# Cap. 3 - FONDAMENTI DI DINAMICA





## 3.1 – ATTRITO RADENTE E VOLVENTE

L'attrito è una resistenza passiva che tende ad ostacolare il moto relativo di due corpi a contatto.

In meccanica si riscontrano fondamentalmente tre tipi di attrito:

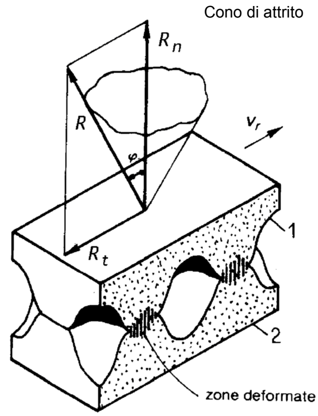
– *attrito secco*: si manifesta tra due corpi a contatto su superfici non lubrificate

– *attrito fluido*: si manifesta sulle superfici di due corpi in moto relativo tra i quali sia interposto un velo di lubrificante liquido o gassoso

– *attrito interno* dei materiali: si manifesta come una non perfetta elasticità dei corpi reali quando vengono deformati

A seconda della presenza o meno di moto relativo e della sua tipologia si distingue anche l'attrito *statico* da quello *dinamico* e l'attrito *radente* da quello *volvente*.

## ATTRITO RADENTE: CASO STATICO




Quando due solidi sono in contatto ma non vi è moto relativo, fra di essi agisce una forza di reazione *R* che può assumere tutte le direzioni possibili interne al cosiddetto *cono di attrito.*

La forza di attrito radente $R_t$ assume un valore tale da equilibrare staticamente il sistema e deve valere sempre:

$$R_t \leq f_a R_n$$

cioè l'inclinazione della reazione ***R*** rispetto alla normale deve essere inferiore al valore limite:

$$\phi_a = \arctan(f_a)$$

$\phi_a$ è detto *angolo di aderenza* mentre $f_a$ è detto *fattore di attrito statico* oppure *fattore di aderenza*. In prima approssimazione:

- dipende dalla natura dei materiali
- dipende dallo stato delle superfici (rugosità, pulizia..)
- non dipende dalle forze normali



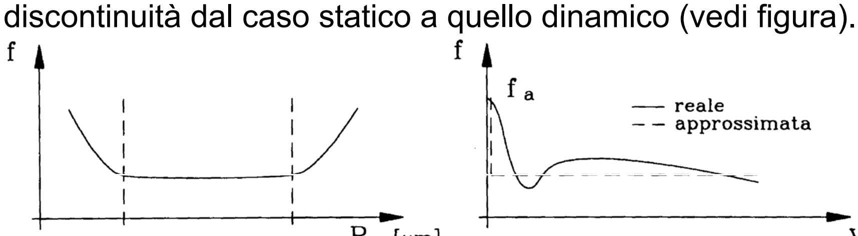
## ATTRITO RADENTE: CASO DINAMICO

Se due solidi in contatto di strisciamento sono in moto relativo l'uno rispetto all'altro, la forza di attrito $R_t$ che si sviluppa ha direzione tale da opporsi al moto e modulo pari a:

$$R_t = f R_n$$

L'angolo $\phi = \arctan(f)$ è detto *angolo di attrito dinamico* mentre *f* è detto *fattore di attrito (dinamico)*: i suoi valori sono inferiori a quelli (corrispondenti) del caso statico.

Valgono anche in questo caso le stesse dipendenze ed invarianze illustrate per l'attrito statico e si assume anche indipendenza dalla velocità relativa di strisciamento; in realtà il fattore di attrito non passa con discontinuità dal caso statico a quello dinamico (vedi figura).




Dipendenza del fattore di attrito dalla rugosità delle superfici a contatto e dalla velocità relativa

## ATTRITO VOLVENTE

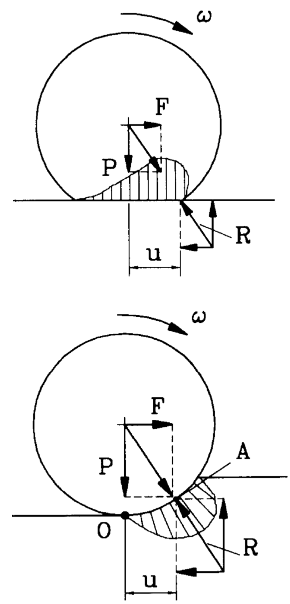
L’attrito volvente, causato dalla deformabilità della coppia e da fenomeni dissipativi che si verificano nel moto di rotolamento, si manifesta come un momento reattivo $\boldsymbol{M_r}$ , con asse nel piano tangente di contatto, che si oppone al moto di rotolamento.
Può essere interpretato come uno spostamento “in avanti” del punto di applicazione della reazione $\boldsymbol{R}$ di una quantità *u* detta *coefficiente di attrito volvente*; pertanto, in condizioni dinamiche:

$$M_r = u\, R_n$$

Analogamente al caso dell’attrito radente, si definisce il *fattore di attrito volvente* come:

$$f_v = \frac{M_r}{R_n r} = \frac{u}{r}$$

dove *r* è il raggio del corpo rotolante.




