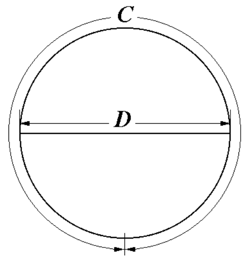
Pi greco - un po' di storia e qualche curiosità

Savona, 14 Marzo 2011

P.Oliva



Fin dai tempi antichi l'uomo notò che tutti i cerchi sono *simili*, cioè le lunghezze di circonferenza e diametro sono in uguale proporzione.

Come ogni studente ben sa questo rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e quello del suo diametro viene indicato con π (pi greco) e tale valore vale circa 3.14 (alcuni per la verità pensano che sia esattamente quel valore).

Oggi noi sappiamo che π non è un numero razionale (Lambert, 1761) e quindi né decimale finito, né scrivibile in termini di frazione; sappiamo pure che è trascendente (Lindemann,1882), ovvero non è soluzione di nessuna equazione algebrica a coefficienti razionali (come era ad esempio $\sqrt{2}$).

Tutto ciò chiude il famoso problema della quadratura del cerchio, ovvero dichiara impossibile poter disegnare con un numero finito di operazioni con riga e compasso il lato di un quadrato la cui area sia equivalente a quella di un dato cerchio; problema che aveva a lungo assillato gli antichi Greci e molti dopo di loro in epoche più recenti, nonostante già nel 1544 Stifel dicesse *"Frustra laborant quotquot se calcolationibus fatigant pro inventione quadrature circuli"*.

Il valore di π con le prime cinquanta cifre decimali esatte è

3. 14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510

Notiamo quindi che se utilizziamo il solito valore 3.14 e calcoliamo la circonferenza di una ruota di raggio 1 metro commettiamo un errore di circa 3mm, trascurabile, anche se non proprio piccolissimo.

Attualmente (2010) il valore di π è stato calcolato (utilizzando i computer) con piu' di 5000 miliardi di cifre.

Si osservi che questo valore è spaventosamente grande (5 tera di cifre): ad esempio la Divina Commedia o i Promessi Sposi contengono meno di 2 milioni di caratteri; questo significa che per scrivere tutte le cifre calcolate di π sono necessari più di due milioni e mezzo di volumi di Promessi Sposi. Messi in fila, considerando una edizione economica, fanno una fila lunga 50 Km.

Vista in un altro modo: per recitarle tutte, al ritmo di una cifra ogni mezzo secondo, sono necessari più di 79220 anni !

La domanda a questo punto è: ma sono necessarie tutte queste cifre per calcoli più accurati?

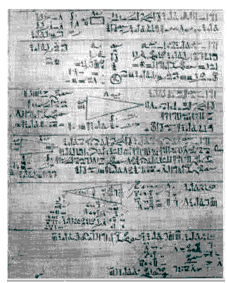
Per rispondere si consideri che il raggio stimato dell'universo è dell'ordine di 10^{26} metri, mentre il raggio dell'elettrone è dell'ordine di 10^{-15} metri; questo significa che per calcolare la lunghezza di una circonferenza avente il diametro dell'universo (ipotizzando una geometria euclidea) con una precisione pari al raggio di un elettrone, sono sufficienti 42 cifre decimali di π.

E allora a che servono tutte le altre? Una esauriente risposta (per un matematico) è stata data da qualcuno che ha ripetuto la risposta di Sir Edmund Hillary a chi gli chiedeva perché avesse scalato l'Everest: semplicemente "perché è lì".

Ma torniamo alla storia del nostro numero: indubbiamente π è uno dei più famosi ed importanti numeri con cui uno studente abbia avuto ed avrà a che fare.

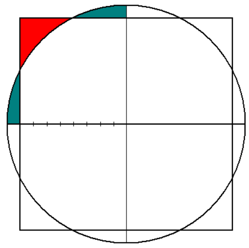
In origine Oughtred (1647) e Gregory (1697) utilizzarono questo simbolo per la lunghezza di una circonferenza (da $\pi\epsilon\rho\iota\mu\epsilon\tau\rho o\zeta$ perimetro) : più precisamente π/r indicava il rapporto fra le misure di circonferenza e raggio.

