazione di energia, usura delle parti e riscaldamento. Si distinguono tre tipi di attrito radente:

- attrito *secco* se le superfici a contatto sono asciutte;
- attrito *limite* se le superfici sono separate, almeno in gran parte, da una sottile pellicola (*film*) di lubrificante, in genere dello spessore di una sola molecola;
- attrito *fluido* se le superfici sono completamente separate da una pellicola relativamente spessa di lubrificante nel quale si sviluppa una pressione tale da equilibrare le forze perpendicolari alle superfici a contatto.

La zona superficiale di un corpo solido presenta in genere strati diversamente costituiti (Fig. 3.1). Sul materiale base si sovrappone uno strato *incrudito*, sul quale si depositano: uno strato di ossido, uno strato, in genere non continuo, di gas adsorbiti, vapore d'acqua od ossigeno, uno strato di sostanze contaminanti. Inoltre la superficie non è regolare, ma presenta irregolarità (*rugosità*) dovute al tipo di lavorazione effettuato sul materiale. Nelle superfici delle macchine prodotte industrialmente la rugosità varia, in dipendenza del tipo di lavorazione e delle specifiche del pezzo prodotto, da qualche centesimo di μm a circa un mm.

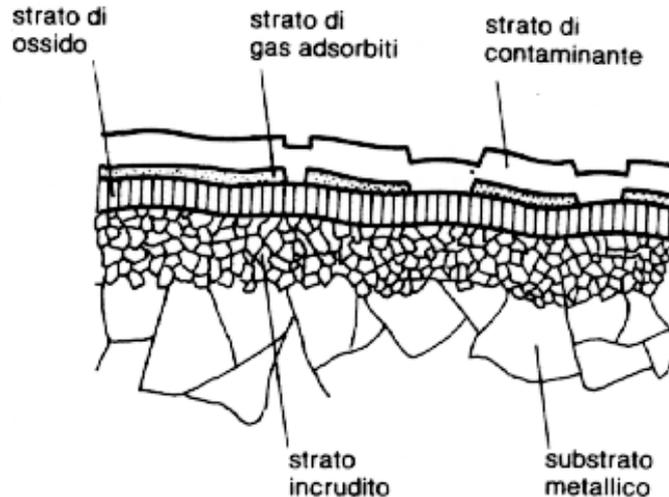


Fig. 3.1 Superficie di un corpo solido

Nel caso di attrito secco l'irregolarità fa sì che quando due superfici teoricamente identiche (per esempio due superfici piane) sono messe a contatto, questo non avviene sull'intera area teorica di contatto, ma in un numero limitato di zone, dove le asperità di una superficie incontrano quelle dell'altra. Per esempio, il contatto fra superfici di acciaio soggette a modeste compressioni può interessare un'area di circa un millesimo di quella teorica. Dato che il contatto avviene su un'area molto limitata, quando le superfici vengono compresse una sull'altra le pressioni nelle zone di contatto risultano molto elevate e si realizzano legami di adesione intermolecolare. I fenomeni fisico-chimici che si manifestano nelle zone di contatto sono molto complessi, ma possono schematizzarsi sommariamente come segue:

- la grande pressione provoca delle microsaldature fra le superfici a contatto: pertanto se si vuole

produrre moto relativo fra due corpi a contatto occorre applicare, tangenzialmente alle superfici, una forza sufficiente a rompere tutte le microsaldature. Questa è la causa principale delle forze di attrito fra superfici asciutte. Detta N la forza normale agente fra le superfici a contatto e T_{lim} la forza tangenziale necessaria per rompere le giunzioni si definisce *fattore di attrito statico* o *aderenza* il rapporto (adimensionale)

$$f_s = T_{lim}/N$$

- il fattore di attrito dipende principalmente dal materiale costituente i due corpi, ma anche dallo stato delle superfici (se ossidate o no, pulite o contaminate, ecc.); in condizione di normale funzionamento nelle macchine il fattore di attrito è decisamente inferiore a quello che si avrebbe tra superfici pulite e non ossidate;
- in un modello semplice (modello di Coulomb) si ammette che il fattore di attrito sia indipendente dalla superficie di contatto teorica. Infatti, a parità di forza normale N , aumentando la superficie teorica di contatto aumentano anche le aree effettive di contatto, ma diminuiscono proporzionalmente le pressioni fra le superfici in queste aree. I due fenomeni si bilanciano (grossomodo) e la forza T_{lim} non cambia;
- sempre secondo il modello di Coulomb si ammette che il fattore di attrito sia indipendente dalla forza N e dalla velocità.

3-2 Coppia prismatica

3-2.1 COPPIA PRISMATICA FERMA (ATTRITO STATICO)

Si considerino ora due corpi (1 e 2) a contatto, uno dei quali (il corpo 1) fisso. Al corpo 2 è applicata dall'esterno una forza N normale alle superfici (teoriche) di contatto fra i corpi (Fig. 3.2; in questa figura e in diverse figure successive i due corpi sono disegnati un po' separati, per poterli meglio distinguere, ma vanno considerati in contatto lungo la superficie comune). In condizioni di equilibrio il corpo 1 deve applicare al corpo 2 una reazione uguale ed opposta a N , indicata in figura con R_n . Si applichi al corpo 2 un'ulteriore forza T tangente alle superfici di contatto. Le microsaldature prodotte dalla pressione di contatto impediscono il movimento di 2 finché $T < T_{lim}$: in altri termini in condizioni di equilibrio il corpo 1 applica al corpo 2 anche una reazione tangenziale uguale ed opposta alla forza T , indicata in figura con R_t .