Cause concomitanti delle resistenze al rotolamento: deformazione del corpo rotolante (sopra) e del piano di rotolamento (sotto)



# 3.2 - PROPRIETA’ DI MASSA

### Baricentro di un sistema a masse concentrate

Per un sistema di *n* punti materiali $P_1, P_2, \dots P_n$, di masse $m_1, m_2, \dots m_n$ si definisce **baricentro** o **centro di gravità** *G* il centro dei vettori peso paralleli ed equiversi $m_i\boldsymbol{g}$:

$$(G-O) = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i g (P_i - O)}{\sum_{i=1}^{n} m_i g} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i (P_i - O)}{m} \qquad \text{essendo} \quad m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m} \qquad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m} \qquad z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m}$$

Il baricentro dipende dall’entità delle masse e dalla loro disposizione nel piano o nello spazio.

## Baricentro di un sistema a massa distribuita

Per un sistema continuo di densità $\rho$ ed estensione $v$ (lunghezza, area o volume), essendo $m = \int_v \rho dv$
il baricentro $G$ è definito da:

$$(G - O) = \frac{\int_v \rho (P - O) dv}{\int_v \rho dv} \Rightarrow x_G = \frac{\int_v \rho x dv}{m} \qquad y_G = \frac{\int_v \rho y dv}{m} \qquad z_G = \frac{\int_v \rho z dv}{m}$$

Se il sistema è omogeneo su $v$ e quindi $\rho$ è costante, si ha:

$$(G - O) = \frac{\int_v (P - O) dv}{v} \Rightarrow x_G = \frac{\int_v x dv}{v} \qquad y_G = \frac{\int_v y dv}{v} \qquad z_G = \frac{\int_v z dv}{v}$$



## Proprietà dei baricentri

- *distributiva*: il baricentro di un sistema materiale *S*, quando viene suddiviso in 2 sottosistemi *S’* e *S”* di masse *m’* ed *m”* e di baricentri *G’* e *G”*, coincide con il baricentro dei sistemi formati dai punti *G’* e *G”* nei quali si immaginano concentrate le masse *m’* ed *m”*
- *delle superfici convesse*: il baricentro di un sistema materiale è sempre interno a qualunque superficie convessa che racchiuda tutte le masse
- *dei piani di simmetria* (per sistemi omogenei): ogni piano di simmetria contiene il baricentro del sistema

## Baricentro di alcuni sistemi omogenei

- il baricentro di un segmento è il suo punto medio
- il baricentro di un poligono regolare, di un disco circolare, di un anello circolare è rispettivamente il centro del poligono, del disco, dell'anello
- il baricentro di una sfera o di un poliedro regolare è rispettivamente il centro della sfera o del poliedro
- il baricentro di un triangolo è il punto di incontro delle mediane
- il baricentro di un generico quadrilatero si trova scomponendo lo stesso in triangoli e sfruttando la *proprietà distributiva*; questo procedimento può essere generalizzato per un poligono con un numero qualsiasi di lati



## Esempio: baricentro di un settore circolare omogeneo

$$x_G = 0$$

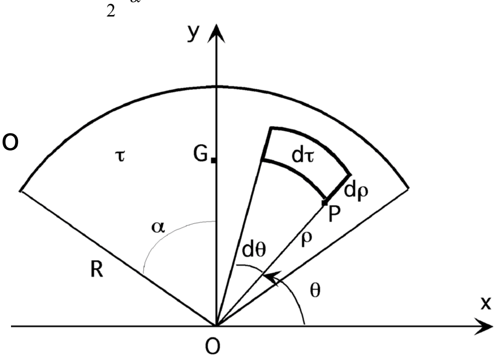
$$y_G = \frac{\iint_\tau \mathrm{y} \cdot \mathrm{d}\tau}{\tau} = \frac{\iint_\tau \rho \sin\theta \cdot \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta}{\pi \mathrm{R}^2 \dfrac{2\alpha}{2\pi}} = \frac{1}{R^2\alpha} \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^R \rho^2 \mathrm{d}\rho$$

$$y_G = \frac{2}{3} R \frac{\mathrm{sen}\alpha}{\alpha}$$

in particolare per un semicerchio di materiale omogeneo:

$$y_G = \frac{4}{3} R \frac{1}{\pi}$$

***Nota:*** *qui $\rho$ indica la coordinata radiale e non la densità*



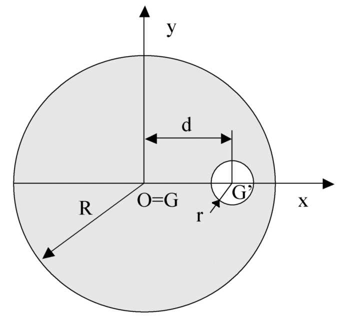

Settore circolare

## Esempio: baricentro di un eccentrico omogeneo

Il baricentro *G”* dell’eccentrico è situato sull’asse *x* a cui appartengono i centri *G* e *G’*, in quanto si tratta di un asse di simmetria; inoltre, utilizzando la proprietà distributiva per differenza, si considera il sistema *G* di massa *m* (disco di raggio *R*) composto dai sottosistemi *G’* (disco di raggio *r*) e *G”* (eccentrico forato) di masse *m’* ed *m”* rispettivamente.