Il primo uso di π con l'attuale significato risale al matematico William Jones (1706) e nel 1737 Eulero adottò questo simbolo che divenne rapidamente una notazione standard.



Il problema di determinare la lunghezza di una circonferenza, noto il suo diametro, è un problema antichissimo: 2000 anni prima dell'era cristiana i Babilonesi utilizzavano come approssimazione di π il valore $25/8 = 3.125$, gli Indiani $\sqrt{10} \approx 3.16227766$, mentre dal papiro di Rhind (a destra), datato intorno al 1650 a.C., si deduce che gli Egiziani utilizzavano il valore $(16/9)^2 = 256/81 \approx 3.16049383$.

Tale papiro che ha le dimensioni di circa 33 cm per 3 m, deve il suo nome all'antiquario scozzese Henry Rhind che lo acquistò nel 1858 a Luxor ed è oggi conservato al British Museum. È noto anche come papiro di Ahmes dal nome dello scriba che lo trascrisse appunto verso il 1650 a.C.



In esso sono contenuti molti problemi matematici con relativa soluzione ed in particolare si dice:

Togli 1/9 a un diametro e costruisci un quadrato sulla parte che ne rimane; questo quadrato ha la stessa area del cerchio

Ne segue che l'area del cerchio di raggio 9 ($9^2\pi$) è uguale all'area di un quadrato di lato 16 (16^2), da cui $\pi = (16/9)^2$.

È evidentemente un tentativo di quadratura del cerchio; problema che come già osservato oggi sappiamo essere impossibile, almeno nei termini fissati da Euclide (300 a.C.):

- la costruzione delle figure deve avvenire con l'uso esclusivo di riga e compasso;
- deve essere possibile effettuarla in un numero finito di passi.

Un altro riferimento indiretto al pi greco si trova nella Bibbia: nel primo Libro dei Re (7,23) mentre si descrive la costruzione del Tempio da parte di re Salomone, e più precisamente di un grande bacino di bronzo (mare), sorretto da dodici buoi, si legge

"Fece poi il mare in metallo fuso, a forma circolare, di dieci cubiti da un orlo all'altro. Era alto cinque cubiti, mentre una cordicella di trenta cubiti ne misurava la circonferenza".

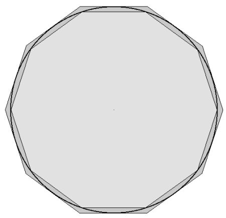
Da tale verso si deduce che il rapporto tra la lunghezza della circonferenza ed il suo diametro si deve considerare uguale a 3.

Tale valore appare molto approssimato, date le precedenti e ben documentate stime di Egiziani e Babilonesi, ma va osservato che non ci si trova certamente di fronte ad un testo di matematica.

Il primo calcolo teorico del valore di π sembra comunque essere quello di Archimede di Siracusa (282-212 a.C.); egli ottenne l'approssimazione

$$3.14084507 \approx 3 + \frac{10}{71} = \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} = 3 + \frac{10}{70} \approx 3.14285714$$

che, per la prima volta fornisce una stima sia per eccesso che per difetto del valore corretto, con un errore di circa 0.00026 sul valore medio.



Archimede sapeva quindi di non conoscere il valore esatto di π, ma forniva comunque un piccolo intervallo di valori entro cui esso doveva sicuramente stare.

L'idea è quella di approssimare la lunghezza della circonferenza mediante i perimetri di poligoni (regolari) inscritti e circoscritti; più il numero dei lati è grande, più la stima sarà precisa.

È possibile ricavare delle formule che, partendo dal perimetro dell'esagono inscritto e circoscritto, permettono via via di calcolare il perimetro dei poligoni inscritti e circoscritti di un numero doppio di lati, ottenendo in tal modo quelli con 12, 24, 48, 96, ... Tali formule sono facilmente ricavabili dalla similitudine di opportuni triangoli e coinvolgono operazioni di somma, differenza, prodotto, rapporto e radice quadrata (non sono qui riportate per semplicità).

