



Università degli Studi di Genova  
Facoltà di Ingegneria - Polo di Savona  
via Cadorna 7 - 17100 Savona  
Tel. +39 019 264555 - Fax +39 019 264558



---

*Cogne, 8-10 Giugno 1999*

---

Introduzione al concetto di  
**frattale**  
e sue applicazioni nella  
modellizzazione della realtà

---

*P. Oliva*



## Introduzione.

L'osservazione di molti oggetti naturali, siano essi alberi, foglie, coralli o montagne, ci mostra che questi difficilmente possono essere descritti con gli strumenti della geometria tradizionale che si studia nelle scuole.

In altre parole, mentre le ben note figure geometriche quali i triangoli, i rettangoli, i poligoni in genere ed i cerchi, oppure i solidi classici quali piramidi, parallelepipedi, coni, sfere, ecc., sono adatte a descrivere le opere dell'uomo, siano essi palazzi o ponti od oggetti di altro tipo come imbuti ed altro, male si prestano a rappresentare le forme della natura: una piramide non riproduce fedelmente un monte, al più ne è una sua rappresentazione stilizzata.

Per contro gli oggetti naturali sembrano essere molto irregolari e complessi, e proprio per questo di difficile studio, se non con strumenti molto complicati.

Un più attento esame però rivela che questi oggetti sono spesso caratterizzati da evidenti proprietà di *auto-similarità* su differenti scale. Ad esempio se prendiamo un ramo di un albero, questo è una copia rimpicciolita dell'albero stesso, ed allo stesso tempo è una copia ingrandita di alcune sue parti; così pure se noi guardiamo il profilo di una montagna da lontano esso presenta molte irregolarità che si manifestano simili quando la guardiamo più da vicino: i grossi massi diventano sassolini, ma la struttura è simile.

Un altro esempio ben noto è la struttura dei nostri polmoni: i bronchi ed i bronchioli formano una specie di albero, che ingrandito al microscopio rivela ancora una forma del tutto simile, e così via.

Tutto ciò non accade con le ben note figure della geometria euclidea: se si prende un triangolo e lo si ingrandisce in prossimità di un suo lato si nota solo una linea retta che divide il piano in due nette parti (e non tanti altri triangolini più piccoli).

Tentativi di studiare casi particolari di forme di oggetti naturali sono stati fatti molti anni fa; citiamo fra gli altri a titolo di esempio uno studio di D'Arcy Thompson (*On growth and form*) del 1942, uno di Turing del 1952 sulla diffusione ed uno di Lindenmayer del 1968 sulle forme biologiche.

Va detto anche che figure particolari aventi proprietà di auto-similarità erano già note ai matematici da molto tempo (come vedremo in seguito), ma vennero considerate come casi patologici, atti solo a provare o a negare certe proprietà, senza utili applicazioni pratiche.

Bisogna arrivare al 1983, con il lavoro *The fractal geometry of nature* di Mandelbrot, per capire che tali insiemi possono essere applicati con ottimi risultati allo studio di molte forme naturali.

Sono quindi seguiti molti studi tra i quali ricordiamo sempre a titolo di esempio quelli sulle forme delle barriere coralline (Bradbury e Reichelt 1983), della vegetazione (Morse et al. 1985), dei vasi sanguigni (Turcotte 1985, Wlczek 1989, Family 1989).

## Le successioni definite per ricorrenza.

L'idea base che contraddistingue tutte le cose che vedremo nel seguito deriva dalla considerazione che cose molto complicate si possono ottenere o utilizzando metodi molto complessi (quali funzioni matematiche molto complicate) o, come vedremo, più semplicemente utilizzando cose molto semplici, ripetute un numero molto elevato di volte.

Ciò non deve sorprendere: si pensi a come da bambini si impara a disegnare un alberello, partendo da una linea con due ramificazioni (una Y) e ripetendo su ogni ramo la stessa operazione elementare per un certo numero di volte.

Per fornire un primo esempio concreto, incominciamo ad operare con ciò che già conosciamo relativamente bene (ovvero i numeri); più avanti proveremo a lavorare su oggetti diversi: sulle linee, sugli insiemi del piano, ecc.

Come primo passo introduciamo le successioni numeriche.

Una successione numerica, come dice lo stesso nome, è una sequenza ordinata di numeri: il primo numero verrà indicato con  $a_1$ , il secondo con  $a_2$ , l'ennesimo con  $a_n$ , e così via.

Per esempio  $a_n = \frac{1}{n}$  è una successione i cui termini sono

$$1 \quad , \quad \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{3} \quad \dots \quad \frac{1}{n} \quad \dots$$

È molto facile calcolare quanto vale ad esempio  $a_{1000}$  perché utilizzando la stessa definizione della successione si ha

$$a_{1000} = \frac{1}{1000} \quad .$$

Vi sono però altri modi per definire una successione: supponiamo di affidare ad una banca un certo capitale  $x$  e indichiamo con  $a_n$  il capitale presente dopo  $n$  anni.

È evidente che all'inizio, diciamo all'anno zero, il capitale sarà dato da  $a_0 = x$  (utilizziamo qui gli indici a partire da zero per comodità); se la banca ci corrisponde un interesse  $q$ , dopo un anno avremo un capitale che è dato da quello iniziale  $a_0$  più l'interesse  $qa_0$  (ovvero una percentuale del capitale presente); in formula

$$a_1 = a_0 + qa_0 = a_0(1 + q)$$

Analogamente al secondo anno si avrà

$$a_2 = a_1 + qa_1 = a_1(1 + q)$$

e più in generale, il capitale presente all'anno  $n + 1$  sarà calcolabile a partire da quello dell'anno  $n$  mediante la formula  $a_{n+1} = a_n(1 + q)$ .

Pertanto le due relazioni

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n(1 + q) \\ a_0 = x \end{cases}$$

cioè il capitale di partenza e la formula per passare dal capitale di un anno a quello dell'anno successivo, permettono di determinare il capitale presente in un qualunque momento.

Si noti però che vi è una grossa differenza tra questo secondo esempio e quello visto prima: nel primo caso era sufficiente conoscere  $n$  per calcolare immediatamente  $a_n$ ; in questo caso per calcolare ad esempio  $a_{1000}$  bisogna conoscere  $a_{999}$ , ma per avere  $a_{999}$  bisogna conoscere  $a_{998}$  e così via.

Queste particolari successioni sono dette successioni definite per ricorrenza; si passa cioè da una termine al successivo utilizzando sempre la stessa formula ricorrente ( $a_{n+1} = f(a_n)$ ), cioè funzione di  $a_n$ .

Va detto che in casi come quello sopra visto è molto facile vedere che

$$a_1 = a_0(1 + q) = x(1 + q) \quad , \quad a_2 = a_1(1 + q) = x(1 + q)^2 \quad , \quad a_3 = a_2(1 + q) = x(1 + q)^3 \quad \dots$$

da cui

$$a_n = x(1 + q)^n$$

ed abbiamo in tal modo ottenuto una espressione esplicita (cioè immediatamente calcolabile) per la successione data.

Tutto questo non è però sempre così facilmente ottenibile; consideriamo la seguente successione

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{5} + a_n - \frac{1}{2}a_n^2 \\ a_0 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Si potrebbe operare cercando una formulazione esplicita per  $a_n$  da

$$a_1 = \frac{1}{5} + a_0 - \frac{1}{2}a_0^2 \quad , \quad a_2 = \frac{1}{5} + a_1 - \frac{1}{2}a_1^2 = \frac{19}{50} + \frac{4}{5}a_0 - \frac{9}{10}a_0^2 + \frac{1}{2}a_0^3 - \frac{1}{8}a_0^4 \quad , \quad \dots$$

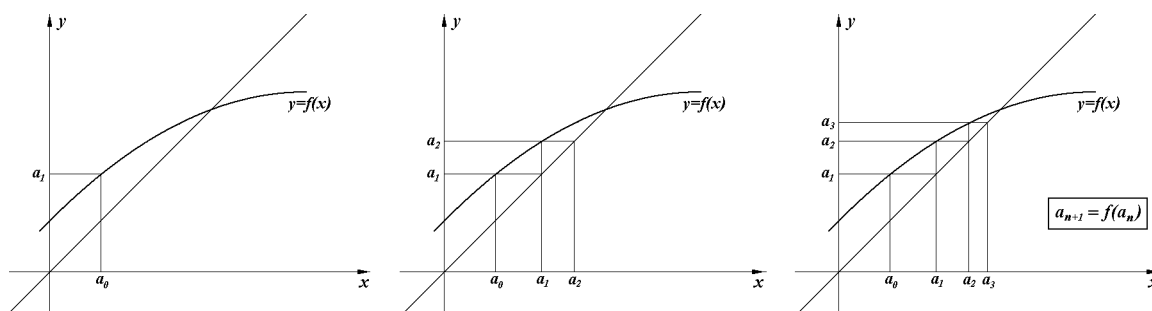
ma come si vede risulta tutto piuttosto complicato.

Utilizzando una calcolatrice possiamo calcolare alcuni termini ottenendo

$a_0 = .2$	$a_4 = .6113246$	$a_8 = .6320523$	$a_{12} = .6324482$	$a_{16} = .6324554$	$a_{20} = .6324555$
$a_1 = .38$	$a_5 = .6244657$	$a_9 = .6323072$	$a_{13} = .6324528$	$a_{17} = .6324555$	$a_{21} = .6324555$
$a_2 = .5078$	$a_6 = .629487$	$a_{10} = .632401$	$a_{14} = .6324546$	$a_{18} = .6324555$	$a_{22} = .6324555$
$a_3 = .5788696$	$a_7 = .6313601$	$a_{11} = .6324355$	$a_{15} = .6324552$	$a_{19} = .6324555$	$a_{23} = .6324555$

Come si vede la successione *tende* (nel senso che i numeri si avvicinano) verso un valore ben preciso.

Per capire meglio quel che accade utilizziamo un piano cartesiano in cui rappresentiamo il grafico della funzione  $f(x) = \frac{1}{5} + x - \frac{1}{2}x^2$ .



Segnamo sulle ascisse il valore  $a_0 = \frac{1}{5}$  e rileviamo sulle ordinate il valore  $a_1 = f(a_0)$  (tracciando una linea verticale da  $a_0$  fino ad incontrare la funzione, e quindi una linea orizzontale fino all'asse delle ordinate).

Per calcolare  $a_2 = f(a_1)$  è ora necessario riportare  $a_1$  sull'asse delle ascisse e questo può essere fatto tracciando da  $a_1$  una linea orizzontale fino alla bisettrice del primo e terzo quadrante, e quindi tracciando una linea verticale fino alle ascisse.

Dopo di ciò si ripete il procedimento per trovare  $a_2$ ; si riporta  $a_2$  sulle ascisse, si determina  $a_3 = f(a_2)$  e così via.