$$\mathrm{G} = \frac{m'G' + m''G''}{m} \quad \Rightarrow \mathrm{G}'' = \frac{mG - m'G'}{m''}$$

$$x_{G''} = -\frac{r^2}{R^2 - r^2} d$$




Disco eccentrico

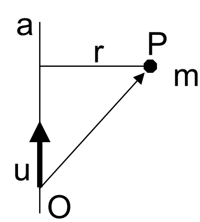


## Momento di inerzia assiale di sistemi a masse concentrate

Per un **punto materiale** *P* di massa *m* e distanza *r* dall’asse *a* (di versore ***u***), si definisce momento di inerzia assiale:

$I_a = mr^2$

$$I_a = m\left[(P - O) \wedge \mathbf{u}\right]^2$$




Per un **sistema discreto** formato da *n* punti materiali $P_i$ di masse $m_i$ e posti a distanze $r_i$ dall’asse *a,* si definisce momento di inerzia assiale:

$$I_a = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

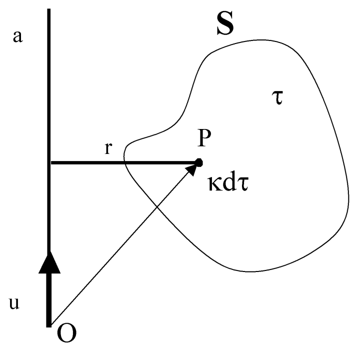
$$I_a = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[(P_i - O) \wedge \mathbf{u}\right]^2$$

essendo *O* un punto qualsiasi dell’asse *a.* La definizione è unica per i sistemi bidimensionali e tridimensionali.

## Momento di inerzia assiale di sistemi a massa distribuita

Per un sistema continuo $\mathbf{S}$ che occupi una regione $\tau$ dello spazio (ad 1, 2 o 3 dimensioni), di massa $m = \int_\tau \kappa d\tau$

$I_a = \int_\tau \kappa r^2 d\tau$ dove $\kappa$ indica la densità e *r* indica la distanza dell'elemento infinitesimo $\kappa d\tau$ dall'asse *a.*




Per sistemi omogenei ($\kappa$=costante)

$$I_a = \kappa \int_\tau r^2 d\tau$$

In generale:

$$I_a = \int_\tau \kappa \left[ \left( P\text{-}O \right) \wedge \mathbf{u} \right]^2 d\tau$$

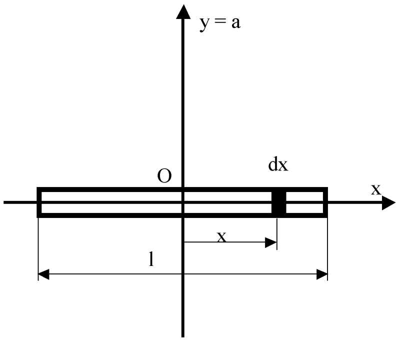


## Raggio giratore (o raggio di inerzia)

È la distanza D alla quale occorre concentrare una massa puntiforme pari a quella del sistema affinché il suo momento di inerzia rispetto all'asse eguagli il momento d'inerzia del sistema:

$$I = mD^2 \qquad D = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

## Esempio: momento di inerzia di un'asta monodimensionale omogenea rispetto ad un asse mediano



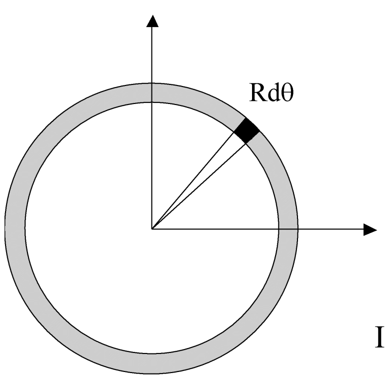

$$I_y = k\int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{kl^3}{12} = m\frac{l^2}{12}$$