Utilizzando tale metodo si ottiene, per i perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti in un cerchio di diametro unitario (arrotondato alla decima cifra decimale):

numero lati	poligono inscritto	poligono circoscritto
6	3	3.4641016151
12	3.1058285412	3.2153903092
24	3.1326286133	3.1596599421
48	3.1393502030	3.1460862151
96	3.1410319509	3.1427145996

Si noti che il valore ottenuto per 96 lati (poligono a cui si ferma il calcolo di Archimede) fornisce una stima di poco più precisa di quella di Archimede, la quale ha però il grosso pregio di ottenere come valori approssimanti due frazioni estremamente semplici.

Si tenga ben presente che Archimede non aveva le notazioni algebriche e trigonometriche oggi in nostro possesso; le formule che noi possiamo scrivere e dimostrare in due righe furono da lui dedotte con pure considerazioni geometriche e con chissà quanta fatica.

Il fatto che quindi Archimede si sia fermato ad un poligono di 96 lati è stupefacente, non perché siano *solo* 96, ma nel senso che sia riuscito ad arrivare così lontano, con i mezzi di calcolo (il cervello e le mani) a sua disposizione.

Proseguendo velocemente nella storia i romani usavano $\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7}$, ma a volte preferivano $\frac{25}{8} = 3 + \frac{1}{8}$ in quanto è più facile trovare la circonferenza sommando 3 volte il diametro ad un ottavo dello stesso (la metà della metà della metà).

Una successiva interessante approssimazione di π è $\frac{355}{113}$ fornita da Tsu Ch'ung Chi (430-501 d.C.) che vale, con otto cifre decimali, 3.14159292 con un errore di 0.00000027, ovvero esatta fino alla sesta cifra decimale (una precisione superiore a qualunque necessità pratica).

Si noti come tale approssimazione sia facilmente memorizzabile, essendo formata dai numeri 113 e 355 (in sequenza 113355).

Ancora una volta notiamo come si approssimi π con una frazione abbastanza semplice; questo fatto che a noi utilizzatori delle macchine calcolatrici può sembrare inutile (perché non usare un po' di cifre decimali?) era essenziale nei tempi antichi, quando i conti si facevano a mano e non si avevano le notazioni algebriche attuali, che semplificano l'elaborazione dei calcoli, né tantomeno la notazione attuale dei numeri. Si pensi ad esempio alla numerazione romana: come si fa a mettere in colonna i numeri per sommarli, o si è mai vista una frazione con i numeri romani, o un numero romano con la virgola?

Ecco che allora diventava importante nella vita comune lavorare con numeri semplici, interi, e piccoli.

A questo proposito si noti che è facile approssimare con una frazione un qualunque numero: se vogliamo approssimare 3.141592653.. con sei cifre decimali esatte basta considerare $\frac{3141592}{1000000}$, ma questa frazione è ben più brutta di quel $\frac{355}{113}$ dato prima, con la stessa precisione!

Vale quindi la pena di osservare che noi oggi, grazie al fatto che conosciamo bene il valore di π (ma l'algoritmo che descriveremo tra poco vale per qualunque numero reale) possiamo determinare facilmente delle semplici frazioni che lo approssimano.

È sufficiente prendere il numero desiderato e dividerlo per 1; si otterrà un quoziente intero ed un resto; si divide poi il divisore precedente per il resto ottenendo un altro quoziente intero ed un nuovo resto, e così via. Nel caso di π utilizzando nove cifre decimali,

$$\begin{aligned} 3.141592654 &= 1 \cdot 3 + 0.141592654 \\ 1 &= 0.141592654 \cdot 7 + 0.008851422 \\ 0.141592654 &= 0.008851422 \cdot 15 + 0.008821324 \\ 0.008851422 &= 0.008821324 \cdot 1 + 0.000030098 \\ \ldots &= \ldots \end{aligned}$$

e dalla sequenza dei quozienti 3, 7, 15, 1, ..., si costruiscono le frazioni

$$3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} \quad , \quad 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}} = \frac{333}{106} \quad , \quad 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = \frac{355}{113}$$

Ecco magicamente apparire le due frazioni $\frac{22}{7}$ di Archimede e $\frac{355}{113}$ di Tsu Ch'ung Chi.

