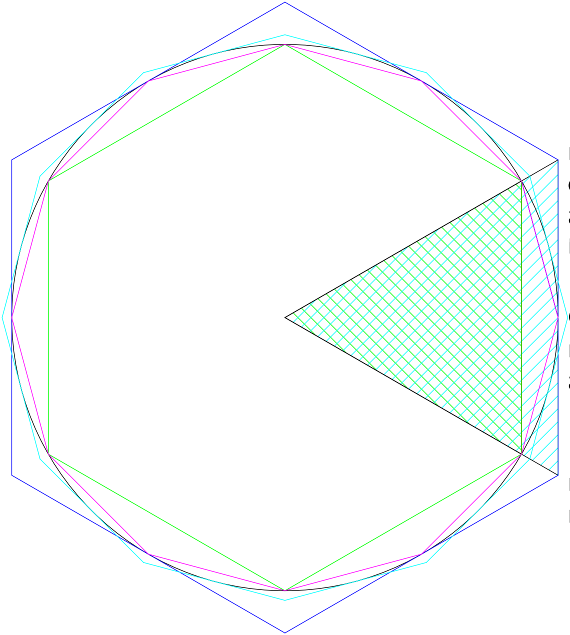
π

Ottavio Caligaris

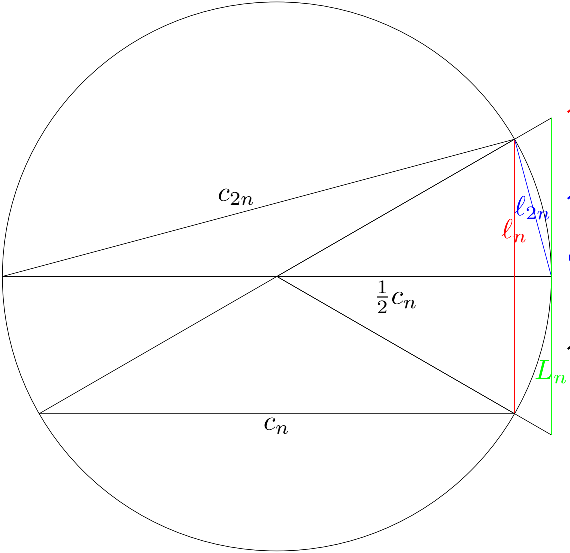
Università di Genova - Polo di Savona - Facoltà di Ingegneria



L'area dei poligoni regolari inscritti nel cerchio di raggio 1 approssima per difetto l'area del cerchio.

Quella dei poligoni regolari circoscritti la approssima per difetto.

L'approssimazione migliora se raddoppiamo il numero dei lati



L_n lato del poligono regolare circoscritto di n lati

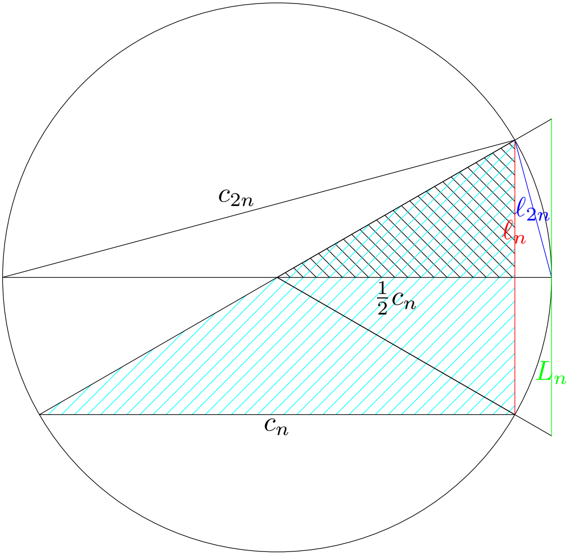
ℓ_n lato del poligono regolare inscritto di n lati

ℓ_{2n},L_{2n} lato del poligono regolare inscritto, circoscritto di $2n$ lati

c_n, c_{2n} complementi di ℓ_n, ℓ_{2n}

c_n, ℓ_n ed il diametro per un estremo di ℓ_n formano un triangolo rettangolo.

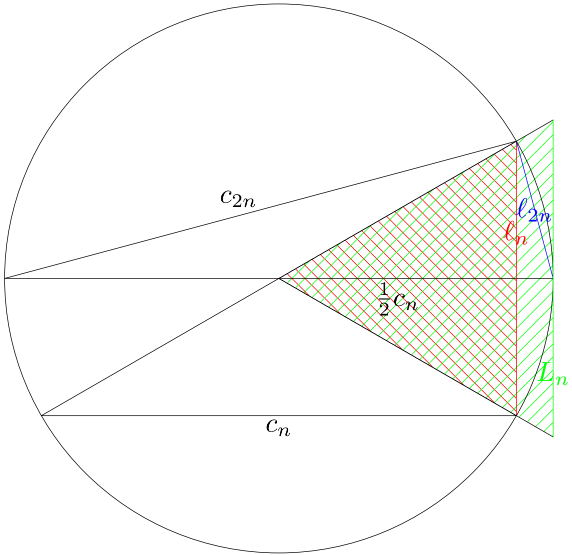
a_n,A_n sono le aree dei poligoni regolari inscritti e circoscritti.