essendo $m = kl$

$$D = \frac{l}{2\sqrt{3}}$$



## Esempio: momento di inerzia di un anello circolare omogeneo rispetto al proprio asse




$$dm = kRd\vartheta$$

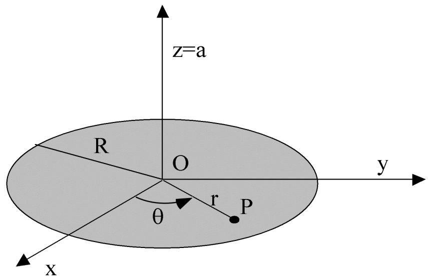
$$d\tau = Rd\vartheta$$

$$m = \int_\tau kd\tau = 2\pi kR$$

$$I = k\int_\tau R^2 d\tau = R^2\int_\tau kd\tau = 2\pi kR \cdot R^2 = mR^2$$

$$D = R$$

## Esempio: momento di inerzia di un disco circolare omogeneo rispetto al proprio asse



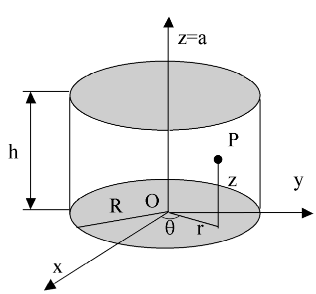

$$I = k\iint_\tau r^2 d\tau = k\iint_\tau r^2 (r dr d\theta) = k\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr$$

$$I = \left(k\pi R^2\right)\frac{R^2}{2} = m\frac{R^2}{2}$$

$$D = \frac{R}{\sqrt{2}}$$



## Esempio: momento d'inerzia di un cilindro circolare retto intorno al proprio asse




in coordinate cilindriche $\{r, \vartheta, z\}$, essendo $d\tau = r\,dr\,d\vartheta\,dz$

$$I = k\iiint_\tau r^2 d\tau = k\iiint_\tau r^2 r\,dr\,d\vartheta\,dz$$

$$I = k\int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R r^3 dr$$

$$I = k\pi R^2 h \frac{R^2}{2} = \frac{mR^2}{2}$$

$$D = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

## Momento d’inerzia polare

Oltre al momento d’inerzia assiale si può definire il momento di inerzia rispetto ad un punto (polare).

### Sistemi a masse concentrate

per un **sistema discreto** formato da *n* punti materiali $P_i$ di masse $m_i$ e posti a distanze $r_i$ dal polo *O* si definisce momento d’inerzia polare:

$$I_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i (P_i - O)^2$$

### Sistemi a masse distribuite

per un **sistema continuo** *S* che occupi una regione $\tau$ dello spazio (ad 1, 2 o 3 dimensioni), di massa:

$$m = \int_\tau \kappa \, d\tau$$

si definisce momento di inerzia polare:

$$I_0 = \int_\tau \kappa (P - O)^2 d\tau$$



## Proprietà del momento d’inerzia polare

- per sistemi piani il momento d’inerzia polare si identifica con il momento assiale rispetto all’asse passante per il polo e perpendicolare al piano
- *teorema di Lagrange*

*Il baricentro G di un sistema materiale qualsiasi è quel punto rispetto al quale risulta minimo il momento d’inerzia polare del sistema.* Dimostrazione:

$$I_O = \int_\tau \kappa \left[ (P\text{-}G) + (G - O) \right]^2 d\tau$$

$$= \int_\tau \kappa (P\text{-}G)^2 d\tau + \int_\tau \kappa (G\text{-}O)^2 d\tau + 2\int_\tau \kappa (P\text{-}G) \cdot (G\text{-}O) d\tau$$

$$= I_G + m (G\text{-}O)^2$$

da cui il momento polare è minimo per O = G

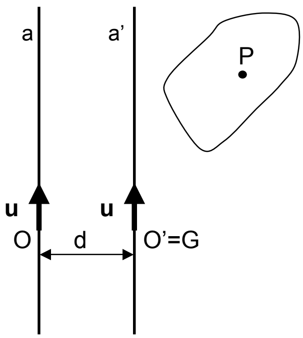
infatti il terzo termine si annulla per la definizione di baricentro

$$\int_\tau \kappa (P\text{-}G) \cdot (G\text{-}O) d\tau = \left[ \int_\tau \kappa P d\tau - G \int_\tau \kappa d\tau \right] \cdot (G - O)$$

$$\int_\tau \kappa P d\tau - G \int_\tau \kappa d\tau = 0$$

## Momento di inerzia per assi paralleli (1)

Per un sistema materiale *S* siano $I$ ed $I'$ i momenti d'inerzia relativi agli assi paralleli *a* ed *a'* posti a distanza *d* e passanti per O ed O'.