Come si nota, il procedimento può essere riassunto nel seguente modo:

- 1) si parte da  $a_0$  sull'asse delle ascisse
- 2) si traccia una retta verticale fino ad incontrare il grafico di  $f$
- 3) si traccia una retta orizzontale fino ad incontrare la bisettrice
- ) si ripete a partire dal punto 2).

La spezzata poligonale si avvicina all'intersezione di  $f$  con la bisettrice, ovvero al punto  $x$  tale che  $f(x) = x$ ; risolvendo  $\frac{1}{5} + x - \frac{1}{2}x^2 = x$  si ottiene

$$x^2 = \frac{2}{5} \quad \text{e una soluzione è} \quad x = \sqrt{\frac{2}{5}} \approx 0.6324555$$

come visto anche dai calcoli precedenti.

Notiamo fra l'altro che nulla sarebbe cambiato, per quel che riguarda il risultato finale, se fossimo partiti da un altro punto vicino ad  $\frac{1}{5}$ .

Con una piccola generalizzazione ed una buona dose di avventatezza, possiamo pensare di avere trovato un metodo che ci permette di risolvere l'equazione  $f(x) = x$  e poiché ovviamente ogni equazione si può scrivere in quella forma (basta portare tutto al primo membro e poi aggiungere  $x$  ad entrambe i membri), di risolvere qualunque equazione.

Proviamo subito con un'altra situazione che, diversamente dalla precedente equazione di secondo grado, non sapremmo risolvere in alcuna maniera.

Consideriamo  $f(x) = \cos(x)$  e l'equazione

$$\cos(x) = x$$

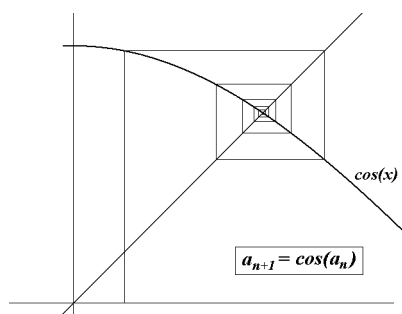
e proviamo a definire una successione nel seguente modo

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) = \cos(a_n) \\ a_0 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Utilizzando sempre una calcolatrice otteniamo (premendo ripetutamente il tasto "cos")

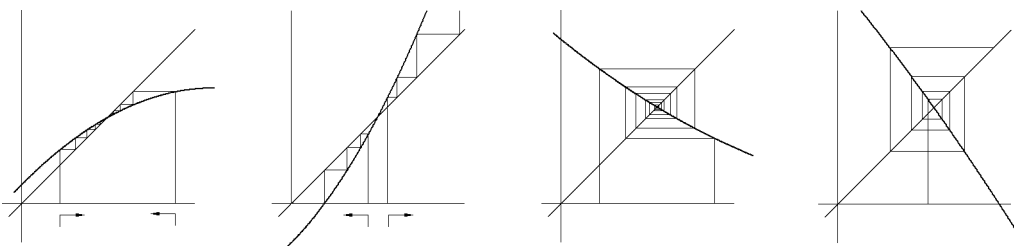
$a_0 = .2$	$a_4 = .6608375$	$a_8 = .7233741$	$a_{12} = .7358642$	$a_{16} = .7384225$	$a_{20} = .7389487$
$a_1 = .9800666$	$a_5 = .7894784$	$a_9 = .7495766$	$a_{13} = .741251$	$a_{17} = .7395313$	$a_{21} = .739177$
$a_2 = .5569673$	$a_6 = .7042157$	$a_{10} = .7319774$	$a_{14} = .7376245$	$a_{18} = .7387845$	$a_{22} = .7390232$
$a_3 = .8488622$	$a_7 = .7621196$	$a_{11} = .7438543$	$a_{15} = .7400683$	$a_{19} = .7392876$	$a_{23} = .7391269$

e dal grafico si vede ancora bene come la successione tenda verso quel punto cercato.



Purtroppo però dobbiamo raffreddare il nostro eccessivo entusiasmo: qualche ulteriore considerazione ci mostra che non sempre il metodo trovato funziona.

Osserviamo i seguenti grafici:



Come si vede, il primo ed il terzo grafico conducono a determinare quanto si cerca (l'intersezione tra il grafico della funzione e la bisettrice) da qualunque punto si parta, mentre negli altri casi la successione tende sempre ad allontanarsi dal punto cercato.

Un esame un poco più attento ci fa osservare che l'intersezione risulta un punto *attrattivo* quando la pendenza della curva non è troppo elevata (ad esempio nel primo grafico, quando il grafico della funzione interseca la bisettrice da sopra a sotto), mentre diventa un punto *repulsivo* quando la pendenza è elevata (maggiore di  $45^\circ$  in salita o in discesa).

Preciseremo rigorosamente questo in seguito.

Vediamo ora un altro esempio: supponiamo di voler studiare la crescita di una popolazione di persone, di batteri o altro.

Indichiamo al solito con  $a_0$  il numero di individui presenti al tempo zero e supponiamo dato un tasso di crescita  $q$  annuale (o giornaliero o altro); allora, come per l'esempio del capitale in banca visto prima, dopo un anno vi saranno  $a_1 = a_0 + qa_0$  individui e ripetendo il procedimento giungiamo ancora alla successione definita dalla legge di ricorrenza

$$a_{n+1} = a_n(1 + q) \quad , \quad \text{con } a_0 \text{ dato} \quad .$$

Come già visto si può facilmente ottenere una forma esplicita per determinare il numero di individui presenti all'anno  $n$  data da

$$a_n = a_0(1 + q)^n$$

Si osservi che la formula può fornire valori di  $a_n$  non interi (il che non è molto bello trattandosi di individui), ma ciò può essere accettato, supponendo di lavorare con grandi numeri.

Per semplicità indichiamo con  $\lambda$  il valore  $(1 + q)$ , per cui la formula diventa

$$a_n = a_0\lambda^n$$

e quindi, se  $\lambda = 1$ , la popolazione rimarrà costante; se  $\lambda > 1$  la popolazione crescerà; se  $0 < \lambda < 1$  la popolazione decrescerà fino ad esaurirsi.

Si noti pure che, quando la popolazione cresce, cresce in maniera esponenziale; il che vuol dire in maniera molto veloce. Per renderci conto di cosa significhi una crescita esponenziale, consideriamo il seguente semplice problema:

prendiamo un comune foglio di carta e pieghiamolo a metà (raddoppiandone lo spessore), poi pieghiamolo ancora a metà (quadruplicandone lo spessore), e continuiamo così per 20 volte; la domanda è: *quanto diventa spesso il blocchetto di carta?*

Una risposta intuitiva di solito porta a dire un valore dell'ordine del centimetro; facciamo quattro calcoli: un foglio di carta ha uno spessore di circa 0.1 mm e dopo 20 piegature a metà il suo spessore viene moltiplicato per  $2^{20}$ ; ora le potenze di 2 sono 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, .. e si ha  $2^{20} = (2^{10})^2 = 1024^2 = 1048576$  per cui lo spessore totale sarà

$$1048576 \frac{1}{10} \text{mm} = 104857.6 \text{mm}$$

ovvero circa 105 metri (provare per credere).

In realtà non riusciremo mai a farlo, non solo perché all'ultima piegatura dovremmo piegare un blocchetto di 50 metri di spessore sull'altra parte, ma perché partendo ad esempio da un foglio quadrato di 20 cm di lato, dopo 10 pieghe a metà il foglio ha una dimensione di poco più di 6 mm per lato e diventa poco maneggevole.

Questo esempio mostra come la crescita esponenziale sia più veloce di quanto si possa a prima vista immaginare, e quindi di quanto velocemente crescerebbero le popolazioni se obbedissero al modello matematico sopra formulato.

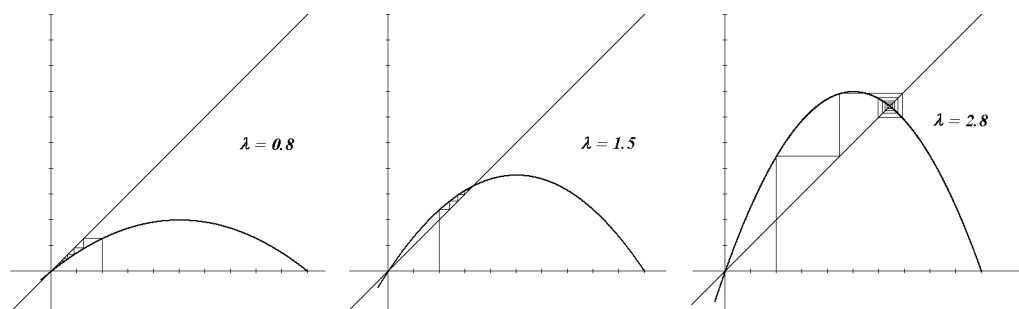
Per fortuna non è proprio così, ovvero il succitato modello non descrive bene le crescite in questione, se non per tempi molto brevi.

Una semplice modifica al modello, che però sembra rispecchiare bene le reali crescite di popolazioni, si ottiene modificando il coefficiente di crescita (che si era indicato con  $\lambda$ ) sostituendolo con qualcosa che decresca all'aumentare della popolazione; si ritiene cioè che il sovrappopolamento faccia diminuire le nascite (o aumentare le morti), magari per scarsità di cibo o per l'insorgere di epidemie o altro.

La modifica più semplice si ha sostituendo appunto  $\lambda$  con  $\lambda(1 - a_n)$  (quel valore 1 non significa che appena  $a_n = 1$ , ovvero c'è un individuo, la crescita si annulla, anzi muoiono tutti; si pensi a 1 come ad una unità di misura della popolazione, ad esempio 1 milione di individui); la legge di crescita diventa perciò

$$a_{n+1} = \lambda(1 - a_n)a_n \quad .$$

Se proviamo a disegnare il grafico della funzione  $f(x) = \lambda(1-x)x$  otteniamo una parabola che interseca le ascisse in 0 ed in 1 ed ha il vertice in  $x = 1/2$  e  $y = \lambda/4$ ; proviamo a fare qualche prova con differenti valori di  $\lambda$ .



Il primo grafico a sinistra mostra il caso  $\lambda = 0.8$ ; come si nota la parabola interseca la bisettrice (per le  $x$  comprese tra 0 e 1) nel solo punto 0, e tale punto risulta attrattivo. Pertanto in questo caso la popolazione tenderà a diminuire fino all'estinzione.

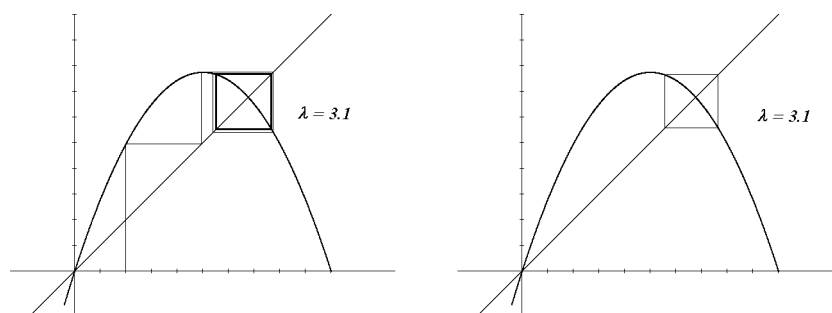
Nel secondo grafico, con  $\lambda > 1$ , la parabola interseca la bisettrice in due punti; uno, l'origine, è diventato un punto repulsivo, l'altro è attrattivo, e verso quel valore tende a stabilizzarsi la popolazione.