La similitudine dei triangoli assicura che il segmento che congiunge il centro del cerchio ed il punto medio di ℓ_n misura

$$\frac{1}{2}c_n$$

Per la similitudine dei triangoli



$$\frac{\ell_n}{L_n} = \frac{1}{2}c_n$$

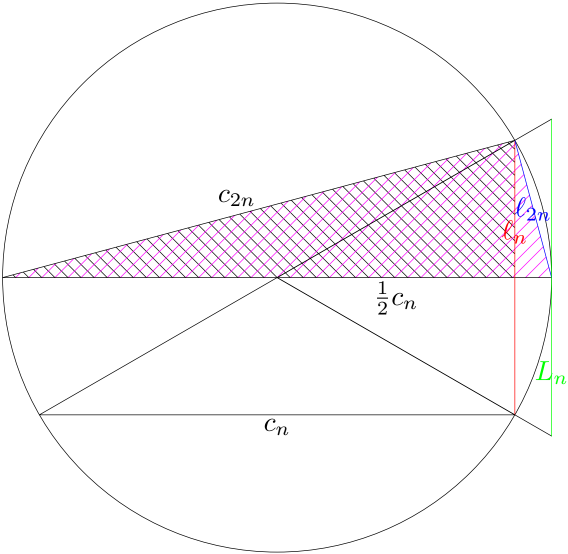
$$c_n = \frac{2\ell_n}{L_n} \quad , \quad L_n = \frac{\ell_n}{\frac{1}{2}c_n}$$

$$a_{2n} = \frac{n}{2}\ell_n \ , \ a_n = \frac{n}{2}\ell_n\frac{1}{2}c_n$$

$$A_n = \frac{n}{2}L_n$$

$$a_{2n}^2 = (\frac{n}{2}\ell_n\frac{1}{2}c_n)(\frac{n}{2}\frac{\ell_n}{\frac{1}{2}c_n})$$

$$a_{2n}^2 = (\frac{n}{2}\ell_n)(\frac{n}{2}L_n) = a_nA_n$$



Per il Teorema di Talete

$$c_{2n}^2 = 2(1 + \frac{1}{2}c_n) = 2 + c_n$$

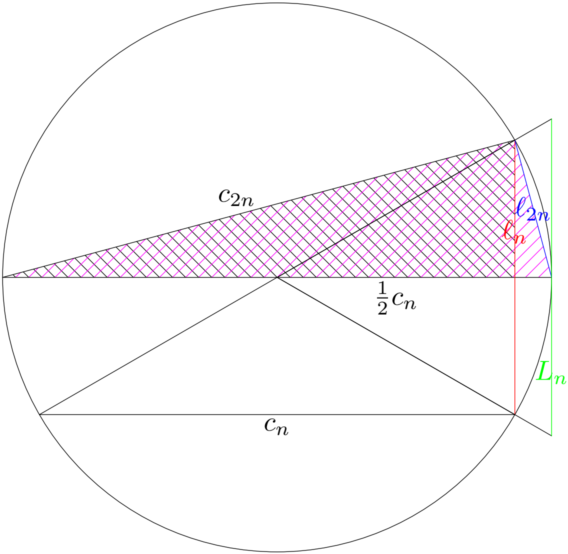
Per la similitudine dei triangoli

$$\frac{c_{2n}}{2} = \frac{\frac{\ell_n}{2}}{\ell_{2n}} \quad , \quad c_{2n} = \frac{\ell_n}{\ell_{2n}}$$

$$2 + c_n = c_{2n}^2 = \frac{2\ell_n}{\ell_{2n}}\frac{\ell_{2n}}{L_{2n}}$$

$$2 + \frac{2\ell_n}{L_n} = 2 + c_n = 2\frac{\ell_n}{L_{2n}}$$

$$\frac{1}{L_{2n}} = \frac{1}{\ell_n} + \frac{1}{L_n}$$



$$L_{2n} = \frac{\ell_n L_n}{L_n + \ell_n}$$

$$nL_{2n} = \frac{n\ell_n nL_n}{nL_n + n\ell_n}$$

$$A_{2n} = \frac{2a_{2n}A_n}{a_{2n} + A_n}$$

Pertanto dette a_n e A_n le aree dei poligoni regolari inscritti e circoscritti nel cerchio di raggio 1 avremo che