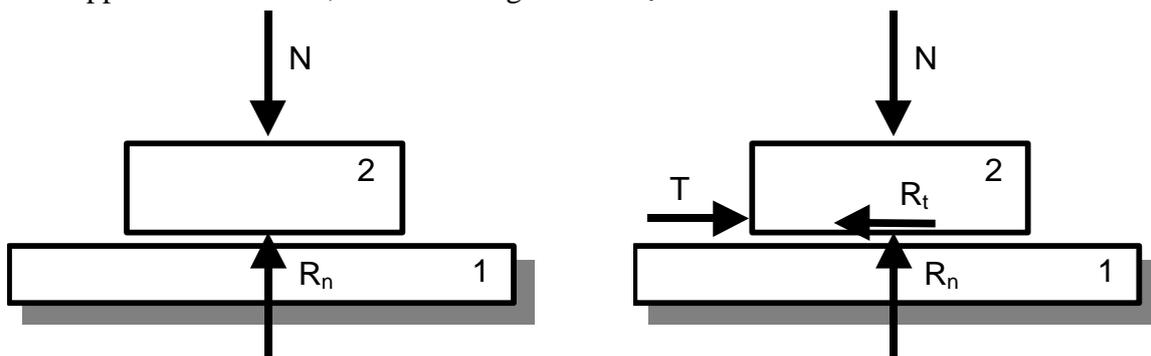


Fig. 3.2 Forze agenti in una coppia prismatica con attrito

Dunque in condizioni di equilibrio in assenza di strisciamento fra le parti

$$T=R_t; \quad N=R_n; \quad T < T_{lim}$$

ossia

$$R_t < f_s R_n \tag{3.1}$$

Il fatto che la componente della reazione tangente al vincolo, R_t , non possa superare il valore limite rispetto alla componente normale, R_n , dato dalla (3.1) può essere interpretato geometricamente osservando la Fig. 3.3, in cui si vede la reazione vincolare \mathbf{R} con le sue componenti. Dato che, indicando con γ l'inclinazione della \mathbf{R} rispetto alla normale al vincolo, $R_t = \tan \gamma R_n$, la (3.1) implica che per non avere strisciamento γ non può superare un valore limite φ , tale che $\tan \varphi = f_s$ ossia che la

reazione vincolare \mathbf{R} non può avere inclinazione maggiore di un angolo $\varphi = \text{atan } f_s$. Tale angolo è detto *angolo di attrito (statico)*.

Se si immagina che il corpo 2 sia vincolato a 1 da una coppia piana, si avrà un angolo di attrito per ogni possibile forza \mathbf{T} applicata al corpo nel piano: l'insieme delle direzioni definite da tali angoli è detto *cono di attrito*: per non avere strisciamento fra i corpi \mathbf{R} deve essere interna al cono di attrito.

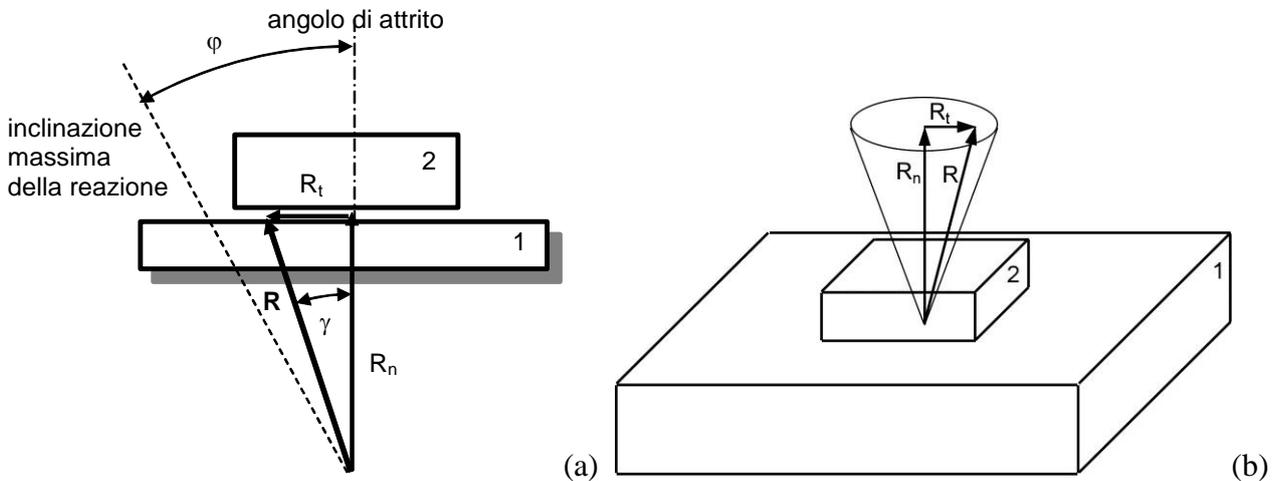


Fig. 3.3 Inclinazione della reazione e angolo di attrito (a); cono di attrito (b)

3-2.2 COPPIA PRISMATICA IN MOVIMENTO (ATTRITO DINAMICO)

Quando T supera T_{lim} avviene la rottura delle microsaldature e il corpo 2 comincia a muoversi. Si può osservare sperimentalmente che, in generale, per mantenere il movimento a velocità costante occorre applicare una forza T più piccola di quella necessaria per avviarlo e che questa forza è approssimativamente proporzionale alla forza N . Pertanto in condizioni di equilibrio in presenza di strisciamento si avrà

$$T=R_t; \quad N=R_n; \quad T = f_d N$$

ovvero

$$R_t = f_d R_n \tag{3.2}$$

dove f_d (che risulta in genere essere minore di f_s) è detto *fattore di attrito dinamico*.

Un modello semplice dell'attrito dinamico (modello di Coulomb e Morin) ammette che il fattore f_d :

- dipende dal tipo dei materiali a contatto e dallo stato delle loro superfici;
- non dipende dalla forza N né dall'area teorica di contatto;
- non dipende dalla velocità relativa dei corpi.

Interpretando geometricamente il modello di Coulomb e Morin si vede che durante il movimento la reazione vincolare \mathbf{R} è inclinata rispetto alla normale al vincolo di un angolo costante φ_d (che può essere interpretato come *angolo di attrito dinamico*), in genere più piccolo dell'angolo di attrito statico, in modo da opporsi al movimento. Fra l'angolo di attrito dinamico e il fattore di attrito dinamico valgono le relazioni $f_d = \tan \varphi_d$ ovvero $\varphi_d = \text{atan } f_d$.

Nella realtà f_d dipende dalla velocità: si può avere un rapido decremento del fattore a basse velocità ed una successiva modesta variazione col crescere della velocità. La dipendenza dalla temperatura può essere considerevole in condizioni di strisciamento continuativo, come è ben noto a chi frena per un lungo tempo un veicolo in discesa. A temperature superiori ai 250 °C per la ghisa e fra i 300 e i 400 °C per la maggior parte dei materiali da guarnizione dei freni, il valore del fattore di attrito dinamico subisce forti riduzioni, provocando una elevata diminuzione della capacità di frenatura.

Alcuni valori (*indicativi!*) dei fattori di attrito statico e dinamico per superfici asciutte esposte all'aria sono riportati nella seguente tabella.