Per quanto riguarda la seconda frazione $\frac{333}{106}$ riportiamo una curiosa interpretazione, un po' tirata per i capelli, del valore 3 dato dalla Bibbia.

Nella Britannica (1985), viene fatto notare che nella versione originale della Bibbia una parola del verso viene scritta "QVH", mentre la corretta lettura dovrebbe essere "QV"; in effetti la stessa frase si può ritrovare nella Cronache (4,2), di successiva stesura, con lo stesso identico testo e la versione "QV".

Ora va considerato che, ben prima della costruzione del Tempio, le lettere dell'alfabeto Ebraico erano anche usate a scopi numerici; si possono quindi calcolare i valori delle parole (sommando i contributi delle singole lettere, anche se questo non è l'unico modo documentato) ed essendo i valori standard dati da $Q = 100$, $V = 6$, $H = 5$ si deduce che la parola "QVH" assume il valore di $100 + 6 + 5 = 111$, mentre il valore di "QV" risulta $100 + 6 = 106$.

Se ne dedurrebbe da ciò una correzione del valore 3, secondo la frazione 111/106, ottenendo il valore di $3 \times 111/106 = 333/106 \approx 3.14150943$ (guarda caso la frazione precedentemente trovata)

Dopo Tsu Ch'ung Chi non vi sono stati grossi passi avanti per la determinazione del valore di π, per tutto un millennio; ricordiamo il matematico indiano Brahmagupta (650 d.C.) che portando avanti i calcoli nello stile di Archimede arrivò a supporre erroneamente che i perimetri dei poligoni tendessero a $\sqrt{10}$.

Verso il 1430 Al-Kashi calcolò 14 cifre decimali di π, Van Ceulen (1600) ne trovò 35, ma bisogna arrivare fino alla metà del 1600, con la sistemazione delle notazioni algebriche, per un rifiorire di formule atte al calcolo di π.

A titolo di esempio, onde capire le difficoltà che dovevano superare i matematici del tempo, la seguente tabella illustra le notazioni di allora e di oggi:

Data	Matematico	Simbolismo usato	Forma attuale
1494	Pacioli	Trouame .1.n^o, che giōto al suo q̄drat^o facia .12.	$x + x^2 = 12$
1521	Ghaligai	1 $\square$ e 32 c^o - - 320 numeri	$x^2 + 32x = 320$
1545	Cardano	cub^9 p: 6 reb^9 aeq̂lis 20	$x^3 + 6x = 20$
1556	Tartaglia	Trouame uno numero che azontoli la sua radice cuba uenghi ste, cioe .6.	$x + \sqrt[3]{x} = 6$
1559	Buteo	1 $\diamondsuit$ P6ρP9 $\sqsubset$ 1 $\diamondsuit$ P3ρP24	$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 3x + 24$
1577	Gosselin	12LM1QP48 aequalia 144M24LP2Q	$12x - x^2 + 48 = 144 - 24x + 2x^2$
1586	Ramus	1q $+$ 8l aequatus sit 65	$x^2 + 8x = 65$
1631	Harriot	aaa $-$ 3 $\cdot$ bba $=\!=$ + 2 $\cdot$ ccc	$a^3 - 3b^2a = 2c^3$
1693	Wallis	$x^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$	$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

Una delle prime fu quella di Viète (1593)

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\dots.$$

citiamo poi quella di Wallis (1616-1703)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\dots.}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\dots.}$$

mentre quella forse più nota è dovuta a Gregory (1638-1675)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots.$$

Tale formula, estremamente semplice, ci permette di calcolare π con arbitraria precisione, pur di avere la pazienza di sommare molti termini; la convergenza di tale sviluppo risulta però molto lenta; per avere cioè una precisione di $\frac{1}{1000}$, ovvero al più 3 cifre decimali esatte, bisogna sommare 500 termini di quella serie.

È chiaro che tutto ciò non risulta conveniente. Utilizzando un po' di Analisi matematica, si possono provare formule che permettono un più rapido calcolo; sapendo che, se $|x| < 1$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots.$$

citiamo ad esempio

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$

e (Machin, 1706)

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

Rimandiamo a Wikipedia per moltissime altre interessanti formule per il calcolo di π (ed anche per molte altre informazioni, curiosità e riferimenti bibliografici).