Nel caso di ***a'* baricentrico**
(*Teorema di Huygens*): O' = G $I' = I_G$

$$I = \int_\tau \kappa[(P\text{-}O)\wedge \mathbf{u}]^2 d\tau = \int_\tau \kappa\{[(P\text{-}G)+(G\text{-}O)]\wedge \mathbf{u}\}^2 d\tau$$

$$I = \int_\tau \kappa[(P\text{-}G)\wedge \mathbf{u}]^2 d\tau + \int_\tau \kappa[(G\text{-}O)\wedge \mathbf{u}]^2 d\tau +$$

$$+2\int_\tau \kappa[(P\text{-}G)\wedge \mathbf{u}]\cdot[(G-O)\wedge \mathbf{u}]d\tau =$$

$$= I_G + md^2 + 2\{\int_\tau \kappa P d\tau \text{-} G\int_\tau \kappa d\tau\}\wedge \mathbf{u}\cdot[(G-O)\wedge \mathbf{u}]$$

$$I = I_G + md^2$$

*Corollario:*
$D^2 = D_G^2 + d^2$

Il momento di inerzia di un sistema *S* rispetto ad un asse baricentrico *a'* è il più piccolo fra i momenti di inerzia di *S* rispetto a qualsiasi asse parallelo ad *a'.*



## Momento di inerzia per assi paralleli (2)

Sia ***a'* non baricentrico**; la formula di Huygens applicata ad *a* e *a'*, distanti *d* e *d'* da *G*, è:

$$I = I_G + md^2 \qquad I' = I_G + md'^2$$

da cui, sottraendo membro a membro:

$$I' = I + m(d'^2 - d^2)$$

$$D'^2 - D^2 = (d'^2 - d^2)$$

ESEMPIO: calcolo del momento d'inerzia di un'asta omogenea rispetto ad un asse a perpendicolare all'asta in uno dei suoi estremi, essendo noto $I_G = ml^2/12$

$$I = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}$$

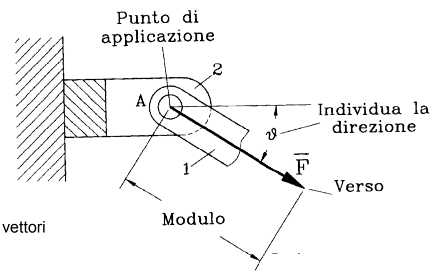
(si può facilmente verificare calcolando I mediante l'integrale)

# 3.3 - FORZE E MOMENTI

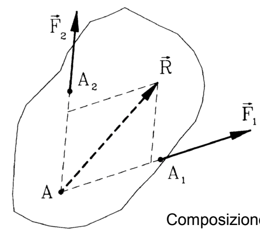
Le forze sono *vettori applicati* caratterizzati da *modulo*, *direzione*, *verso* e *punto di applicazione*.

Per il *principio di trasmissibilità*, una forza esterna può essere applicata in qualsiasi punto della sua *retta d'azione* senza alterare la risultante di tutte le forze esterne applicate al corpo rigido su cui essa agisce *(nota: per un corpo non rigido è invece influente lo spostamento lungo la retta d'azione).*

Le forze possono essere composte per trovare la loro risultante o scomposte secondo assegnate direzioni.




Forze come vettori applicati




Composizione delle forze



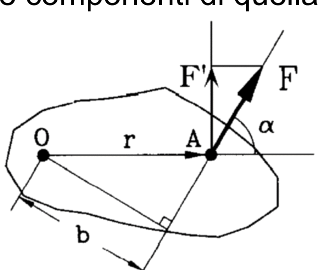
Il **momento** di una forza **F** rispetto al punto O è un vettore libero definito come:

$$M_0 = r \wedge F$$

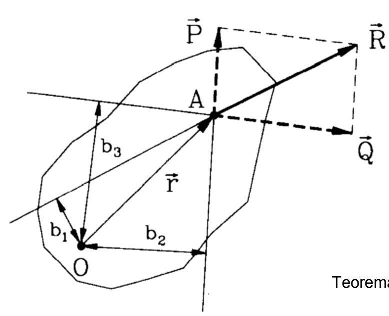
$$|M_0| = rF \sin\alpha = bF = rF'$$

che tende a far ruotare il corpo al quale è applicato intorno ad O.

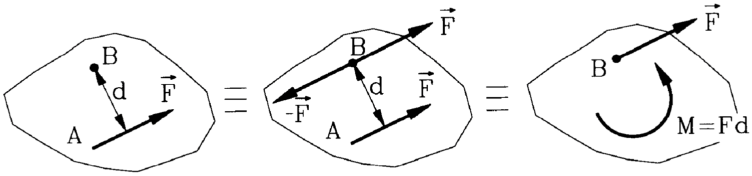
Il **teorema di Varignon** assicura che il momento di una forza attorno ad un punto qualsiasi è uguale alla somma dei momenti delle componenti di quella forza attorno allo stesso punto.




Momento di una forza




Teorema di Varignon




Trasposizione di una forza

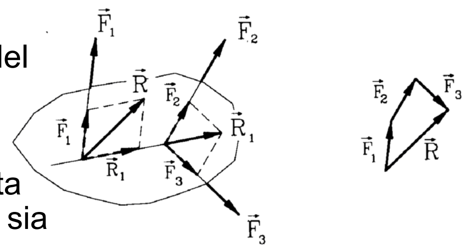
Una forza applicata in A può essere trasportata in B aggiungendo il relativo *momento di trasposizione*.