MATERIALI A CONTATTO	f_s	f_d
Acciaio/PTFE (teflon)		0.05
Acciaio/Acciaio	0.6-0.8	0.1-0.4
Acciaio/Bronzo fosforoso	0.35	0.3
Pneumatico (auto)/Asfalto asciutto	0.8-0.9	0.7
Pneumatico (auto)/Asfalto umido	0.8	0.6
Pneumatico (auto)/Ghiaccio	0.18	0.15
Acciaio o ghisa/Materiale freni	0.4-0.6	0.3-0.4

Si ha un caso interessante quando al corpo mobile della coppia è applicata invece di una forza N perpendicolare al vincolo una forza F inclinata di un angolo θ , rispetto alla normale al vincolo (Fig. 3.4):

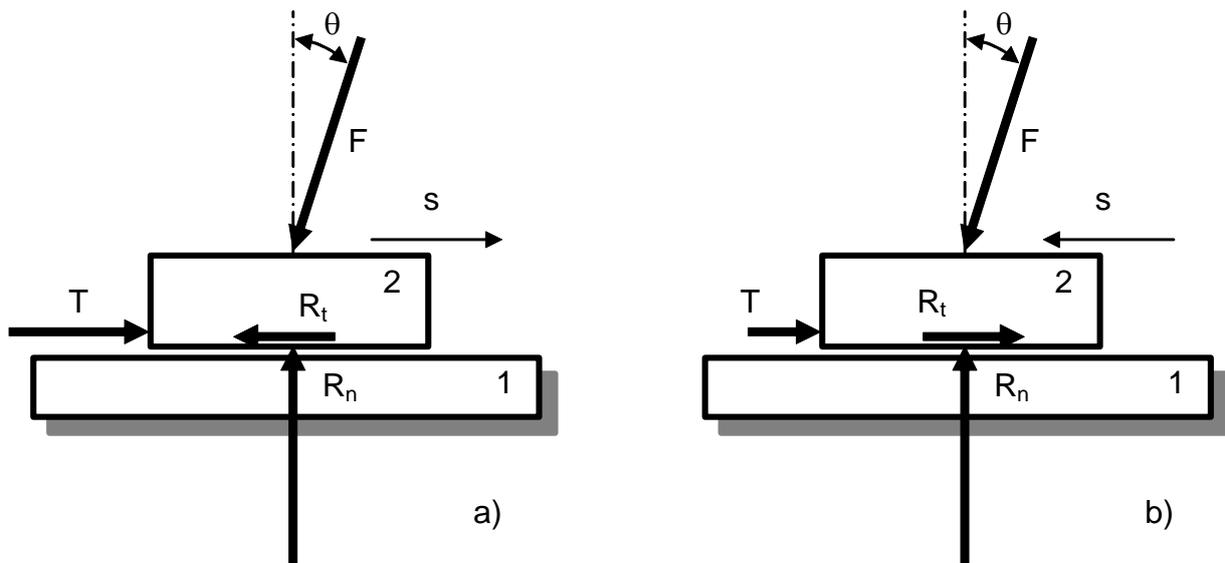


Fig. 3.4 Forze agenti in una coppia prismatica nel moto diretto ed inverso

Le condizioni di equilibrio delle forze portano alle relazioni:

- 1) con il corpo 2 che si sposta verso destra in assenza di attrito (caso ideale)
 $R_t = 0$, $T = F \sin\theta$, $R_n = F \cos\theta$
- 2) con il corpo 2 che si sposta verso destra in presenza di attrito (caso reale, Fig. 3.4-a)
 $R_t = f_d R_n$, $T = F \sin\theta + R_t$, $R_n = F \cos\theta$
da cui $T = F \sin\theta + f_d F \cos\theta = F (\sin\theta + f_d \cos\theta)$
- 3) con il corpo 2 che si sposta verso sinistra in assenza di attrito (caso ideale)
 $R_t = 0$, $T = F \sin\theta$, $R_n = F \cos\theta$
- 4) con il corpo 2 che si sposta verso sinistra in presenza di attrito (caso reale, Fig. 3.4-b)
 $R_t = f_d R_n$, $T = F \sin\theta - R_t$, $R_n = F \cos\theta$
da cui $T = F \sin\theta - f_d F \cos\theta = F (\sin\theta - f_d \cos\theta)$

Si osservi che:

- a) la forza R_n con cui il vincolo reagisce alla forza applicata F è sempre uguale a $F \cos\theta$;
- b) nei casi 1 e 2 la forza T ha lo stesso verso dello spostamento s , fa lavoro positivo ed è una *forza motrice*, mentre la forza F ha componente tangenziale opposta al verso di s , fa lavoro negativo ed è una *forza resistente*;
- c) nei casi 3 e 4 la forza T ha lo verso opposto allo spostamento s , fa lavoro negativo ed è una *forza resistente*, mentre la forza F ha componente tangenziale con lo stesso verso di s , fa lavoro positivo ed è una *forza motrice*;
- d) la forza T è uguale a $F \sin\theta$ in entrambi i casi ideali (casi 1 e 3);
- e) nei due casi reali (casi 2 e 4) la forza T è diversa a seconda che il corpo 2 si sposti verso destra o

verso sinistra; nel caso 2 si ha

$$T = F (\sin\theta + f_d \cos\theta)$$

dunque per qualunque valore di F , θ e f_d , esiste un valore positivo di T che produce equilibrio: è quindi sempre possibile avere movimento verso destra; invece nel caso 4 si ha

$$T = F (\sin\theta - f_d \cos\theta)$$

Dunque per certi valori di θ e f_d il termine in parentesi diventa negativo: ciò avviene quando

$$\sin\theta < f_d \cos\theta$$

ovvero se

$$\tan \theta < \tan \varphi_d$$

e quindi se $\theta < \varphi_d$. Quando ciò avviene non sarà possibile avere equilibrio a meno di non cambiare il verso della forza resistente T , ovvero sarà possibile movimento verso sinistra solo se la forza T diventa motrice.

Riassumendo: quando l'inclinazione della forza F diventa inferiore all'angolo di attrito dinamico, è possibile il moto verso destra applicando una adeguata forza T , ma non il moto verso sinistra a meno di non cambiare il verso di T facendola diventare motrice. Se questa forza motrice non viene applicata il corpo 2 non può muovere verso sinistra anche variando l'intensità della forza F . Questo fenomeno, chiamato *arresto spontaneo*, è utilizzato nei casi in cui si vuole garantire che il movimento non possa invertirsi anche se si annulla la forza motrice e senza che debba intervenire un altro dispositivo di arresto. Un caso ben noto è quello degli apparecchi manuali per il sollevamento di autoveicoli (*crick*) nei quali il movimento di discesa non è possibile anche sotto l'azione del peso del veicolo sollevato. Casi simili sono quello delle viti di collegamento che anche sotto carico rimangono fissate e quello dei freni autobloccanti.

Una variazione sul modello di coppia sopra esaminato interessante per le applicazioni si ottiene ruotando il corpo fisso 2 di un angolo θ in modo da portare la forza F in verticale. Questo modello corrisponde a considerare il corpo 2 vincolato a muovere in salita (o in discesa) lungo un piano inclinato di θ , soggetto alla forza peso rappresentata da F e da una forza tangente al piano rappresentata da T (Fig. 3.5).