Con le formule date iniziò una gara a chi riusciva a calcolare più cifre decimali esatte di π:

1699: Sharp, 71 cifre con la formula di Gregory;

1706: Machin, 100 cifre con il suo metodo;

dopo di lui, sempre utilizzando la sua formula

1719: de Lagny, 112 cifre;
1789: Vega, 126 cifre, e poi 136 cinque anni dopo;
1841: Rutheford, 152 cifre, e poi 440 dodici anni dopo;
1873: Shanks, 707 cifre, (di cui 527 esatte).

Poco dopo il calcolo di Shanks, esaminando la distribuzione delle cifre nello sviluppo decimale di π, De Morgan notò una sospetta eccessiva presenza di 7 verso la fine dello sviluppo stesso e pubblicò tale osservazione nel suo Budget of Paradoxes.

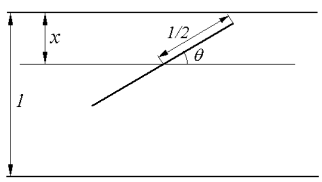
Soltanto molti anni più tardi, nel 1945, Ferguson scoprì che Shanks aveva commesso un errore nella 528 cifra, e quindi tutte le successive erano sbagliate (quanta fatica inutile!).

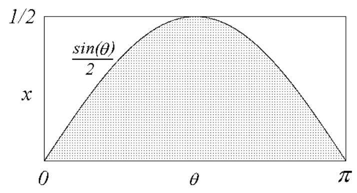
Per tornare al significato di π, esso non compare solo nel problema della quadratura del cerchio; come diceva De Morgan "questo misterioso 3.14159... che entra da ogni porta e da ogni finestra e che si trova sotto ogni tetto".

Per esempio, la probabilità che presi due numeri interi a caso, essi non risultino avere divisori comuni, è data sorprendentemente da $6/\pi^2$.

Ma forse il più noto caso in cui π entra nella teoria della probabilità è il problema dell'ago di Buffon (1777):

lanciando a caso un ago di lunghezza 1 su di un foglio su cui sono tracciate delle linee parallele distanti 1, qual è la probabilità che l'ago cada toccando una linea ?





Dalla figura di sinistra si vede che, detta x la distanza del centro dell'ago dalla linea più vicina, e detto θ l'angolo con cui si è posato l'ago stesso, misurato a partire da una linea parallela alle altre, quest'ultimo intersecherà la linea se

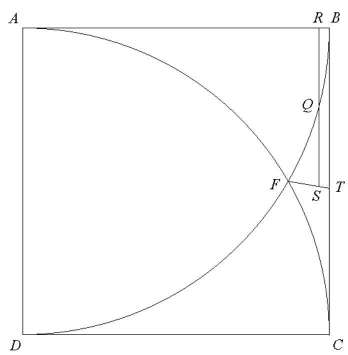
$$\frac{1}{2}\sin\theta \;\geq\; x$$

Poiché dovrà essere $x \in [0, 1/2]$ e $\theta \in [0, \pi]$, nella figura di destra il rettangolo rappresenta tutti gli eventi possibili, mentre la parte ombreggiata rappresenta i casi in cui l'ago interseca la linea. Ritenendo tutti gli eventi equiprobabili, la probabilità cercata sarà il rapporto fra l'area ombreggiata e quella totale del rettangolo.

Con un semplice calcolo, l'area sotto la funzione $\frac{\sin\theta}{2}$ risulta $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{2}\, dt = 1$ e quindi la probabiltà richiesta è

$$\frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \qquad .$$

Tornando alla storia di π, i sostenitori della quadrabilità del cerchio, convinti di averne scoperto l'esatto valore, sono stati moltissimi, ma nessuno forse ha mai superato il filosofo inglese Thomas Hobbes, nel 1600. Costui incominciò ad interessarsi di matematica dopo i 40 anni, leggendo Euclide; fu una fulminazione: per il resto della sua vita si dedicò alla geometria con passione smisurata (scrisse "la geometria possiede un qualcosa che inebria, come il vino").