Aumentando ancora  $\lambda$ , come si nota nel terzo grafico, l'intersezione con la bisettrice si ha in un punto in cui la parabola è già diventata discendente ed è ancora un punto attrattivo perché la pendenza nel punto di intersezione è ancora piccola.

Quello che è difficilmente prevedibile è quello che succederà quando la pendenza della parabola nel punto di intersezione supererà i  $45^\circ$ , facendo diventare repulsivo il punto stesso, e questo succede per  $3 < \lambda < 4$ .

Per tali valori, essendo il massimo della parabola minore di 1, la successione resta all'interno dell'intervallo  $[0, 1]$ , ma non tende a nessun valore.

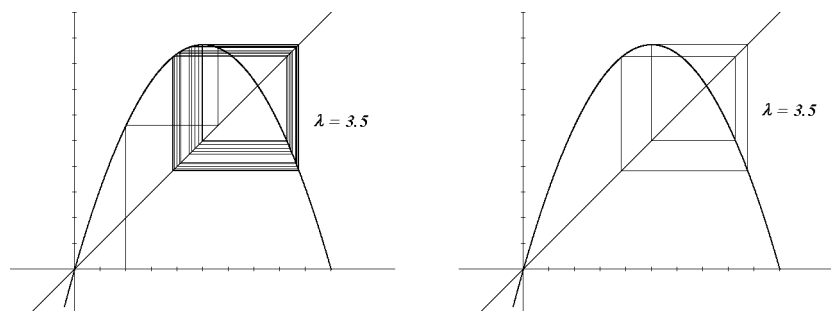
È chiaro che calcolare a mano molti valori della successione è impossibile e solo con l'avvento dei calcolatori è stato possibile esaminare questo caso in dettaglio; i risultati sono molto interessanti.



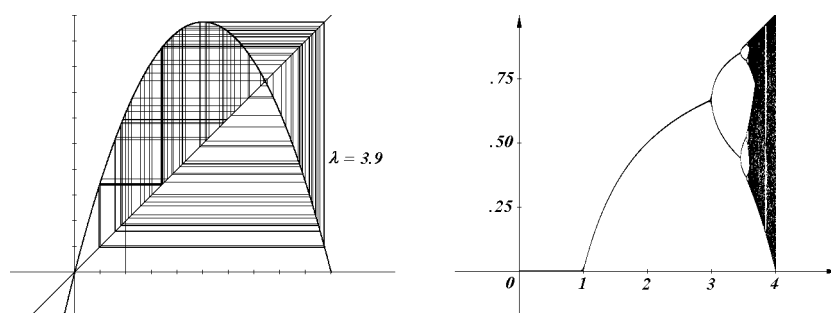
Nel primo grafico a sinistra si vede il caso  $\lambda = 3.1$ ; la successione, dopo un primo periodo di avvicinamento al punto, incomincia a danzare tra due valori, uno a destra ed uno a sinistra; nel secondo grafico sono riportati i valori della successione dopo le iniziali iterazioni, per evidenziare questo fatto.

Analogamente, nei seguenti due grafici, con  $\lambda = 3.5$ , si vede che la successione saltella tra quattro differenti valori.





Il grafico seguente a sinistra mostra cosa succede per  $\lambda = 3.9$ ; quello che appare è un comportamento che sembra totalmente casuale e ciò è molto sorprendente, se si pensa alla legge che abbiamo utilizzato per generare la successione, che è veramente semplice.



Tutti i risultati precedenti sono riassunti nel grafico a destra dove in ascisse è riportato il valore di  $\lambda$  da 0 a 4, e sulle ordinate i valori assunti dalla successione, trascurando i primi 500 termini.

Come si nota, per  $\lambda$  tra 0 e 1, la successione si attesta sul valore 0 ; per  $\lambda$  tra 1 e 3, la successione va al valore intersezione tra parabola e bisettrice (soluzione dell'equazione  $\lambda(1-x)x = x$  ovvero  $x = 1 - \frac{1}{\lambda}$ ).

Nel tratto che va da 3 a 4 si nota come prima la linea si biforca, cioè la successione oscilla tra due valori, quindi tra quattro valori, poi tra otto e così via fino ad un comportamento come già detto abbastanza casuale.

Rinotiamo come tale comportamento apparentemente casuale derivi da una legge deterministica, tra l'altro molto semplice; notiamo pure come piccole modifiche del parametro  $\lambda$ , anche in funzioni per nulla complicate, causino grosse differenze di comportamento nella successione.

## Successioni nel piano complesso.

Passiamo ora a considerare un'altra successione definita da

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n^2 + \lambda \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

e per complicarci un poco la vita consideriamo tale successione nei numeri complessi.

Come è noto un numero complesso  $z = x + iy$  è costituito di una parte reale  $x$  e di una parte immaginaria con coefficiente  $y$ , dove  $i$  rappresenta quel numero tale che  $i^2 = -1$  (che non esiste nei numeri reali, dove il quadrato di un numero è sempre maggiore o uguale a zero).

Pertanto, sempre se  $z = x + iy$ , si ha (sviluppando il quadrato e ricordando che  $i^2 = -1$ )

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$$

ovvero il quadrato di  $z$  è un nuovo numero complesso di parte reale  $x^2 - y^2$  e parte immaginaria di coefficiente  $2xy$ .

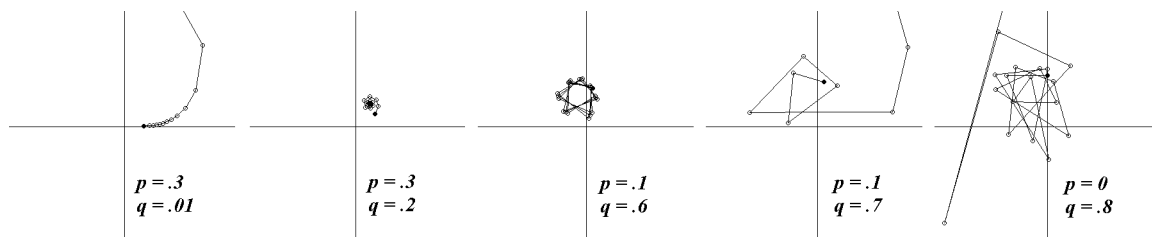
Poiché un numero complesso può essere rappresentato in un piano cartesiano come il punto di coordinate  $(x, y)$ , la successione di numeri complessi sarà rappresentabile da una sequenza di punti del piano le cui coordinate sono definite dalla seguente legge:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + p \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + q \\ x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

avendo indicato con  $p$  e  $q$  rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di  $\lambda$ .

Quello che si vuole qui studiare è ancora il comportamento della successione al variare di  $\lambda = p + iq$ , ovvero di  $p$  e  $q$ .

Nelle seguenti cinque figure è rappresentato il comportamento della successione, a partire da  $z_1$ , per i valori di  $p$  e  $q$  indicati. Si osservi che, essendo  $z_0 = 0 = x_0 = y_0$ , si ha  $z_1 = \lambda = x_1 + iy_1 = p + iq$ , cioè il termine  $z_1$  è proprio nel punto  $(p, q)$ .



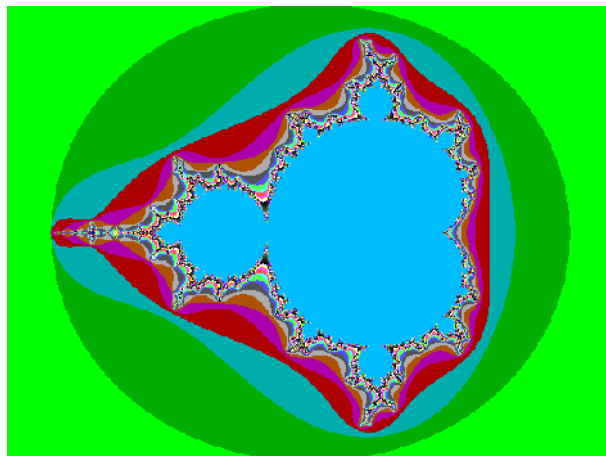
Si noti come a seconda dei valori di  $p$  e  $q$  anche non molto differenti, si ottengano successioni che rimangono limitate, oppure successioni che si allontanano dall'origine.

Per poter meglio evidenziare questo fatto, proviamo a fare un disegno in cui ogni punto  $(p, q)$  è colorato in maniera differente a seconda del comportamento della successione per quei dati  $p$  e  $q$ ; più precisamente coloriamo di azzurro quei punti  $(p, q)$  che generano successioni che rimangono limitate, e coloriamo di differenti colori quei punti che generano successioni che tendono ad allontanarsi dall'origine, a seconda della velocità con cui queste si allontanano.

In pratica si è realizzato un programma che, a partire dai valori di  $p$  e  $q$ , calcola un certo numero sufficientemente alto di termini della successione; se tutti questi termini si mantengono dentro un certo cerchio di centro l'origine e raggio grande prefissato (la cui circonferenza rappresenta l'infinito) si presuppone che la successione si mantenga limitata ed il punto, come già detto si colora di azzurro;

se invece un termine  $z_n$  esce dal cerchio (cioè va all'infinito) il punto si colora di un colore differente a seconda del valore di  $n$  (più  $n$  è grande, più tardi esce dal cerchio, più è lenta la successione nel suo tendere all'infinito).