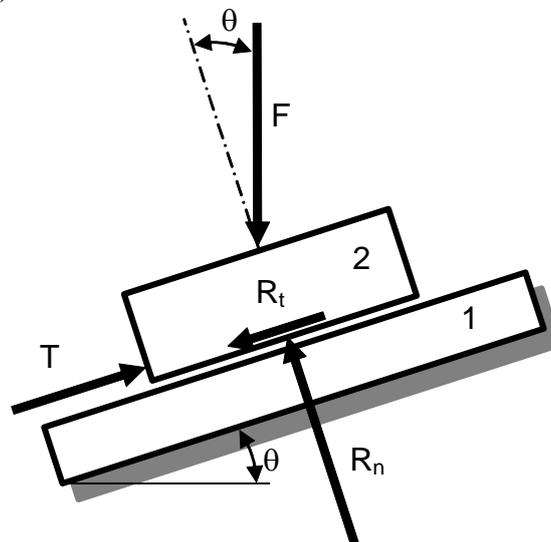


Fig. 3.5 Movimento su un piano inclinato

Le conclusioni trovate per il caso della guida orizzontale possono essere facilmente applicate al moto sul piano inclinato:

- 1) quando il corpo viene spostato verso l'alto la forza T è motrice, la forza è F resistente. Per qualunque valore di F , dell'angolo di inclinazione θ del piano, e dell'angolo di attrito φ_d , esiste un valore di T che garantisce l'equilibrio e quindi il mantenimento del moto a regime;

- 2) quando il corpo viene spostato verso il basso la forza \mathbf{F} è motrice, la forza \mathbf{T} è resistente. Se il valore dell'angolo di inclinazione θ del piano è inferiore a quello dell'angolo di attrito φ_d il movimento a regime in discesa non è possibile sotto l'azione della sola forza \mathbf{F} . Se si vuol ottenere questo movimento occorre applicare una forza \mathbf{T} con verso concorde a quello dello spostamento (in discesa) che funga da ulteriore forza motrice.

Esercizio

Per il sistema in Fig. 3.5 sono dati: $F=7500$ N, $\theta=0.35$ rad ($=20^\circ$), $f_d=0.1$; calcolare la forza T necessaria a mantenere a regime il movimento del corpo 2 verso l'alto. Siamo nel caso a) di Fig. 3.4, per cui $T = F (\sin\theta + f_d \cos\theta) = 3255$ N.

Con gli stessi dati si calcoli la forza T necessaria a mantenere a regime il movimento del corpo 2 verso il basso. Siamo nel caso b) di Fig. 3.4, per cui $T = F (\sin\theta - f_d \cos\theta) = 1845$ N.

Con i seguenti dati $F=7500$ N, $\theta=0.35$ rad ($=20^\circ$), $f_d=0.4$; calcolare la forza T necessaria a mantenere a regime il movimento del corpo 2 verso il basso. Siamo ancora nel caso b) di Fig. 3.4, per cui $T = F (\sin\theta - f_d \cos\theta) = -255$ N. Per mantenere il movimento occorre invertire il verso di T ed è quindi possibile l'arresto spontaneo. Questa condizione era prevedibile dato che $\varphi_d = \text{atan } f_d = 0.38$ rad e quindi $\theta < \varphi_d$.

Esercizio proposto

In Fig. 3.6 è schematizzato un camion sul cui piano di appoggio è posta una cassa avente massa $m=500$ kg. Il fattore di attrito statico fra cassa e piano è $f_s=0.3$. Si determini il massimo angolo di salita θ che il camion può percorrere senza che la cassa inizi a strisciare sul piano.

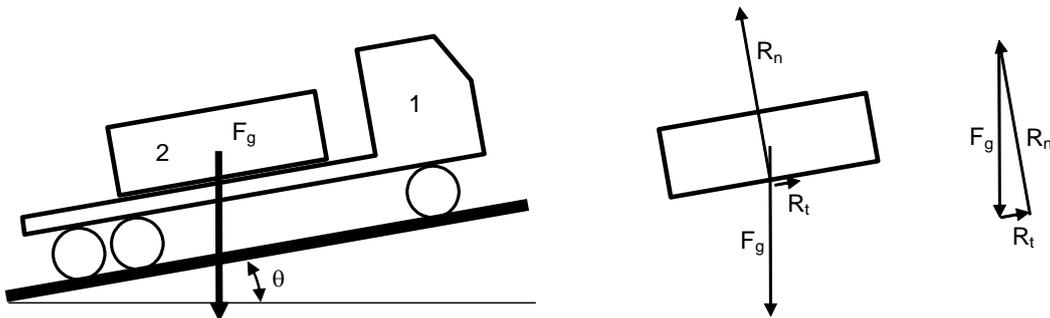


Fig. 3.6 Equilibrio di una cassa su un camion

3-2.3 ATTRITO RADENTE IN CONDIZIONI DI STICK-SLIP

Il modello delle forze di attrito sviluppato al punto precedente considera il fattore di attrito dinamico fra due superfici a contatto costante: in realtà il suo valore è funzione della velocità relativa fra i corpi e può essere diverso in punti diversi delle parti della coppia che vengono successivamente a contatto. Queste variazioni, oltre alla variazione già evidenziata delle forze di attrito fra la condizione di non strisciamento (f_s) e di strisciamento (f_d), possono produrre un fenomeno noto come *microstrisciamento intermittente (stick-slip)*, caratterizzato da un moto intermittente con brevissimi periodi di impuntamento alternati con periodi altrettanto brevi di rapido strisciamento. Questo fenomeno, ripetendosi continuamente, può dar luogo a vibrazioni.

3-3 Coppia rotoidale portante in movimento

E' detta *portante* la coppia rotoidale sulla quale agisca una forza esterna \mathbf{F} ortogonale all'asse di rotazione della coppia. Lo studio della coppia rotoidale asciutta portante serve tra l'altro come base per l'analisi dei freni a ceppi. In Fig. 3.7 sono rappresentati gli elementi della coppia (*perno* è l'elemento interno pieno, *cuscinetto* è l'elemento esterno cavo), mettendo in evidenza il *gioco*,

ossia la differenza fra il raggio r del perno e quello del cuscinetto.