Quando su un corpo agisce un sistema di forze, se ne può calcolare la **risultante R**, che è una forza tale da produrre sul corpo lo stesso effetto del sistema di forze originario.

Il momento risultante di un sistema di forze varia al variare della posizione del polo secondo la legge:

$$M_{0'} = M_0 + R \wedge (O' - O)$$

per cui in generale dipende dalla scelta del polo, a meno che la risultante non sia nulla (**coppia di forze**).




Risultante di un sistema di forze



# 3.4 - EQUAZIONI CARDINALI DELLA DINAMICA

L'espressione **F**=m**a** stabilisce la relazione istantanea tra la forza agente su una particella e l'accelerazione (istantanea) che ne risulta. Quando si considerano intervalli di tempo finiti e sono richiesti i corrispondenti cambiamenti di velocità e posizione, è necessario integrare tale relazione.

Esistono due classi generali di problemi che considerano gli effetti cumulativi di forze non equilibrate; essi prevedono:

- l'*integrazione delle forze rispetto al tempo* in cui esse sono applicate: ciò porta alle **equazioni cardinali della dinamica**;
- l'*integrazione delle forze rispetto allo spostamento* della particella su cui esse agiscono: ciò conduce all'**equazione del lavoro e dell'energia**.

## QUANTITÀ DI MOTO E MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Per un **punto materiale** *P*, dotato di velocità ***v*** e massa *m*, la **quantità di moto *Q*** e il **momento della quantità di moto *K*** relativo al polo *O* valgono rispettivamente:

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{v} \qquad\qquad \mathbf{K}_O = (P - O) \wedge m\mathbf{v}$$

Per un **sistema di *N* punti materiali** $P_i$, dotati di velocità $\boldsymbol{v}_i$ e massa $m_i$, si ha:

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i \qquad\qquad \mathbf{K}_O = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge m_i \mathbf{v}_i$$

Per un **corpo continuo**, il cui generico punto P è dotato di velocità **v** e massa *m*, si ha:

$$\mathbf{Q} = \int_\tau \mathbf{v}\,dm = \int_\tau \mathbf{v}\rho\,d\tau \qquad \mathbf{K}_O = \int_\tau (P - O) \wedge \mathbf{v}\rho\,d\tau \qquad m = \int_\tau \rho\,d\tau$$

Si dimostra che se il sistema o il corpo ha baricentro in *G* vale:

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{v}_G \qquad\qquad \mathbf{K}_O = \mathbf{K}_G + (G - O) \wedge m\mathbf{v}_G$$



## EQUAZIONI CARDINALI DELLA DINAMICA

### Teorema della quantità di moto

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R} \qquad\qquad \mathbf{R} = \text{risultante delle forze esterne}$$

### Teorema del momento della quantità di moto

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} + \mathbf{v}_O \wedge m\mathbf{v}_G = \mathbf{M}_O$$

$\mathbf{M}_O$ = risultante dei momenti delle forze esterne calcolati rispetto al polo O

$$\text{se O è fisso:} \quad \mathbf{v}_O = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O$$

$$\text{se } O \equiv G: \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_O \equiv \mathbf{v}_G \qquad \mathbf{v}_O \wedge m\mathbf{v}_G = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{K}_G}{dt} = \mathbf{M}_G$$

# 3.5 - ENERGIA E LAVORO; RENDIMENTO

Un sistema meccanico può immagazzinare energia sotto forma di:

- *energia potenziale*
  - elastica (ad es. in una molla)
  - gravitazionale (es. in un pendolo spostato dalla posizione di equilibrio)
- *energia cinetica*
  - in un corpo in movimento

Un sistema meccanico inoltre può dissipare energia in calore attraverso:

- *dispositivi di smorzamento*
- *attriti*



## ENERGIA CINETICA DI UN SISTEMA RIGIDO

Se un sistema con baricentro in *G* è animato di **moto traslatorio**, la sua energia cinetica vale:

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_G^2$$

Se un sistema rigido è animato di **moto rotatorio** di velocità $\omega$ attorno ad un asse passante per *O*, la sua energia cinetica vale:

$$T = \frac{1}{2} I_O \omega^2$$

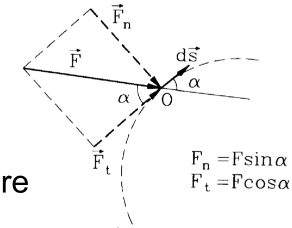
In generale, per qualsiasi sistema, vale il **Teorema di Konig**:

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

# LAVORO

Il lavoro eseguito da una forza ***F*** che sposta il suo punto di applicazione *O* da $P_1$ a $P_2$ è la quantità scalare definita da:

$$L = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{s_1}^{s_2} F_t(s)\, ds$$

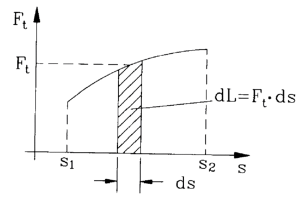



Lavoro come integrale curvilineo

Per svolgere questi integrali è necessario conoscere la relazione tra $F_t$ ed *s*.