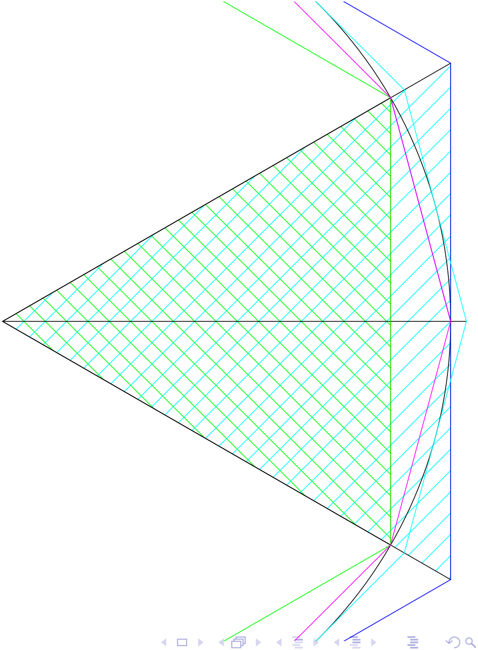
$$\begin{cases} a_{2n} = \sqrt{a_n A_n} \\ A_{2n} = \frac{2a_{2n}A_n}{a_{2n}+A_n} \end{cases}$$

Possiamo pertanto considerare due successioni definite da

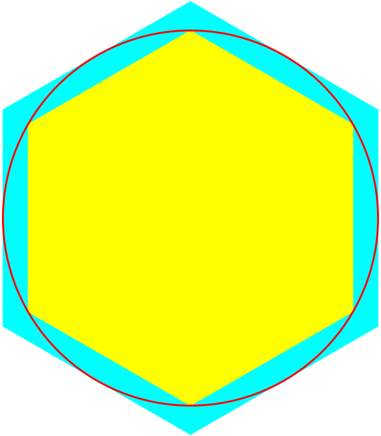
$$B_k = A_{2^k n} \quad , \quad b_k = a_{2^k n}$$

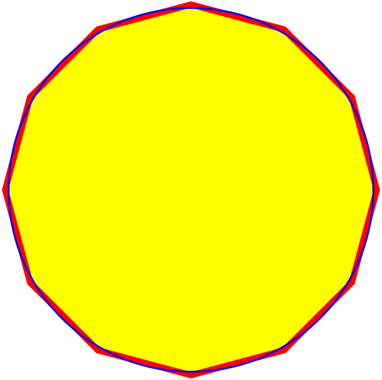
i cui valori sono le aree dei poligoni regolari circoscritti ed inscritti di $2, 4, 8, 16 \ldots$ lati.

È evidente che b_k è crescente e limitata superiormente e che B_k è decrescente e limitata inferiormente;



Inoltre è evidente che $B_k - b_k$ tende a zero.





Ne possiamo quindi dedurre che sia B_k che b_k tendono ad un medesimo valore che definiamo π e che rappresenta l'area del cerchio di raggio 1.
Possiamo inoltre rendere queste considerazioni formalmente ineccepibili.

è intanto ovvio che

$$A_n \geq a_m \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

perciò

$$a_{2n} = \sqrt{a_n A_n} \geq \sqrt{a_n^2} = a_n$$

mentre

$$A_{2n} = \frac{2a_{2n}A_n}{a_{2n} + A_n} \leq \frac{2a_{2n}A_n}{a_{2n} + a_{2n}} = A_n$$

inoltre

- a_n è superiormente limitata dall'area del Triangolo equilatero circoscritto

  mentre

- A_n è inferiormente limitata dall'area del Triangolo equilatero inscritto.

Ne deduciamo che $B_k \to P$ e $b_k \to p$ con $p, P \in \mathbb{R}$.
Passando al limite nelle relazioni di ricorrenza si ottiene

$$\begin{cases} p^2 = pP \\ P = \frac{2pP}{p+P} \Longrightarrow P^2 + pP = 2pP \Longrightarrow P^2 = pP \end{cases}$$

Ne segue subito che $p = P$
e possiamo definire il valore comune π

Le relazioni

$$\begin{cases} p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}} \\ P_{2n} = \frac{2p_n P_n}{p_n + P_n} \end{cases}$$

legano i perimetri p_{2n} e P_{2n} dei poligoni regolari inscritti e circoscritti di $2n$ lati con quelli di n lati.
La prima si ricava osservando che

$$\frac{\ell_{2n}}{L_{2n}} = c_n = \frac{2\ell_{2n}}{2n}$$

mentre la seconda è diretta conseguenza della

$$L_{2n} = \frac{\ell_n L_n}{\ell_n + L_n}$$

Ricordando che $p_n = n\ell_n$ e $P_n = nL_n$

Le stesse considerazioni fatte per le successioni a_n e A_n permettono di concludere che p_n e P_n tendono ad un valore $q \in \mathbb{R}$. Se teniamo conto che $P_n = 2A_n$ possiamo ancora concludere che $q = 2\pi$ e possiamo definire in tal modo la lunghezza della circonferenza unitaria.