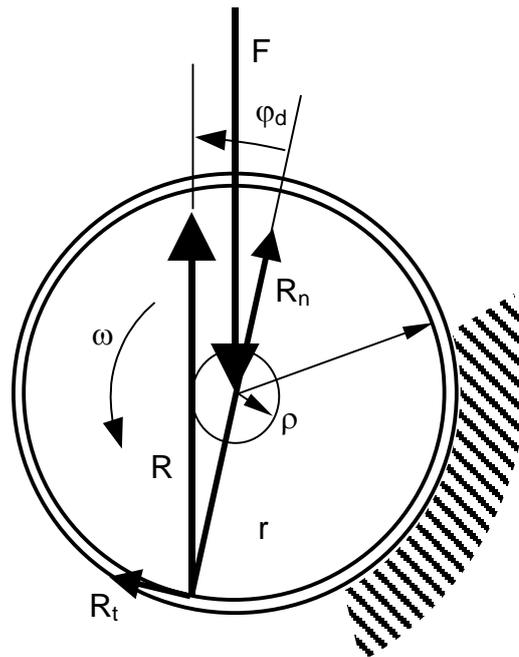


Fig. 3.7 Equilibrio del perno della coppia rotoidale portante

Sul perno, oltre alla forza data \mathbf{F} che si suppone applicata al centro della coppia, agisce la reazione \mathbf{R} del cuscinetto. Per l'equilibrio alle rotazioni deve essere $\mathbf{F} = -\mathbf{R}$, cioè \mathbf{R} deve essere parallela, uguale ed opposta alla forza data \mathbf{F} . Quando il perno ruota strisciando sul cuscinetto vale la relazione (3.2)

$$R_t = f_d R_n = \tan \varphi_d R_n$$

Si dimostra facilmente che la reazione \mathbf{R} risulta tangente ad un cerchio di raggio $\rho = r \sin \varphi$, centrato nel centro del perno. Infatti, supponendo la \mathbf{R} tangente a questo cerchio (detto *cerchio di attrito*), il momento dovuto alla forza di attrito, valutato attorno al centro del perno, può essere scritto come $M = r R_t$ oppure $M = \rho R$, da cui si deduce $r R_t = \rho R$; e poiché $R_t = R \sin \varphi_d$, risulta $\rho = r \sin \varphi_d$. Pertanto si usa dire che la reazione \mathbf{R} è sempre tangente al cerchio di attrito di raggio $\rho = r \sin \varphi_d$.

Dalla figura si vede anche che il perno non è equilibrato rispetto alla rotazione dato che le forze \mathbf{F} e \mathbf{R} non hanno la stessa linea di azione. Pertanto per avere equilibrio occorre applicare un momento esterno $M = \rho R = \rho F$.

Analisi di un freno a ceppo ad accostamento libero

Una applicazione significativa della coppia rotoidale asciutta si trova nei freni (che saranno discussi in un successivo capitolo). Le parti del freno schematizzato in Fig. 3.8 sono: il tamburo con centro di rotazione in O , la leva L , collegata a telaio con una coppia rotoidale in H , il ceppo, articolato sulla leva L con una coppia rotoidale in C . Il freno in figura è detto *ad accostamento libero* in quanto il ceppo non è collegato rigidamente alla leva che lo aziona, ma può ruotare rispetto ad essa. Sono dati la geometria del freno (posizioni delle coppie rotoidali, raggio r del tamburo) e il fattore di attrito dinamico f_d fra ceppo e tamburo. Il freno è azionato da una forza \mathbf{F} nota (intensità, punto di applicazione sulla leva L e direzione). Il tamburo ruota in senso antiorario. Si vuol determinare la forza \mathbf{R} che il ceppo applica al tamburo del freno ed il momento M_f con cui il tamburo è frenato. Si trascurano i pesi delle parti.

Dallo studio precedente della coppia rotoidale asciutta si sa che la forza \mathbf{R} che il ceppo esercita sul tamburo deve essere tangente al cerchio di attrito, il cui centro è in O e il cui raggio è $r \sin \varphi$. Sul ceppo agisce per reazione una forza $-\mathbf{R}$, uguale ed opposta a \mathbf{R} ; dato che sul ceppo agiscono solo 2

forze (la $-R$ e la reazione nella coppia C), per aver equilibrio del ceppo le due forze devono avere la stessa linea di azione ed essere uguali ed opposte; quindi la linea di azione di R deve passare per il punto C . Dovendo passare la forza R per C ed essere tangente al cerchio di attrito, ne risulta determinata la direzione. Per l'equilibrio alle rotazioni della leva L le tre forze agenti su di essa (F , $-R$, e la reazione R_H in H) devono intersecarsi in un unico punto: questa condizione consente di determinare la direzione di R_H . E' ora immediato costruire il poligono di equilibrio delle 3 forze, date le loro direzioni e l'intensità di F . La costruzione è riportata in figura. Una volta determinata $-R$ (e quindi R) la coppia frenante sul tamburo del freno è $M_f = R r \sin \varphi_d$, essendo al solito $\varphi_d = \text{atan } f_d$.