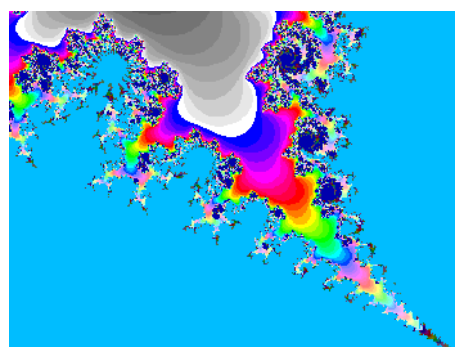
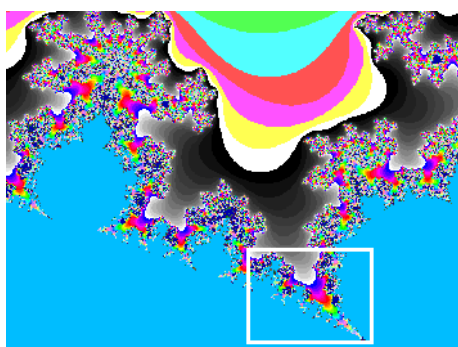
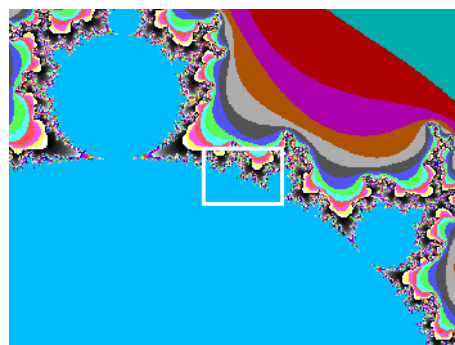
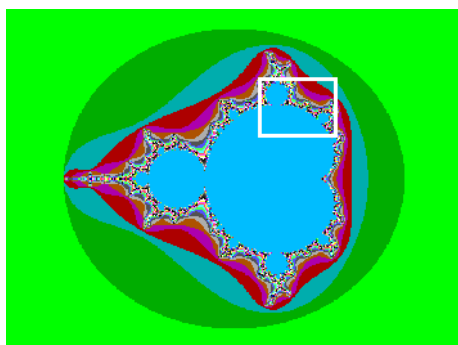
La figura che si ottiene è la seguente (con in ascissa i valori di  $p$  da -2.5 ad 1.5, ed in ordinata i valori di  $q$  da -1.5 ad 1.5):



e la parte centrale azzurra è nota con il nome di *insieme di Mandelbrot*.

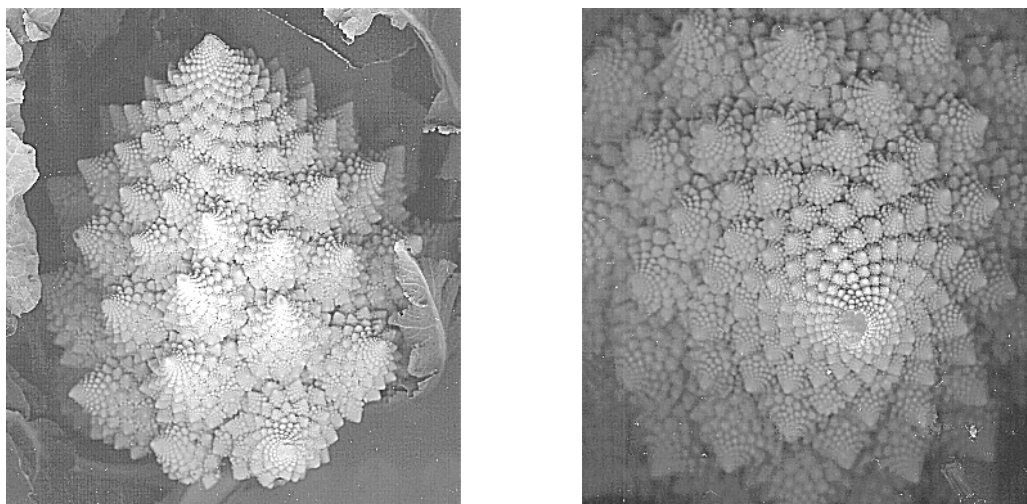
Tale figura presenta interessanti caratteristiche: intanto sul bordo della parte azzurra centrale sono presenti punti molto vicini di colore differente; ancora una volta questo significa che cambiando di poco i valori del parametro  $\lambda$ , ovvero i valori di  $p$  e  $q$ , si ottengono comportamenti molto differenti della successione, cioè velocità basse o alte di allontanamento dall'origine.

Ma quello che più è notevole è quello che si vede ingrandendo una parte dell'immagine.



Le precedenti figure mostrano successivi ingrandimenti della zona rettangolare segnata e quello che risulta immediatamente evidente è che questa figura presenta la proprietà, già notata negli oggetti naturali, che una sua parte ingrandita rivela caratteristiche simili all'originale e così via su differenti scale.

Per concludere, a titolo di esempio, si osservino le due seguenti immagini di un cavolfiore, per notare come siano presenti in maniera evidente le citate proprietà di auto-similarità.



Da lontano l'oggetto è assimilabile ad un cono, ma è in realtà costituito da molte parti di forma conica, che ingrandite presentano la solita struttura composta da molte parti a forma conica, ecc.

In aggiunta, tale oggetto presenta un'altra particolare caratteristica: come si nota quelle sue parti coniche sono distribuite lungo spirali che si avvolgono ruotando a destra e a sinistra, a seconda di come si guardano (e tali spirali sono presenti uguali anche in ciascuna parte).

Se contiamo quante spirali vi sono che ruotano in senso orario o antiorario troviamo che esse sono 13 e 21; questi non sono numeri a caso, ma sono termini della successione di Fibonacci, definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \\ a_0 = a_1 = 1 \end{cases}$$

ovvero una successione definita per ricorrenza, un po' diversa da quelle viste prima, in quanto ogni termine dipende dai due precedenti, più precisamente ne è la somma (partendo dai primi due termini uguali ad 1).

È facile calcolarne alcuni termini e vedere che essi sono

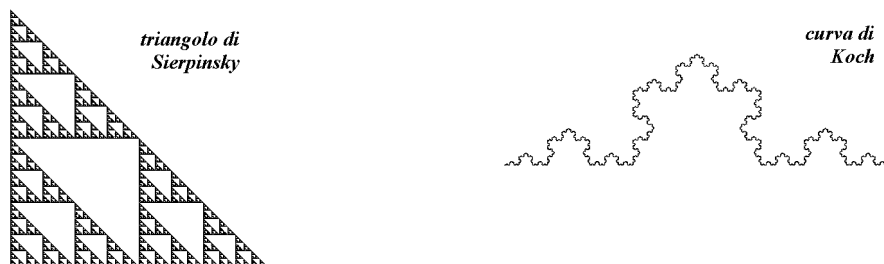
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

La studio di questa successione, densa di notevoli applicazioni, esula comunque da questa nostra trattazione.

## Primi frattali.

Come si è già detto, molte figure auto-simili erano già note da tempo ai matematici, ma non erano state prese in considerazione per lo scopo che a noi ora interessa.

Fra tutte citiamo a titolo di esempio il *triangolo di Sierpinsky* e la *curva di Koch*.

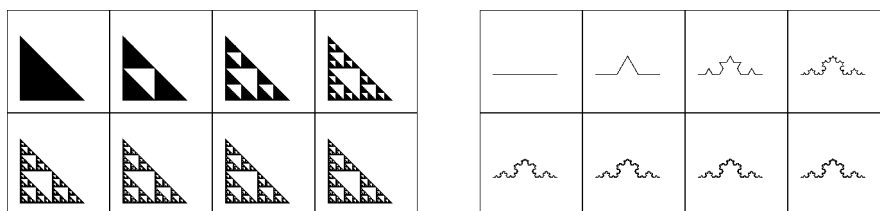


Il triangolo di Sierpinsky è una figura piana ottenuta prendendo un triangolo ed eliminando il triangolo centrale ottenuto congiungendo i punti medi dei lati; nei tre triangoli rimasti si ripete la stessa operazione, e così si procede all'infinito.

La figura così ottenuta è chiaramente auto-simile: essa è perfettamente simile alle tre parti principali che la compongono ed esse stesse sono a loro volta simili ad altre parti.

Stessa cosa si può dire della curva di Koch; essa è ottenuta a partire da un segmento, sostituendo alla sua terza parte centrale i due lati di un triangolo equilatero, e ripetendo il procedimento su ogni nuovo lato.

Nella figura sottostante sono riportati i vari passaggi per arrivare alla figure complete.



Un più attento esame delle figure porta però ad osservare alcune stranezze; prendiamo prima in esame il triangolo di Sierpinsky: esso è formato da tre parti uguali e distinte (corrispondenti ai tre triangoli ottenuti alla prima iterazione), ciascuna delle quali è una copia della figura totale, in scala 1:2.

Ora semplici considerazioni geometriche ci portano a dire che, se un oggetto ha una dimensione, ovvero è una linea, e viene scalato di un fattore  $\alpha$ , la sua misura (lunghezza) viene moltiplicata per un fattore  $\beta = \alpha$ . Se un oggetto ha due dimensioni, ovvero è una figura piana, e viene scalato di un fattore  $\alpha$ , la sua misura (area) viene moltiplicata per un fattore  $\beta = \alpha^2$ . Infine se un oggetto ha tre dimensioni, ovvero è un solido, e viene scalato di un fattore  $\alpha$ , la sua misura (volume) viene moltiplicata per un fattore  $\beta = \alpha^3$ .

Supponiamo ora, ad esempio, che l'area del triangolo di Sierpinsky sia uguale a  $4m^2$ ; essendo una figura piana l'area di ciascuna delle tre parti principali da cui è composta (copia della figura totale in scala 1:2, dovrebbe avere, per le considerazioni precedenti area  $1/4$  rispetto al totale, ovvero  $1m^2$ .

La domanda che viene immediata è: se ciascuna delle tre parti che costituiscono la figura ha area  $1m^2$ , in tutto la figura dovrebbe avere un'area di  $3m^2$ ; *dov'è finito il  $m^2$  mancante?*

Analogo problema sorge guardando la curva di Koch: supponiamo che la sua lunghezza sia uguale a  $3m$ ; essa è formata da 4 parti (corrispondenti ai quattro segmenti della prima iterazione) perfettamente simili alla figura totale, scalate di un fattore 1:3; pertanto in base alle solite considerazioni la lunghezza di ognuna delle 4 parti dovrebbe essere pari ad  $1/3$  della lunghezza totale, ovvero  $1m$ .

La domanda questa volta è: se ciascuna delle quattro parti distinte che formano la figura ha lunghezza  $1m$ , in tutto la curva dovrebbe avere lunghezza pari a  $4m$ ; *questa volta ci avanza  $1m$ !*

Tutto questo è un bel problema. Per cercare di capire cosa sta succedendo torniamo un momento alle considerazioni fatte sopra nei casi uno, due e tre dimensionali. Riassumendo quanto là visto, se  $d$  è la dimensione di un oggetto, sia essa 1 o 2 o 3, vale la relazione  $\beta = \alpha^d$  o anche, utilizzando i logaritmi  $\ln \beta = d \ln \alpha$ , da cui si ottiene la formula

$$d = \frac{\ln \beta}{\ln \alpha}$$

ove si ricordi che  $\beta$  indica la variazione di misura dell'oggetto scalato di un fattore  $\alpha$ .

Bene, applicando questa formula, si scopre che, per il triangolo di Sierpinsky, ove ad un fattore di scala  $\alpha = 2$  corrisponde una variazione della sua misura di  $\beta = 3$ , vale

$$d = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.58496$$

mentre per la curva di Koch, ove ad un fattore di scala  $\alpha = 3$  corrisponde una variazione della sua misura di  $\beta = 4$ , vale

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.26186$$

Ovvero, il triangolo di Sierpinsky non è proprio una figura bidimensionale, ma ha una dimensione un po' minore.

La curva di Koch non è una curva unidimensionale, ma ha una dimensione un po' superiore.