Se si fosse accontentato di restare un dilettante della matematica, i suoi ultimi anni sarebbero trascorsi più serenamente, ma egli si convinse di poter fare grandi scoperte matematiche. Nel 1655, a 67 anni, pubblicò un volume in lingua latina intitolato 'De corpore', in cui presentava un ingegnoso metodo per ottenere la quadratura del cerchio, iniziando una disputa che durò quasi un quarto di secolo con i matematici del tempo, ed in particolare con il già citato Wallis, che di lui diceva avere una 'curiosa incapacità di apprendere cose che non aveva capito'.

Il metodo usato per quadrare il cerchio è illustrato nella figura a fianco: in un quadrato di lato 1 si tracciano i due quadranti di cerchio con raggio unitario centrati in A e D, che di incontrano in F; si biseca l'arco BF in Q; si traccia un segmento passante per Q parallelo al lato BC e si determina il punto S in modo che Q sia punto medio di RS; si prolunga infine il segmento FS fino ad incontrare in T il lato BC.

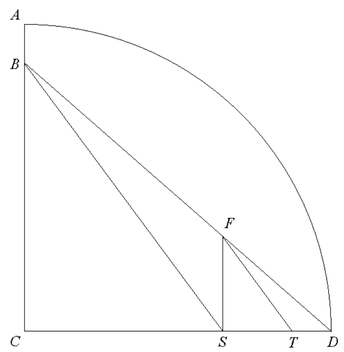
Hobbes asseriva che il segmento BT è uguale all'arco BF, ed essendo quest'ultimo $\frac{1}{12}$ della circonferenza di raggio 1, si aveva che π risultava uguale a sei volte la lunghezza di BT.

Determinando BT si deduce per π un valore di

$$\frac{12\sqrt{6}+9\sqrt{3}-21\sqrt{2}-9}{2} \approx 3.14192469$$

abbastanza buono, ma ovviamente non esatto.

Illustriamo qui a destra una costruzione basata sulla frazione dell'astronomo cinese Tsu Ch'ung Chi.



Dato un quadrante di cerchio di raggio 1, sia $\overline{AB} = \frac{1}{8}$ e sia $\overline{FD} = \frac{1}{2}$. Si tracci quindi il segmento FS parallelo ad AC e poi il segmento FT parallelo a BS.

È facile provare, dalla similitudine dei triangoli FTD e BSD, che $\overline{TD}/\overline{SD} = \overline{FD}/\overline{BD}$ e dai triangoli FSD e BCD che $\overline{SD}/\overline{CD} = \overline{FD}/\overline{BD}$ da cui $\overline{TD} = (\overline{FD}/\overline{BD})^2 = \frac{16}{113}$.

Aggiungendo al segmento TD un segmento di lunghezza 3, si otterrà quindi un segmento lungo $3 + \frac{16}{113} = \frac{355}{113}$.

π è stato anche motivo di grosse dispute nel passato, anche se sarebbe meglio dire che in alcuni casi ne è stato solo la scusa per motivare il contendere.

Ad esempio, nel 1934, il noto matematico Landau dovette dimettersi dalla sua cattedra di Göttingen, perché in un suo testo aveva definito $\pi/2$ come quel valore tra 1 e 2 in cui il coseno si annulla; tale definizione fu ritenuta da Bieberbach (eminente studioso di teoria dei numeri) non gradita allo spirito germanico.

Un'altra sorprendente curiosità di fine 1800 è legata al matematico e fisico dilettante Goodwin. Costui dichiarò di aver risolto vari problemi tra cui la trisezione dell'angolo, la quadratura del cerchio , ecc. (di cui era già da tempo nota l'imposssibilità)

Si fece quindi approvare all'unanimità dalla Commissione per l'Educazione del Senato dell'Indiana, nel 1897, una legge composta di vari articoli, fra i quali ad esempio

- *l'Assemblea Generale dello Stato dell'Indiana decreta: l'area del cerchio sta al quadrato costruito su una linea pari ad un quarto di circonferenza, come l'area del rettangolo equilatero (*quadrato*) sta al quadrato di un suo lato*

ovvero $\pi = 4$. !!! ed altre simili facezie, da cui si potevano dedurre differenti valori di π.