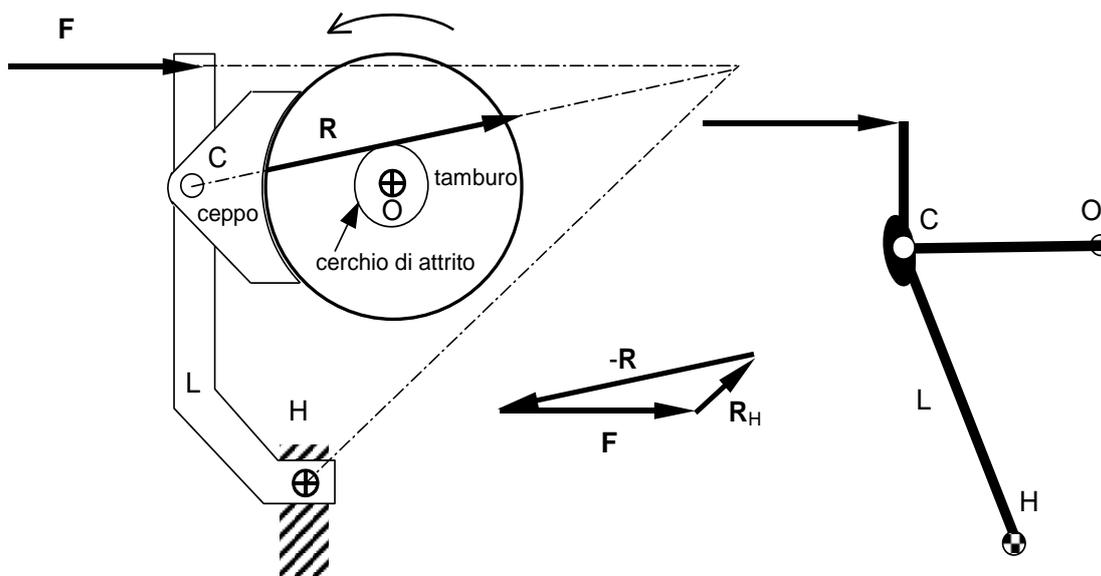


Fig. 3.8 Freno ad accostamento libero

3-4 Attrito volvente

3-4.1 PRESSIONI E FORZE DURANTE IL ROTOLAMENTO

L'analisi dei fenomeni di attrito fra superfici asciutte e lo schema delle relative forze discusso in precedenza risulta incompleto quando si consideri il rotolamento fra due corpi. Si prendano infatti in esame le forze di contatto durante il rotolamento senza strisciamento fra un corpo piano 1 (fisso) e uno cilindrico 2 in moto (Fig. 3.9). Rotolamento senza strisciamento significa che, istante per istante, la linea di contatto fra i due corpi (ovvero il punto di contatto P nel disegno bidimensionale in figura) ha velocità nulla. Pertanto detto r il raggio del cilindro, v la velocità del suo centro O e ω la sua velocità angolare, la velocità v è parallela al piano e il suo modulo è $v = \omega r$. Questo schema di contatto può essere applicato a vari casi pratici, per esempio al contatto ruota/strada, a quello ruota/rotaia o a quello rullo/pista di un cuscinetto.

Al corpo 2 è applicata una forza N perpendicolare al piano del corpo 1. Si pone il problema se per mantenere il movimento senza strisciamento del corpo 2 a velocità costante sia necessario spingere (o tirare) il corpo con una forza T parallela al piano fisso (la forza è concorde con la velocità di avanzamento del corpo, in modo da fornirgli energia).

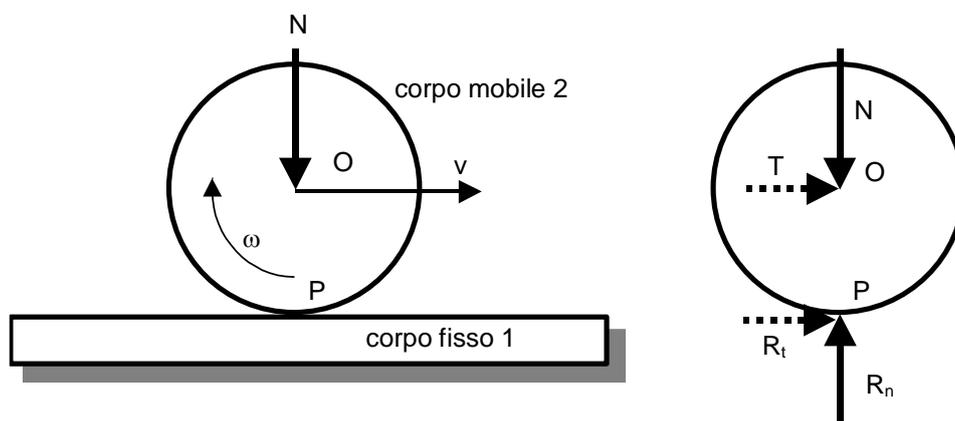


Fig. 3.9 Forze agenti nel rotolamento ideale

In condizione di regime per il corpo mobile 2 valgono le (2.5) e (2.6) ossia deve essere: $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$ e $\Sigma M_O = 0$, essendo \mathbf{F} e M risultanti di forze e momenti esterni al corpo considerato. Sul corpo 2 agiscono: la forza \mathbf{N} (data); la reazione del vincolo \mathbf{R} che, come visto precedentemente, ha, in presenza di attrito, una componente tangenziale R_t ed una normale R_n ; l'eventuale forza motrice \mathbf{T} parallela al vincolo (se necessaria). La (2.5) proiettata nelle direzioni tangente e normale alla direzione di moto diventa

$$\begin{aligned} T + R_t &= 0 \\ -N + R_n &= 0 \end{aligned}$$

mentre la (2.6) assumendo come polo per il calcolo dei momenti il centro del cilindro è

$$R_t r = 0$$

Da essa si deduce che $R_t = 0$, per cui dalla prima equazione si ottiene $T = 0$. La condizione (3.1) sul valore che può assumere la forza di attrito, $R_t < f_s R_n$, è ovviamente soddisfatta e quindi si può verificare che non c'è strisciamento nel punto di contatto. In definitiva, per mantenere il movimento senza strisciamento sembra che non sia necessario applicare alcuna forza motrice. Questa conclusione, valida per un modello ideale, non è corrispondente all'esperienza che mostra come sia sempre necessario applicare una forza T motrice per mantenere il movimento di rotolamento. Occorre dunque un modello più sofisticato del contatto fra le parti in moto.

Si consideri più in dettaglio la zona di contatto fra i due corpi. Dato che il contatto fra un cilindro ed un piano avviene lungo una linea, le pressioni di contatto sono teoricamente infinite. Più adeguato alla realtà è un modello in cui almeno uno dei corpi (o meglio entrambi) si deformano, in modo da produrre un'area di contatto con pressioni finite. In molti casi pratici è possibile ritenere che solo uno dei due corpi si deformi sensibilmente: per esempio nel caso di un pneumatico su strada asfaltata, la deformazione del pneumatico è in genere nettamente superiore a quella della strada; nel caso di ruota su sabbia o neve fresca è la sabbia a subire la deformazione più rilevante; per ruota in acciaio su rotaia entrambi i corpi a contatto possono deformarsi sensibilmente.

Quando il cilindro è fermo la distribuzione delle pressioni di contatto è simmetrica. Quando il cilindro si muove (senza strisciare), la distribuzione delle pressioni non è più simmetrica e la pressione nella zona anteriore nella direzione del moto risulta mediamente più elevata di quella nella zona posteriore: ciò è dovuto a vari fenomeni dissipativi, quali l'imperfetta elasticità dei corpi e l'elasticità ritardata. In Fig. 3.10 è presentato il caso in cui solo il cilindro si deforma, ma si ottengono conclusioni analoghe anche per gli altri casi. Data l'asimmetria della pressione, la risultante R_n delle pressioni non passa per il centro di rotazione ma è spostata nella direzione del moto di una quantità u detta *coefficiente di attrito volvente* il cui valore dipende dai materiali dei due corpi a contatto.