Non ha quindi senso domandarsi che area ha il triangolo di Sierpinsky, o che lunghezza ha la curva di Koch, non essendo esse figure della geometria tradizionale, come ad esempio non ha senso chiedersi quanto sia lunga la costa della Liguria: una misura effettuata ad esempio su di una mappa in scala 1:10000 fornirà un certo risultato ragionevole, ma si scoprirà poi che un tratto, considerato rettilineo su quella mappa, risulterà tutto frastagliato in una carta in scala 1:1000, alterando totalmente la misura fatta, e così via.

In parole povere, queste figure, così come la frontiera dell'insieme di Mandelbrot visto prima, o la costa della Liguria, sono esempi di *frattali*, e non sono figure trattabili con la tradizionale geometria ad una, due o tre dimensioni.

## Erbe ed alberi.

Dopo aver lavorato con leggi ricorrenti sui numeri reali e sui complessi, vediamo ora funzioni ricorrenti che operano su stringhe di caratteri.

Più precisamente ci occupiamo di un semplice linguaggio introdotto da Lindenmayer (noto come L-system) che fa uso di pochi simboli che possono essere riassunti nei seguenti, a fianco dei quali è riportata l'azione a loro collegata:

F            traccia un segmento nella direzione attuale  
 +            gira a destra (di un angolo prefissato)  
 -            gira a sinistra (dello stesso angolo)  
 [            memorizza l'attuale posizione e direzione  
 ]            torna al punto (e alla direzione) memorizzato

Definendo la figura di partenza, l'angolo di rotazione e la legge di ricorrenza, si possono ottenere figure estremamente interessanti.

Ad esempio il seguente codice

0 = F  
 a = 7  
 F = F[+F]F[-F]F

viene così interpretato:

- si parte da una stringa uguale ad F
- ad ogni curva si ruota di un angolo pari ad 1/7 di angolo piatto
- si utilizza una legge ricorrente che ad ogni iterazione sostituisce nella stringa ad ogni F la nuova stringa F[+F]F[-F]F.

Pertanto, dopo la prima iterazione, la stringa iniziale F diventa

F[+F]F[-F]F

e se proviamo ad eseguire quanto ci dice di fare questa stringa, ovvero

F            tracciamo un segmento (verticale)  
 [            memorizziamo questo punto e la direzione verticale  
 +F          giriamo a destra e tracciamo un segmento  
 ]            torniamo al punto memorizzato  
 F            tracciamo un segmento verticale  
 [            memorizziamo questo punto e la direzione verticale  
 -F          giriamo a sinistra e tracciamo un segmento  
 ]            torniamo al punto memorizzato  
 F            tracciamo un segmento verticale

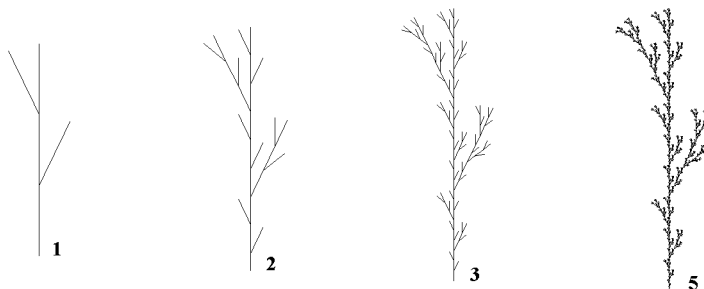
otteniamo la prima figura a sinistra qui sotto.

Se ora facciamo una seconda iterazione, risostituendo ad ogni F in F[+F]F[-F]F la stringa F[+F]F[-F]F, (cioè sostituendo ad ogni segmento una figura simile a quella ottenuta) otteniamo

F[+F]F[-F]F [ + F[+F]F[-F]F ] F[+F]F[-F]F [- F[+F]F[-F]F ] F[+F]F[-F]F

(gli spazi servono solo a rendere più evidenti le sostituzioni).

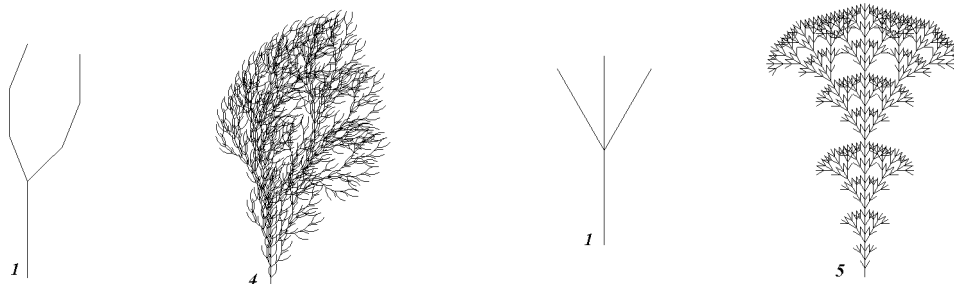
Eseguito i comandi contenuti in tale stringa si ottiene la seconda figura, ed iterando il procedimento la stringa diventa sempre più lunga e la figura da essa generata sempre più simile ad un oggetto reale, in questo caso una particolare erba.



Nella figura sono riportate, come indicato, la prima, seconda, terza e quinta iterazione.

La figura limite risulta essere poco significativa, essendo oltre la definizione dei punti sullo schermo.

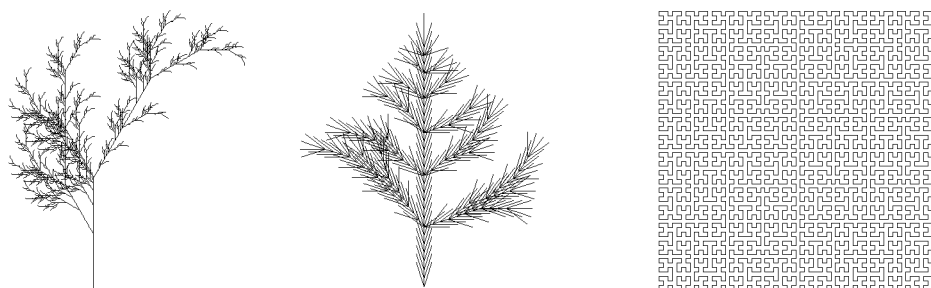
Modificando il codice iniziale si possono ottenere altre interessanti immagini, come si può vedere dalle seguenti figure (il numero vicino ad ogni immagine ne indica l'iterazione):



I codici necessari per queste figure sono rispettivamente:

$O = F$   
 $a = 8$   
 $F = FF + [+F-F-F] - [-F+F+F]$

$O = F$   
 $a = 6$   
 $F = F [+F] [-F] F$



Il codice della prima figura è

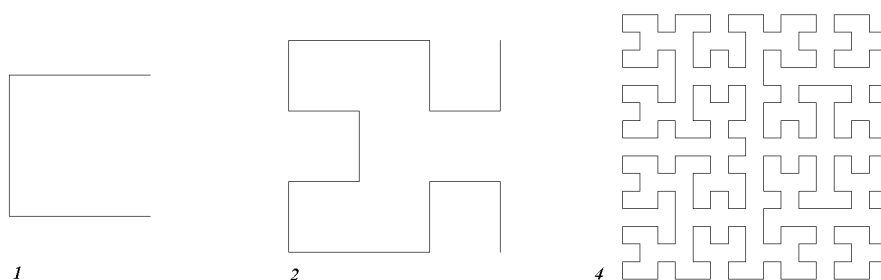
$O = X$   
 $a = 6$   
 $X = F - [[X] + X] + F [+FX] - X$   
 $F = FF$

Si noti la presenza di un nuovo simbolo  $X$ ; tale simbolo non corrisponde a nessuna operazione, il suo utilizzo è solo strumentale, esso verrà sostituito nella successiva iterazione da un'altra stringa come indicato nella sua definizione (come un qualcosa che non si vede, ma che contiene in sé le informazioni per generare qualcos'altro di ben visibile).

La seconda figura può ricordare un pino; la terza è una figura più particolare, meno reale, ma nota ai matematici come curva di Hilbert.

Tale curva, di cui vediamo le prime iterazioni nella seguente figura





realizzate con il codice

```

O = X
a = 2
X = -YF+XFX+FY-
Y = +XF-YFY-FX+
    
```

ha la proprietà di riempire tutto il quadrato (pur essendo una curva).

Si noti ancora come sarebbe poco significativa la figura finale limite di tutte queste iterazioni, ovvero il quadrato pieno.

Un'altra figura già vista, che è possibile riprodurre con queste tecniche è la curva di Koch.

Utilizzando il codice

```

O = F
a = 3
F = F-F++F-F
    
```

ovvero traccia un segmento, gira a sinistra di  $60^\circ$ , traccia un segmento, gira a destra di  $120^\circ$ , traccia un segmento, gira a sinistra di  $60^\circ$ , traccia un segmento e quindi ripeti, si ottengono le figure



Per ultimo vediamo come utilizzando due colori si possono ottenere immagini ancora più realistiche.

Le seguenti figure sono state ottenute disegnando con linee più spesse di colore marrone gli oggetti *più vecchi* (derivanti dalle prime iterazioni) e con linee più sottili di colore verde quelli *più giovani* (i tratti delle ultime iterazioni).

Il codice utilizzato è

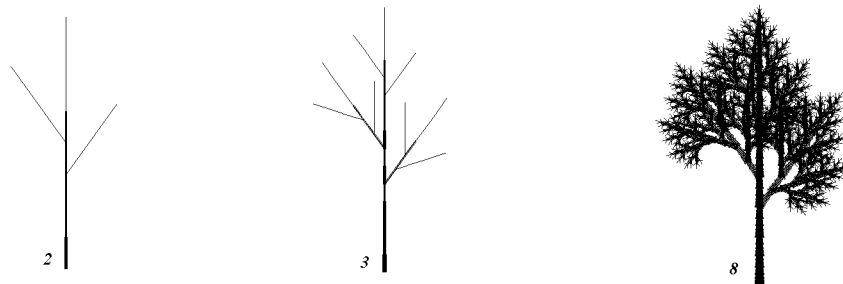
```

O = FX
a = 5
X = F[+X]F[-F]
F = FA
A = F
    
```

L'effetto ottenuto riproduce abbastanza bene un albero.

Notiamo per inciso come la sequenza  $F=FA, A=F$  faccia crescere più lentamente i tronchi rispetto ad una sequenza del tipo  $F=FF$ . Quest'ultima raddoppierebbe ogni volta le lunghezze, mentre la precedente

fornisce una crescita del tipo di quella della successione di Fibonacci, che risulta più gradevole alla vista e più realistica.



### Qualche approfondimento teorico.

Abbiamo precedentemente visto che, nel caso delle successioni reali definite per ricorrenza mediante la formula  $a_{n+1} = f(a_n)$ , il metodo grafico utilizzato per studiare il comportamento della successione stessa ci mostra come non sempre ci si avvicini al punto intersezione tra il grafico di  $f$  e la bisettrice del primo e terzo quadrante.