Per quanto riguarda il lavoro di una coppia *M* si ha:

$$L = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} M\, d\vartheta$$




Lavoro come integrale della forza sullo spazio

Il lavoro può anche essere definito come integrale della potenza sul tempo tramite le seguenti espressioni:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}\, dt$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} M\omega\, dt$$



# TEOREMA DELLE FORZE VIVE (o dell'energia cinetica)

*Il lavoro compiuto da tutte le forze che agiscono su un sistema in un intervallo di tempo $\Delta t$ uguaglia la variazione di energia cinetica*:

$$L = \Delta T$$

Per un corpo rigido le forze interne non compiono lavoro (non ci sono spostamenti tra i punti), quindi solo il lavoro delle forze esterne (attive e vincolari) entra in gioco, per cui in forma elementare si scrive:

$$dL^{(a,e)} + dL^{(v,e)} = dT$$

Se inoltre i vincoli sono fissi e bilaterali il lavoro elementare delle reazioni vincolari è sempre nullo. In questo caso, pertanto, vale:

$$dL^{(a,e)} = dT$$

## CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Per il **principio di conservazione dell'energia** *il flusso totale di energia che il sistema scambia con l'esterno deve essere uguale alla variazione dell'energia totale del sistema.*

Quando in un sistema materiale vincolato tramite vincoli fissi e bilateri le forze attive sono conservative con potenziale *U*, dal teorema delle forze vive si ha:

$$dT = dL^{(a)} = dU$$

per cui la quantità $T - U$ si mantiene costante. Utilizzando l'energia potenziale $V = -U$, il **teorema di conservazione dell'energia meccanica** assume la forma:

$$T(t)+V(t) = E = \text{costante}$$



In generale per un sistema meccanico l'equazione di bilancio dell'energia si può scrivere in questi termini:

$$L_e^* + L_i^* = \Delta T + \Delta E_g + \Delta E_e$$

dove $L_e^*$ indica il lavoro delle forze esterne (escluse la forza peso e le forze d'inerzia) ed $L_i^*$ il lavoro delle forze interne (escluse le forze elastiche: ad es. forze di attrito nei vincoli interni della macchina, forze elettromagnetiche, ecc.) mentre $\Delta E_g$ e $\Delta E_e$ rappresentano la variazione di energia gravitazionale ed elastica rispettivamente.

Questa formulazione riporta al primo membro tutte le grandezze che dipendono dal *percorso* seguito dal sistema per portarsi dallo stato iniziale allo stato finale, mentre a secondo membro compaiono tutte le grandezze di *stato*, che dipendono solo dallo stato iniziale e finale e non dal tipo di percorso seguito.

## RENDIMENTO

Per sistemi meccanici costituiti da membri solidi (o fluidi incomprimibili) l'equazione dell'energia diventa:

$$L_i+L_e=L_m-L_r-L_p=\Delta T$$

- $L_m$ il lavoro delle forze interne ed esterne che compiono lavoro positivo, dette **forze motrici**
- $L_p$ lavoro delle forze interne dissipato nelle **resistenze passive**
- $L_r$ il lavoro delle forze interne ed esterne che compiono lavoro negativo, escluse quelle dissipative, dette **forze resistenti**

Una macchina in cui il moto dei diversi membri è costante nel tempo è detta a **regime assoluto**; per essa si ha:

$$L_m-L_r-L_p=0$$

Se le velocità di tutti i punti si ripetono ad intervalli di tempo costanti *T* (**regime periodico**), l'equazione precedente vale ancora sul periodo *T*.



Per definizione il termine $L_p$ in una macchina in **funzionamento reale** è sempre diverso da zero. Si può considerare un **funzionamento ideale**, corrispondente alle condizioni di attrito nullo, per il quale sia $L_p=0$; nel funzionamento ideale a regime si ha:

$$L_m^{id}=L_r$$

per una macchina si definisce **rendimento meccanico a regime** $\eta$ il rapporto:

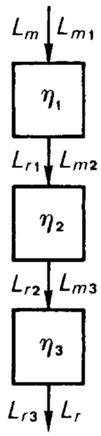
$$\eta=\frac{L_m^{id}}{L_m}=\frac{L_r}{L_m}=\frac{L_m-L_p}{L_m}=1-\frac{L_p}{L_m}=\frac{L_r}{L_r+L_p}$$

che è **sempre minore di 1**. Nel caso di sistemi con una sola forza motrice $F_m$ vale anche:

$$\eta=\frac{F_m^{id}}{F_m}$$

## Rendimento di macchine in serie

Il lavoro resistente di una macchina eguaglia il lavoro motore di quella successiva, quindi:




$$\eta = \frac{L_r}{L_m} = \frac{L_{r1}}{L_{m1}}\frac{L_{r2}}{L_{m2}}\frac{L_{r3}}{L_{m3}} = \eta_1\ \eta_2\ \eta_3$$