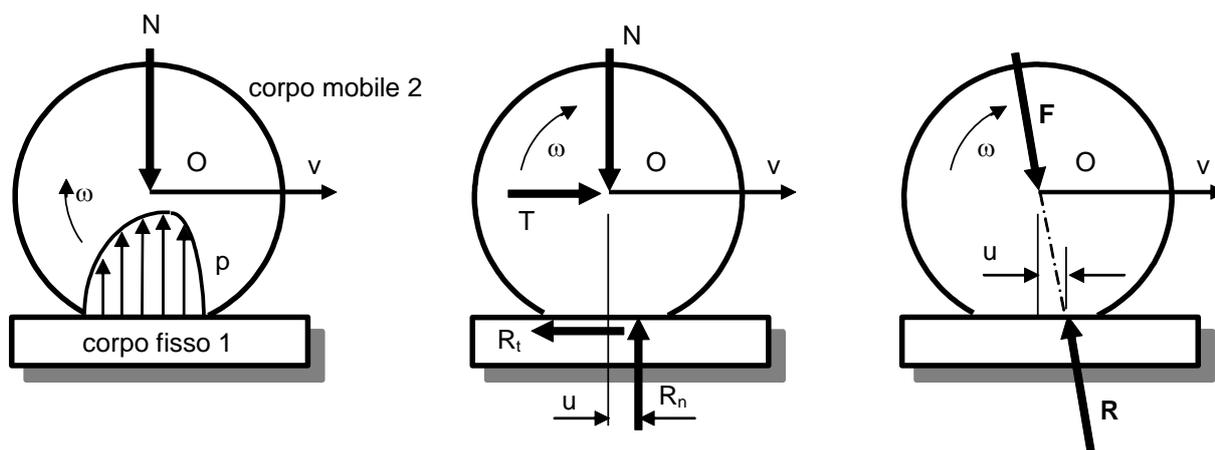


Fig. 3.10 Pressioni e forze nel rotolamento con attrito volvente

Le equazioni di moto a regime sono ora, assumendo le direzioni delle forze reattive come in Fig. 3.10

$$\begin{aligned} T - R_t &= 0 \\ -N + R_n &= 0 \\ -R_t r + R_n u &= 0 \end{aligned}$$

dalle quali si deduce

$$\begin{aligned} R_t &= R_n u/r = N u/r \\ T &= R_t = N u/r = f_v N \end{aligned}$$

dove il rapporto adimensionale $f_v = u/r$ è detto *fattore di attrito volvente*.

Pertanto: per far rotolare senza strisciare il cilindro occorre applicare una forza motrice T tangente al vincolo e in direzione del moto, di intensità

$$T = f_v N \quad (3.3)$$

mentre il vincolo reagisce con una reazione tangenziale negativa opposta al moto di intensità

$$R_t = f_v R_n \quad (3.4)$$

Dato che R_t non è zero, occorre verificare che l'ipotesi fatta di non strisciamento sia verificata, il che richiede $|R_t| < f_s R_n$, ovvero $f_v N < f_s N$ e quindi

$$f_v < f_s$$

il che è in generale verificato.

La risultante $\mathbf{F} = \mathbf{T} + \mathbf{N}$ delle forze applicate al centro del cilindro e la reazione $\mathbf{R} = \mathbf{R}_t + \mathbf{R}_n$ devono avere la stessa linea di azione che pertanto è la congiungente il centro O con il punto di applicazione di \mathbf{R} , posto nella zona di contatto cilindro-piano e spostato di u nella direzione del moto.

Alcuni valori del fattore di attrito volvente f_v sono riportati in tabella.

Cuscinetti radiali a sfere (rigidi)	0.0015
Cuscinetti assiali a sfere	0.0013
Ruota di acciaio su rotaia ($D =$ diametro in mm)	$0.026 / D^{1/2}$
Pneumatico su asfalto ottimo	0.01-0.0125
Pneumatico su asfalto medio	0.018
Pneumatico su asfalto cattivo	0.023
Pneumatico su strato 50 mm di neve	0.025
Pneumatico su sabbia	0.15-0.3

Il caso considerato in precedenza prevede che il cilindro (o una ruota) avanzi in quanto spinto o trascinato da una forza T e che non esistano forze diverse dagli attriti che si oppongono al movimento. E' il caso delle *ruote non motrici* dei veicoli. E' però possibile che su una ruota agisca una forza esterna con componente T_r tangente al vincolo che si oppone al movimento. Per far

avanzare il veicolo a velocità costante v occorre fornire, in assenza di attrito volvente, una potenza motrice che bilanci la potenza resistente $T_r v$: nel caso di ruota motrice la potenza motrice è fornita applicando un momento M_m alla ruota. Lo schema delle forze in gioco è riportato in Fig. 3.11. Le equazioni di moto a regime sono

$$\begin{aligned} -T_r + R_t &= 0 \\ -N + R_n &= 0 \\ R_t r + R_n u - M_m &= 0 \end{aligned}$$

Da esse si deduce che, con i segni delle forze in figura,

$$\begin{aligned} R_t &= T_r \\ R_n &= N \\ M_m &= T_r r + N u \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ovvero, per far avanzare la ruota occorre applicare una coppia M_m che equilibri gli effetti della forza resistente e dell'attrito volvente; il vincolo reagisce sulla ruota, oltre che con la forza normale, con una reazione tangenziale pari alla forza resistente. Va comunque verificata la condizione di non strisciamento

$$|R_t| < f_s |R_n| \quad \text{ovvero} \quad |T_r| < f_s |N| \quad (3.7)$$

Dato che in questo caso la forza T_r è arbitraria, è possibile che la condizione non sia soddisfatta e che le ruote striscino. E' il noto problema della perdita di aderenza delle ruote motrici di un veicolo.

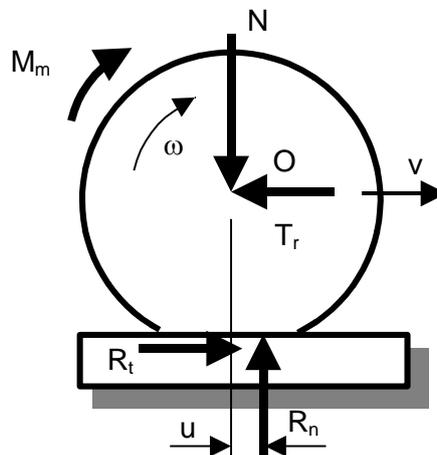


Fig. 3.11 Forze nel rotolamento di una ruota motrice

Si noti che in ogni caso il prodotto $u R_n$ può essere interpretato come un momento M_p *perduto per attrito*.