Per inciso, tale punto che risolve l'equazione

$$f(x) = x$$

è detto *punto fisso* di  $f$ ; cioè la funzione trasforma ogni punto  $x$  del suo dominio in un punto  $f(x)$  generalmente diverso da  $x$ , e, come dice il nome stesso, punto fisso è quel punto  $x$  che viene trasformato da  $f$  in  $f(x) = x$  (ovvero non si è mosso, è rimasto fisso).

Poiché, come abbiamo già notato, ogni equazione può essere scritta nella forma  $f(x) = x$ , diventa importante sapere quando il metodo visto (utilizzare cioè la successione  $a_{n+1} = f(a_n)$ ) porta a trovare la soluzione.

Abbiamo perciò di fronte, come sempre accade quando si cerca qualcosa, da affrontare due problemi:

- 1) Sapere se ciò che stiamo cercando esiste; questa è la domanda che dobbiamo sempre porci per prima, in quanto è assolutamente inutile cercare una cosa che non c'è. Sarebbe poi utile sapere quante sono le cose che cerchiamo (ovvero quante soluzioni ha l'equazione che ci interessa), per non fermarci prima di averle trovate tutte.
- 2) In caso di risposta affermativa alla prima domanda, determinare un modo per trovare tutto ciò che cerchiamo.

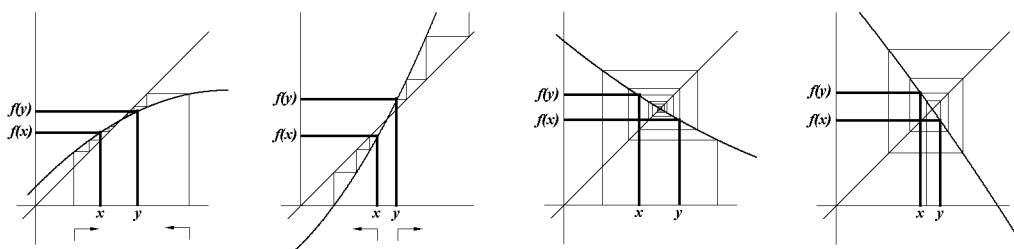
Si noti che una volta stabilito un algoritmo per trovare le soluzioni, il secondo punto diventa poco importante, in quanto i calcoli verranno eseguiti dalle macchine predisposte a ciò; quello che conta (ed è utile averlo ben chiaro) è sapere se stiamo facendo lavorare il calcolatore sapendo di trovare le soluzioni, o lo stiamo facendo lavorare invano.

Questo aspetto è quello che più differenzia lo studio universitario da quello delle scuole superiori, dove ci si preoccupa di fornire agli studenti gli strumenti di calcolo algebrico per risolvere *certi tipi standardizzati* di problemi (mi riferisco alle equazioni di primo e secondo grado, ai sistemi, alle disequazioni sempre di primo e secondo grado, o a queste riconducibili).

Ma la realtà ci presenta invece molte volte problemi non riconducibili a quelli standard, e non si potrà più dire: “non fa parte del programma e quindi non sono tenuto a saperlo fare”.

Per contro, tutti quei lunghi calcoli per risolvere equazioni, disequazioni o sistemi, verranno effettuati dalle macchine, lasciando a noi il solo compito di scegliere gli strumenti adatti da utilizzare (ovvero la parte più difficile del problema).

Ma torniamo al problema iniziale: osservando meglio i grafici sottostanti (si ricordi che avevamo già giustificato l'avvicinarsi o meno della successione al punto fisso, con la pendenza più o meno elevata del grafico nel punto intersezione) si nota che la successione tende al valore cercato nei casi (prima e terza figura) in cui, presi due punti  $x$  e  $y$  del dominio, i corrispondenti punti  $f(x)$  ed  $f(y)$  risultano più vicini di quanto lo erano  $x$  ed  $y$ .



Non funziona invece quando la distanza che c'è tra  $f(x)$  ed  $f(y)$  è più grande di quella che vi era tra  $x$  ed  $y$ .

Una funzione che ha la proprietà di avvicinare  $f(x)$  ed  $f(y)$ , rispetto ad  $x$  e  $y$  è chiamata dai matematici con il nome di *contrazione*.

Ovvero, come dice il nome stesso, tale funzione *contrae* le distanze, avvicinando i punti.

In formula,  $f$  si dice contrazione se, per ogni  $x$  ed  $y$  nel suo dominio, risulta

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

dove  $k$  è un numero tale che  $0 \leq k < 1$ .

Il che significa (lo notiamo per l'ultima volta) che la distanza che c'è tra  $f(x)$  ed  $f(y)$ , ovvero  $|f(x) - f(y)|$ , è minore o uguale alla distanza che c'è tra  $x$  e  $y$ , moltiplicata ancora per un numero minore di uno.

Bene, esiste un teorema in analisi, che ci permette di rispondere in una sola volta alle due questioni che ci eravamo posti prima, ([TEOREMA 7](#)).

**Teorema.** *Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una contrazione; allora esiste uno ed un solo punto fisso  $x$  per  $f$ .*

*Inoltre, scelto un qualunque punto  $b$ , è definita la successione*

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = b \end{cases}$$

*tale successione tende al punto fisso  $x$ .*

Utilizzeremo tra poco questo risultato.

## Successioni di insiemi piani.

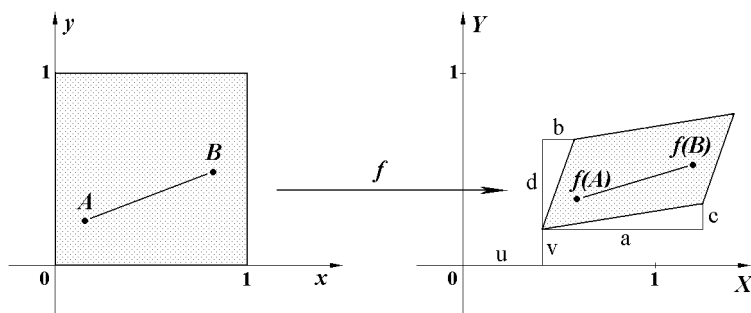
Possiamo ora fare ancora un passo avanti, ed occuparci di successioni di insiemi nel piano.

Per far ciò necessitiamo di alcune premesse:

consideriamo una semplice funzione dal piano cartesiano  $(x, y)$  al piano cartesiano  $(X, Y)$ , definita da

$$f : \begin{cases} X = ax + by + u \\ Y = cx + dy + v \end{cases}$$

Tale funzione è lineare, (ci limiteremo a tale caso per semplicità) cioè le variabili compaiono in modo lineare ( $x$  ed  $y$  sono moltiplicate per una costante e sommate con un'altra costante; non vi sono potenze o funzioni complicate).



Come si può notare facendo due calcoli (e osservando la figura) il punto  $x = 0$  ed  $y = 0$  viene trasformato nel punto  $X = u$  ed  $Y = v$ ; così il punto  $x = 1$  ed  $y = 0$  va nel punto  $X = a + u$  ed  $Y = c + v$ ; il punto  $(0, 1)$  va in  $(b + u, d + v)$ , il punto  $(1, 1)$  va in  $(a + b + u, c + d + v)$ ; i punti interni al quadrato a sinistra finiscono nei punti interni al parallelogramma a destra, ecc.

Possiamo quindi dire che la funzione che trasforma il punto  $(x, y)$  nel punto  $(X, Y)$  è una trasformazione di insiemi del piano in insiemi del piano (ad esempio il quadrato è stato trasformato nel parallelogramma)

Ora, se le distanze tra i trasformati  $f(A)$  ed  $f(B)$  di due punti qualunque  $A$  e  $B$  è minore della distanza che vi era tra gli stessi  $A$  e  $B$ , possiamo dire che la funzione in oggetto è una contrazione.

In altre parole, la figura trasformata risulta *più piccola* della figura originale.

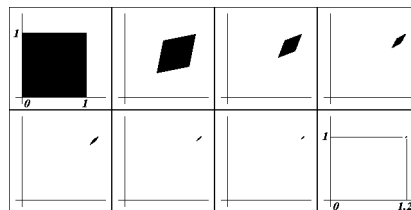
Rifacendoci al precedente teorema sulle contrazioni, che continua a valere anche se non siamo più nei numeri reali, ci possiamo quindi aspettare che, se noi prendiamo un insieme qualunque ed applichiamo su di esso tante volte la trasformazione precedente, gli insiemi ottenuti diventino sempre più piccoli e tendano a diventare un punto (il punto fisso per la trasformazione in questione).

Come esempio, si prenda la trasformazione

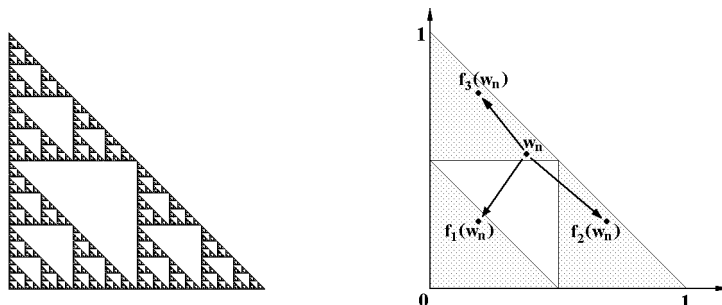
$$\begin{cases} X = \frac{x}{2} + \frac{y}{10} + \frac{1}{2} \\ Y = \frac{x}{10} + \frac{y}{2} + \frac{19}{50} \end{cases}$$

e si osservi come, partendo dal quadrato di vertici  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$ , ed applicando più volte la funzione, si finisca dopo alcune iterazioni nel punto  $(1.2, 1)$  che è il punto fisso per la trasformazione, ovvero quel punto  $(x, y)$  soluzione del sistema

$$\begin{cases} x = \frac{x}{2} + \frac{y}{10} + \frac{1}{2} \\ y = \frac{x}{10} + \frac{y}{2} + \frac{19}{50} \end{cases}$$



Diverso ed interessante è il caso in cui si usano insieme più di una contrazione; per illustrare ciò riprendiamo ora in esame il triangolo di Sierpinsky



Come abbiamo già più volte osservato l'insieme ha la seguente caratteristica: esso è costituito da tre parti uguali, perfettamente simili alla figura completa, ma di dimensioni dimezzate.