Uno dei motivi del voto fu che il "professor" Goodwin, che aveva brevettato il proprio metodo, lo avrebbe però offerto in usufrutto gratuito alle scuole dell'Indiana.

Per fortuna tale legge non passò mai al Senato, che pur approvandola in prima lettura non procedette oltre dopo che il testo venne mostrato ad un professore di matematica della Purdue University che si trovava a passare di lì per caso.

Altre curiosità sono particolari filastrocche atte a ricordare le varie cifre di π: ad ogni parola corrisponde una cifra a seconda delle lettere della parola stessa. Ad esempio, in italiano,

Ave o Roma o Madre gagliarda di latine virtù che tanto luminoso splendore prodiga spargesti con la tua saggezza.

che fornisce 18 cifre, o per 11 cifre

Che n'ebbe d'utile Archimede da ustori vetri sua somma scoperta?

o per ben 83 cifre (i ... significano 0)

Più o meno è forse Archimede il grande genio che trovò pensando soluzioni incerte, disegnava con il suo compasso gran cerchi su sabbia nuda per far imparare con le formule gradevoli forme ...; lo travolse gridando ieri l'incredulo soldato e adesso piangiamo con amorevole rimpianto lui fervido genio è! Amato studioso fu! Studiando disegni fece progressi veri così sarem discepoli di lui! Precoce studente o somaro vero! Guarda ai postulati impara ma ... poliedri platonici ricordati studiare dovrai.

e tante altre ancora; per esempio Mike Keith ha riscritto la poesia "The Raven" di Poe conservando una buona somiglianza anche della metrica per ricordare ben 740 cifre di pi greco.

Per concludere la nostra breve storia di π va fatto notare che l'avvento di Internet ha reso disponibile una smisurata quantità di informazioni su ciò che viene fatto attorno a π. La grande quantità di siti ad esso dedicati ne conferma la popolarità.

Ci vorrebbero ore per citare tutte le cose strane che si sono sviluppate sull'argomento; trascurando tutte le fantasiose considerazioni sui misteri del nostro numero, dalla sua derivazione dalla Grande Piramide di Cheope, al presunto significato di certe sue cifre, in un certa posizione del suo sviluppo decimale, alla moltitudine di formule coinvolgenti certi numeri magici che lo approssimano, ricordiamo soltanto

- l'esistenza del *Pi Day*, ovvero il giorno in cui si celebra la festa di π, naturalmente il 14 di Marzo (che tra l'altro, come viene spesso fatto notare, è anche la data di nascita di Albert Einstein)
- le due immagini seguenti, di Lisa Hakesley, giudicate degne di menzione all'Internet Raytracing Competition (concorso di immagini e animazioni): a sinistra *Pihenge*, a destra *cow Pi*, ovvero la "mucca π".

Appendice

Dalla relazione

$$\arctan a = \arctan b + \arctan c$$

ovvero $\arctan c = \arctan a - \arctan b$ si ha, applicando la tangente ad entrambi i membri

$$c = \tan(\arctan c) = \tan(\arctan a - \arctan b) = \frac{a-b}{1+ab}$$

Dovendo pertanto calcolare π si potrà utilizzare la relazione $\frac{\pi}{4} = \arctan 1$ ed ottenere, sfruttando le precedenti uguaglianze

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} \quad , \quad \frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{3}{5}$$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{2}{3} \quad , \quad \frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \arctan \frac{1}{6} + \arctan \frac{5}{7}$$

ecc.

Ovviamente si possono poi riutilizzare le relazioni per ottenere ad esempio

$$\arctan \frac{1}{2} = \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7} \qquad \text{e quindi} \qquad \frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = 2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7}$$

e così via.

Di particolare interesse è il caso che utilizza $\arctan \frac{1}{5}$: applicando ripetutamente le precedenti relazioni si ottiene

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{2}{3} = 2 \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{7}{17} = 3 \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{9}{46} =$$
$$= 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

che è la già citata formula di Machin.