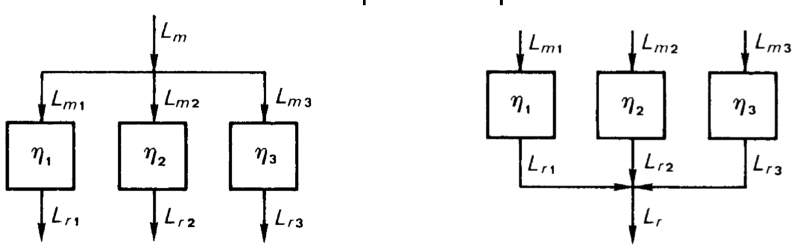
Il rendimento totale è il prodotto dei rendimenti; pertanto, se anche un solo componente ha basso rendimento tutta la catena ha basso rendimento.

Macchine in serie



## Rendimento di macchine in parallelo

Il lavoro motore è suddiviso fra più macchine, oppure il lavoro resistente è la somma di più lavori provenienti da diverse macchine:



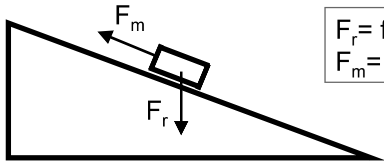

Macchine in parallelo

$$\eta = \frac{L_r}{L_m} = \frac{L_{r1}+L_{r2}+L_{r3}}{L_{m1}+L_{m2}+L_{m3}} = \frac{\eta_1 L_{m1}+\eta_2 L_{m2}+\eta_3 L_{m3}}{L_{m1}+L_{m2}+L_{m3}} =$$

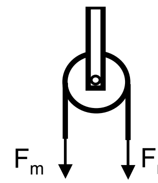
$$= \frac{L_{m1}}{L_m}\eta_1 + \frac{L_{m2}}{L_m}\eta_2 + \frac{L_{m3}}{L_m}\eta_3$$

Il rendimento totale è la somma dei rendimenti pesata con la quota di lavoro scambiato: se un componente ha basso rendimento ma è piccolo il suo scambio energetico il rendimento globale può ancora essere alto.

# 3.6 - MOTO RETROGRADO; IRREVERSIBILITA' DEL MOTO




$F_r$= forza resistente
$F_m$= forza motrice




Se, a partire da condizioni di regime, si riduce la forza motrice $F_m$ , può succedere che:

– la macchina si arresti
– la macchina si muova al contrario

In quest'ultimo caso il moto si chiama **retrogrado** e la forza $F_r$ che era resistente nel moto **diretto** diventa forza motrice nel moto retrogrado: $F'_m = F_r$



Nel moto retrogrado tutti i punti descrivono le stesse traiettorie del moto diretto in senso opposto per cui, indicando con $L'_m$ , $L'_r$, $L'_p$ i lavori motore, resistente e dissipato nel moto retrogrado, si ha:

$$L_r = L'_m$$

È possibile ricavare l'espressione del rendimento $\eta'$ nel moto retrogrado:

$$\begin{cases} \eta = \dfrac{L_r}{L_m} \\ \eta' = \dfrac{L'_r}{L'_m} = \dfrac{L'_r}{L_r} \end{cases}$$

$$\frac{1-\eta}{1-\eta'} = \frac{L_m - L_r}{L_m}\,\frac{L'_m}{L'_m - L'_r} = \frac{L_m - L_r}{L'_m - L'_r}\,\frac{L_r}{L_m} = \frac{L_p}{L'_p}\,\eta = \frac{1}{C}\,\eta$$

$\Rightarrow$ $\eta' = (1 + C) - C/\eta$ avendo posto: $C = L'_p / L_p$

## IRREVERSIBILITA'

I meccanismi per cui si ha $\eta' \leq 0$ sono **meccanismi irreversibili**; ciò si verifica se, per effetto dell'attrito, movente e cedente non possono scambiarsi le funzioni.

Per essi si ha:

$$(1+C) - C/\eta \leq 0 \quad \rightarrow \quad \eta \leq \frac{C}{1+C}$$

detta **condizione di arresto spontaneo.**

Se C $\cong 1$ la condizione di arresto spontaneo si verifica per:

$$\eta \leq 0.5$$

*I meccanismi irreversibili hanno modesti rendimenti nel moto diretto*. Ciò non significa che non sia possibile invertire il verso degli spostamenti, ma solo che non è possibile farlo agendo solo sul membro che nel moto diretto è il cedente: è invece possibile farlo agendo sullo stesso movente del moto diretto.