Cioè se si considerano le tre trasformazioni:

- 1) dimezza la figura
- 2) dimezza la figura e trasla a destra di  $\frac{1}{2}$
- 3) dimezza la figura e trasla in alto di  $\frac{1}{2}$

si ha che l'insieme risulta essere l'unione delle immagini di se stesso attraverso le tre precedenti contrazioni:

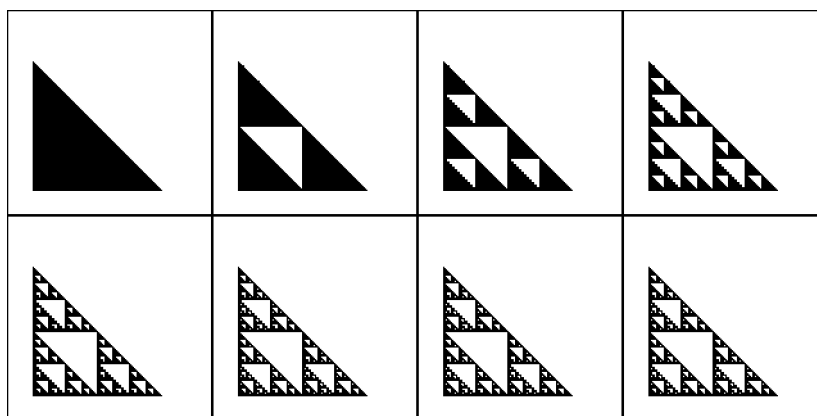
$$f_1 : \begin{cases} X = \frac{x}{2} \\ Y = \frac{y}{2} \end{cases} \quad f_2 : \begin{cases} X = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \\ Y = \frac{y}{2} \end{cases} \quad f_3 : \begin{cases} X = \frac{x}{2} \\ Y = \frac{y}{2} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quanto sopra visto si riassume nell'affermazione:

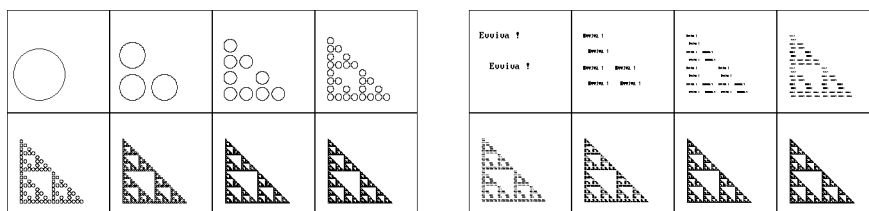
*il triangolo di Sierpinsky è il punto fisso dell'unione di  $f_1, f_2, f_3$ .*

Allora, se utilizziamo il risultato sulle contrazioni (in un senso più generale, [TEOREMA 8](#)), ci aspettiamo che, ripetendo su un triangolo più volte le precedenti funzioni, la figura tenda a diventare il triangolo di Sierpinsky.

La figura seguente mostra le varie iterazioni a partire dal triangolo originale.



Si noti però che, essendo contrazione, il risultato si può ottenere a partire da qualunque insieme, come mostrano le seguenti figure.

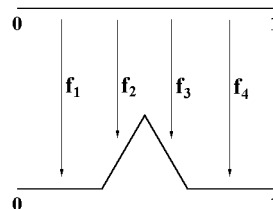
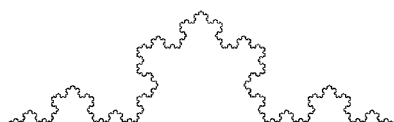


Per comodità rappresentiamo i coefficienti  $a, b, c, d, u, v$  delle funzioni in una tabella (dove  $i$  indica il numero della funzione).

Per il triangolo di Sierpinsky appena visto si ha quindi

$i$	$a$	$b$	$c$	$d$	$u$	$v$
1	.5	0	0	.5	0	0
2	.5	0	0	.5	.5	0
3	.5	0	0	.5	0	.5

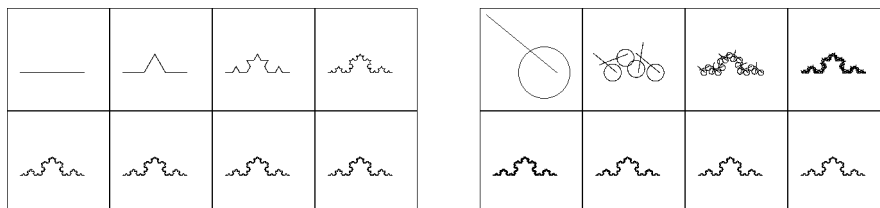
Come altro esempio consideriamo la ben nota curva di Koch e cerchiamo di interpretarla come punto fisso di qualche trasformazione.



Come si nota essa è ottenuta dalle quattro trasformazioni indicate nella figura a destra e definite dalla seguente tabella

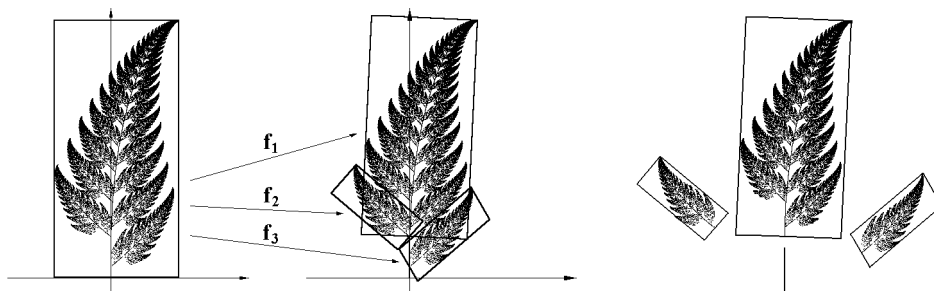
$i$	$a$	$b$	$c$	$d$	$u$	$v$
1	.333	0	0	.333	0	0
2	.333	0	0	.333	.667	0
3	.167	-.289	.289	.167	.333	0
4	.167	.289	-.289	.167	.5	.289

Sono riportate nella figura seguente alcune iterazioni, a partire da differenti insiemi.



Si osservi come, partendo dal segmento orizzontale di lunghezza 1, si notino tutti i passaggi costruttivi della curva.

È ora giunto il momento di cimentarsi con qualcosa di più reale del triangolo di Sierpinsky. Si prenda per esempio in esame la seguente foglia di felce.



essa può essere pensata come l'unione di tre contrazioni, come rappresentate in figura; la tabella relativa risulta:

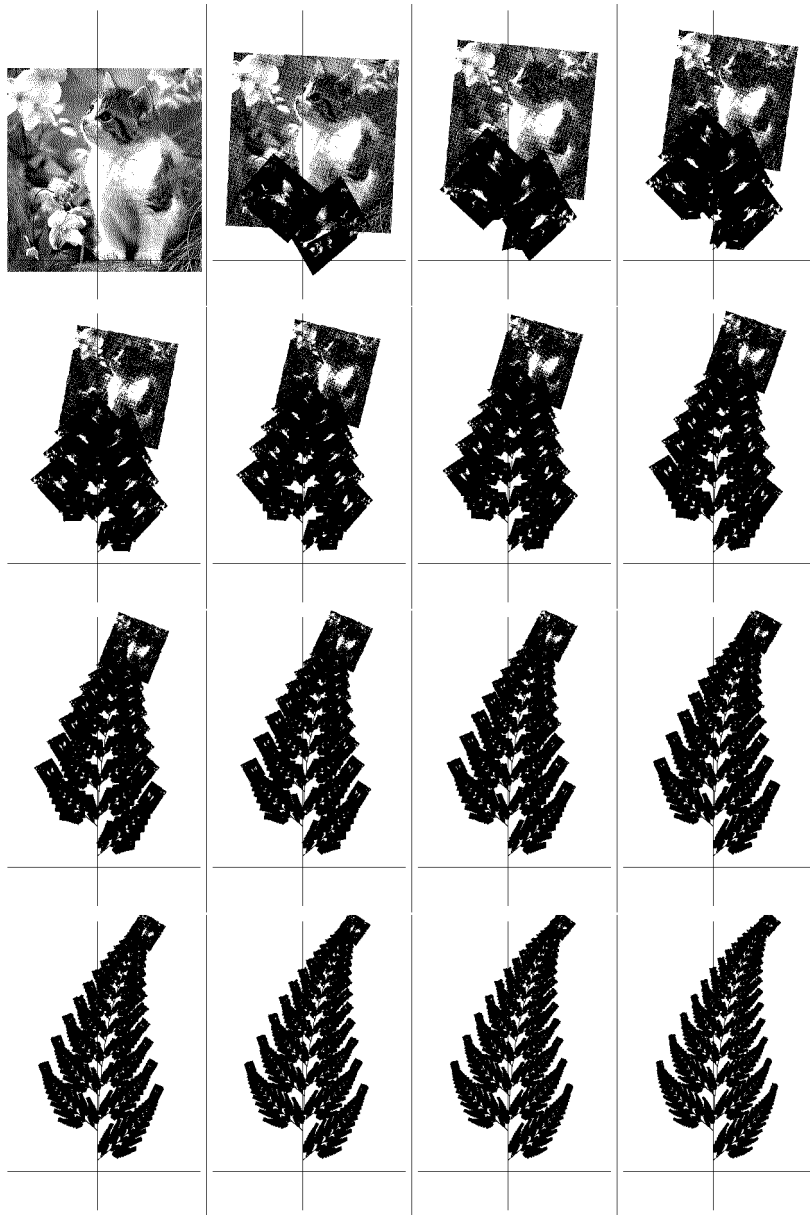
$i$	$a$	$b$	$c$	$d$	$u$	$v$
1	.85	.04	-.04	.85	0	1.6
2	.2	-.26	.23	.22	0	1.6
3	-.15	.28	.26	.24	0	.44
4	0	0	0	.16	0	0

(La quarta contrazione produce il tratto verticale ai piedi della felce).

Naturalmente (lo dice il teorema delle contrazioni) applicando ripetutamente le funzioni precedenti a partire da una *qualunque* figura, si ottiene la foglia di felce.

Vedere la sequenza delle iterazioni fa sempre un certo effetto, ma questo non deve stupire: quella foglia è *l'unica figura esistente* che sia punto fisso per quelle trasformazioni, e pertanto non può essere che quella la figura finale ottenuta.

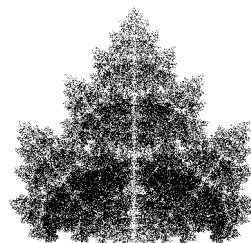
Nell'esempio che segue siamo partiti dall'immagine di un gatto, ma come si nota non c'è scampo: si finisce dove si *deve* finire.





Modificando quei pochi numeri delle tabelle si possono ottenere svariate figure; come esempi di immagini ottenibili sempre con quattro funzioni, si vedano

<i>i</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>u</i>	<i>v</i>
1	.6	0	0	.6	0	2.4
2	.6	0	0	.6	0	.9
3	.4	.3	-.3	.4	0	1.8
4	.4	-.3	.3	.4	0	1.8



<i>i</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>u</i>	<i>v</i>
1	.6	0	0	.6	0	.4
2	.4	-.2	.4	.5	0	.2
3	.4	.2	-.3	.4	0	.3
4	.3	.04	0	.3	0	.2



(per quest'ultima figura è necessario un particolare accorgimento per generare il tronco),  
oppure, con più funzioni:



Si notino sempre le proprietà di auto-similarità: ogni lettera è composta sempre dalla parola CIAO e così su ogni scala.

Vedremo in seguito come tutte queste figure possano essere ottenute con l'utilizzo di poche righe di programma.