3-4.2 FORZA PER TRASCINARE UN CARRELLO

Movimento nel piano

Il carrello di Fig. 3.12 è trascinato in piano da una forza esterna T_c in direzione orizzontale. Al baricentro del carrello è applicata la forza peso verticale $F_g = mg$. La determinazione della forza T viene effettuata matematicamente considerando l'equilibrio delle singole ruote e dell'intero veicolo. Per le ruote anteriori la (3.4) diventa

$$R_t^a = f_v R_n^a$$

mentre per le posteriori

$$R_t^p = f_v R_n^p$$

Per l'intero veicolo la condizione di equilibrio in direzione verticale è

$$R_n^a + R_n^p = mg$$

quella in direzione orizzontale è

$$R_t^a + R_t^p = T$$

Sostituendo si ottiene

$$T = R_t^a + R_t^p = f_v (R_n^a + R_n^p) = f_v mg \quad (3.8)$$

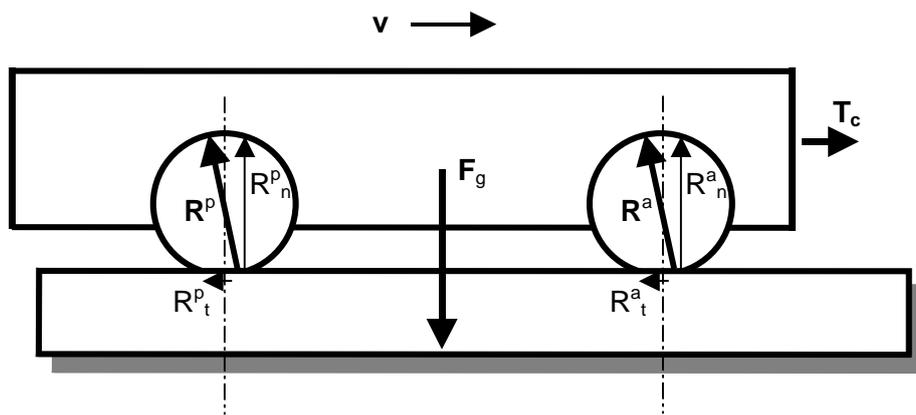


Fig. 3.12 Forze su un carrello trascinato in piano

La (3.8) mostra che la forza necessaria per trascinare il carrello è proporzionale al peso del carrello; la costante di proporzionalità è il fattore di attrito volvente fra ruote e piano.

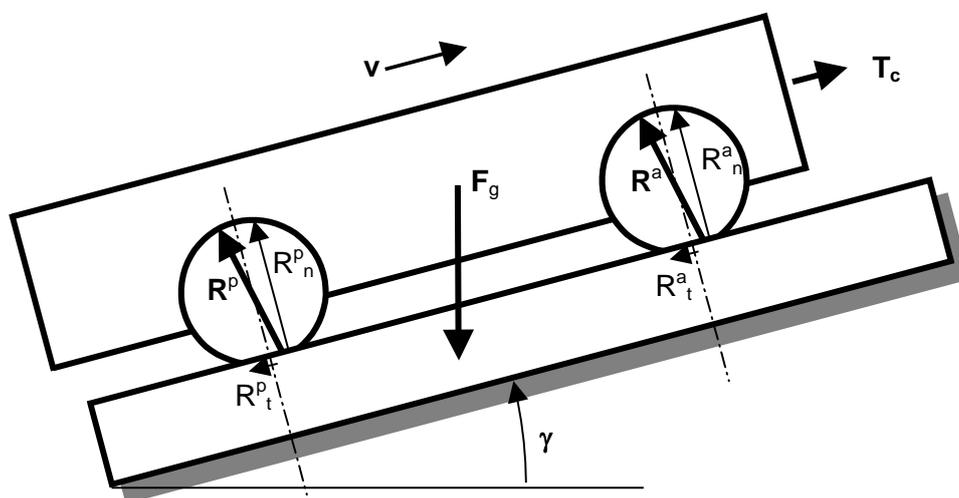


Fig. 3.13 Forze su un carrello trascinato in salita

Movimento in salita

Il carrello di Fig. 3.13 è trascinato in salita da una forza esterna T_c in direzione della salita. Al baricentro del carrello è applicata la forza peso verticale $F_g = mg$. L'angolo di inclinazione della salita è indicato con γ . La determinazione della forza T viene effettuata matematicamente considerando l'equilibrio delle singole ruote e dell'intero veicolo. Per le ruote anteriori la (3.4) diventa

$$R_t^a = f_v R_n^a$$

mentre per le posteriori

$$R_t^p = f_v R_n^p$$

Per l'intero veicolo la condizione di equilibrio nella direzione ortogonale alla salita è

$$R_n^a + R_n^p = mg \cos \gamma$$

quella nella direzione di salita è

$$R_t^a + R_t^p + mg \sin \gamma = T_c$$

Sostituendo si ottiene

$$T_c = R_t^a + R_t^p + mg \sin \gamma = f_v (R_n^a + R_n^p) + mg \sin \gamma = f_v mg \cos \gamma + mg \sin \gamma \quad (3.9)$$

La (3.9) mostra che la forza necessaria per trascinare il carrello è la somma di due termini, il primo proporzionale alla parte del peso del carrello che si scarica sul piano di salita, il secondo uguale alla componente del peso nella direzione di salita; la costante di proporzionalità del primo termine è il fattore di attrito volvente fra ruote e piano.

Esercizio. Un carrello di massa $m=500$ kg viene tirato con una fune su una salita inclinata di un angolo γ . La fune è parallela alla salita, e il carrello è appoggiato su quattro ruote con fattore di attrito volvente $f_v = 0.02$. Calcolare la tensione T della fune nei tre casi:

- a) $\gamma = 0$ rad (0°).
- b) $\gamma = 1.22$ rad (70°)
- c) $\gamma = 1.57$ rad (90°)

Lo schema generale del carrello è quello di Fig. 3.13 e la forza T è data dalla 3.9.

Nel caso a) si ha

$$T_c = f_v mg \cos \gamma + mg \sin \gamma = 98 + 0 = 98 \text{ N}$$

Infatti il carrello è trascinato in pianura, la forza peso è perpendicolare al piano di moto, la sua componente lungo il piano è nulla e non occorre alcuna forza T per equilibrarla, mentre è necessaria una forza T per vincere la forza di attrito dovuto all'attrito volvente. Questa forza è proporzionale all'intera forza peso mg . Il risultato corrisponde a quello della (3.8).

Nel caso b) si ha

$$T_c = f_v mg \cos \gamma + mg \sin \gamma = 34 + 4606 = 4640 \text{ N}$$

Infatti, essendo ora il piano di moto notevolmente inclinato (70°), la componente della forza peso lungo il piano non è nulla e occorre una rilevante forza T per equilibrarla; è anche necessaria una forza T per vincere la forza di attrito dovuto all'attrito volvente, ma inferiore a quella del caso a) in quanto la componente del peso perpendicolare al piano di moto è minore di mg .

Nel caso c) si ha

$$T_c = f_v mg \cos \gamma + mg \sin \gamma = 0 + 4905 = 4905 \text{ N}$$

Infatti, essendo ora il piano di moto verticale (90°), la componente della forza peso lungo il piano è pari alla forza peso e occorre una uguale forza T per equilibrarla; non è necessaria una forza T per vincere la forza di attrito in quanto la componente del peso perpendicolare al piano di moto è nulla.