## Un semplice programma.

Uno degli aspetti più interessanti delle cose fin qui viste sta nel fatto che sono sufficienti pochi numeri per generare figure alquanto complesse.

Riflettiamo un momento su questo fatto: un'immagine su di uno schermo a risoluzione abbastanza bassa, ad esempio di 640 per 480 punti, paragonabile alla risoluzione televisiva, contiene 307200 (= 640 × 480) punti.

Per definire quindi un'immagine in bianco e nero, utilizzando un byte per punto (scala di grigi da 0 a 255), sono necessari 307200 bytes; per un'immagine a colori, dovendo utilizzare 3 bytes per punto (uno rispettivamente per il rosso, il verde ed il blu) ne servono 921600; diciamo circa 1Mb (che diventano quasi 1.5Mb se la risoluzione è di 800 per 600 punti).

Se poi si considera che per un secondo di filmato occorrono 25 fotogrammi, ovvero 25Mb (senza contare .1Mb necessari per l'audio), si capisce che un filmato della durata di un'ora richiede qualcosa come 90000Mb ovvero 90Gb.

Una quantità di memoria spropositata (senza contare comunque la necessità di trasferire in tempo reale i soliti 25Mb al secondo).

È vero che si usano metodi di compressione dei dati, per poter far stare un film della durata di circa 2 ore in un Cd della capacità di 600Mb (perdendo qualcosa in definizione, ma ciò è scarsamente avvertito dall'occhio, trattandosi di immagini in movimento).

È però anche vero che noi siamo riusciti a riprodurre un'immagine abbastanza elaborata come ad esempio la foglia di felce, utilizzando soltanto 24 numeri.

Se fosse possibile utilizzare queste tecniche per codificare i fotogrammi che ci interessano, avremmo realizzato delle fortissime compressioni.

Allo stato attuale non mi risulta che vi siano programmi che riescano, data un'immagine, a determinare le necessari contrazioni per riprodurre l'immagine; o meglio, che vi riescano in breve tempo: nel 1/50 di secondo prima che arrivi l'altro fotogramma.

Qualche uso di tali tecniche si fa per la decompressione di immagini da porre su Cd, per esempio per le enciclopedie (Encarta) o simili, dove il lavoro di compressione viene fatto una sola volta per tutte, prima di registrare il Cd. La decompressione viene poi fatta dall'utilizzatore e questo porta via pochissimo tempo, come vedremo tra breve.

Torniamo alle nostre figure: quelle che abbiamo precedentemente visto sono state generate da un programma che ha ripetutamente applicato le varie funzioni sulle singole iterazioni. In altre parole il programma esamina ogni punto dell'immagine (in bianco e nero) e quando trova un punto appartenente all'oggetto (un punto nero) calcola i punti trasformati segnandoli sulla successiva iterazione. Alla fine ripete tutto il processo dall'inizio per la successiva iterazione.

Come è facile immaginare tutto ciò causa un notevole dispendio di tempo.

Una grosso aumento di velocità del processo si ottiene sfruttando quanto ci dice la teoria: ricordiamo che, per la natura stessa delle funzioni (contrazioni), l'oggetto di partenza può essere *qualunque*, anche *un solo punto*.

Questo suggerisce un semplice modo per rappresentare i punti fissi di una IFS (questo è il nome tecnico di un'unione di contrazioni, "iterated function system"); definiamo una successione per ricorrenza nel seguente modo

$$a_0 \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad a_{n+1} = f_i(a_n) \quad \text{con } i \text{ scelto a caso in } 1 \dots n$$

(è possibile eventualmente attribuire delle probabilità di scelta in  $1 \dots n$ ).

È chiaro che, se indichiamo con  $A_n$  la figura ottenuta all'ennesima iterazione, per ogni  $n$  si ha che  $a_n$  è un punto di  $A_n$ , per cui, se  $n$  è abbastanza grande, il punto  $a_n$  è vicino al punto fisso.

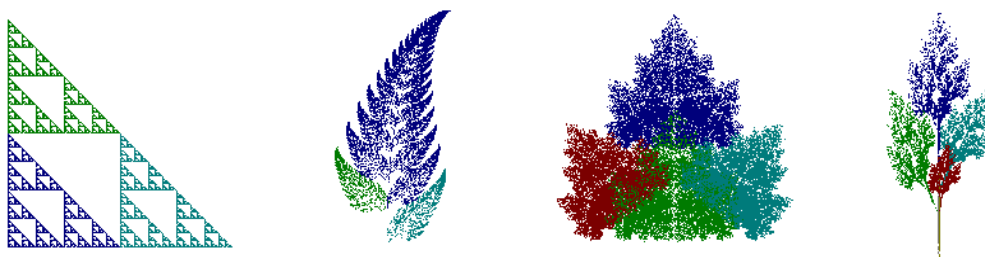
Disegnando pertanto nel piano i punti  $a_n$  (tranne le prime iterazioni, per dare tempo alla successione di avvicinarsi al punto fisso) si ottiene in poco tempo l'immagine cercata.

Un semplice programma che riproduce l'insieme di Sierpinky è il seguente, scritto in QBasic; si suppone uno schermo con una risoluzione di 640 × 480 punti, si parte dal punto (1, 1) e la scelta di  $i$  è fatta a caso, con uguale probabilità, nell'insieme {1, 2, 3}; sono disegnati i punti dopo la ventesima iterazione.

Le prime quattro istruzioni forniscono i 18 numeri necessari a definire le 3 funzioni (6 coefficienti per funzione) e le memorizzano nei vettori  $a(), b(), c(), d(), u(), v()$ ; nelle successive si calcolano 100000 punti, scegliendo a caso un numero tra 1 e 3 (RND(1) genera un numero tra 0 ed 1, moltiplicandolo per 3 sta tra 0 e 3, la sua parte intera è o 0 o 1 o 2, ed infine aggiungendo 1 il numero risulta 1 o 2 o 3), calcolando la successiva iterazione e disegnando il punto, come già detto, se  $n > 20$ .

```
DATA .5,0,0,.5,0,0
DATA .5,0,0,.5,.5,0
DATA .5,0,0,.5,0,.5
FOR i = 1 TO 3: READ a(i), b(i), c(i), d(i), u(i), v(i): NEXT i
SCREEN 12: x = 1: y = 1
FOR n = 1 TO 100000: i = 1 + INT(3 * RND(1))
xx = a(i) * x + b(i) * y + u(i): yy = c(i) * x + d(i) * y + v(i)
x = xx: y = yy: IF n > 20 THEN PSET (200 + 300 * x, 400 - 300 * y)
NEXT n
```

Le seguenti immagini mostrano le figure già viste in precedenza, in cui però i punti sono stati colorati a seconda della scelta casuale della funzione (per rendere più evidenti le immagini generate appunto dalle differenti funzioni).



Si tenga presente che non sempre è conveniente scegliere con uguali probabilità le funzioni da utilizzare; se questo è valido per il triangolo di Sierpinsky, dove le tre immagini colorate sono uguali e quindi contengono lo stesso numero di punti, lo stesso non si può dire per la foglia di felce, dove è ben evidente che la zona blu contiene molti più punti (essendo più vasta).

È ragionevole pertanto apportare qualche correzione al programma (all'istruzione che sceglie il numero casuale) in modo da variare la probabilità di scelta delle funzioni: una scelta opportuna è quella di utilizzare probabilità proporzionali alla superficie da ricoprire (che è proporzionale al valore  $|ad - bc|$ ).

Per la foglia di felce, per esempio, si ha, aggiungendo il parametro  $p$  (probabilità di scelta) la nuova tabella

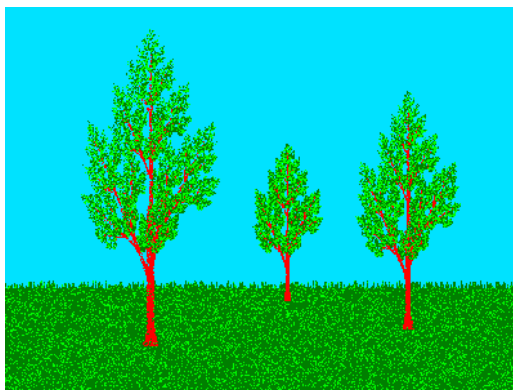
$i$	$a$	$b$	$c$	$d$	$u$	$v$	$p$
1	.85	.04	-.04	.85	0	1.6	.85
2	.2	-.26	.23	.22	0	1.6	.07
3	-.15	.28	.26	.24	0	.44	.07
4	0	0	0	.16	0	0	.01

Differenti valori di  $p$  causano comunque interessanti risultati, con differenti ombreggiature, ed utilizzando vari colori a seconda delle diverse densità dei punti si possono ottenere ad esempio foglie con colori "autunnali".

## Paesaggi, montagne, ecc.

Osserviamo intanto che è possibile già realizzare qualche semplice immagine, sufficientemente vicina alla realtà, componendo qualche albero di quelli precedentemente visti, e utilizzando qualche colore: se il punto va sul tronco è utilizzato un marrone (e tale colore viene conservato ancora per qualche iterazione successiva, in quanto i trasformati di tali punti sono i rami) e anche due sole tonalità di verde per le foglie.

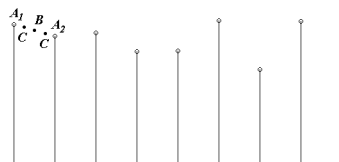
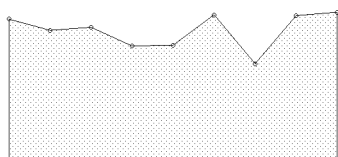
Si ottiene così un'immagine del tipo



Un ultimo problema che vogliamo però ancora affrontare è quello di realizzare immagini che riproducano paesaggi più complessi, sufficientemente realistici.

A questo scopo, incominciamo ad occuparci di profili montani.

Una prima semplificazione di un profilo montano può essere una semplice spezzata poligonale:



dati cioè alcuni punti, magari scelti a caso, questi sono congiunti da segmenti.

Vediamo questo semplice procedimento dal punto di vista dei processi iterativi; il segmento congiungente i punti  $A_1$  ed  $A_2$  può essere realizzato nel seguente modo:

date le coordinate  $(x_1, y_1)$  del punto  $A_1$  ed  $(x_2, y_2)$  del punto  $A_2$ , si determinano le coordinate  $(x_3, y_3)$  del punto medio  $B$  mediante le

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

si determinano quindi le coordinate dei due nuovi punti medi  $C$  e si continua così fino ad aver tracciato tutti i punti del segmento.

Con questa impostazione, il metodo si presta a semplici modifiche: ad esempio nella formula del calcolo della quota media

$$y_m = \frac{y_i + y_j}{2}$$

è possibile introdurre un piccolo disturbo (un numero casuale), per rendere meno rettilineo il segmento.

Una modifica del tipo

$$y_m = \frac{y_i + y_j}{2} + r$$

dove  $r$  è un numero casuale in un intervallo da  $-\delta$  a  $\delta$ , con  $\delta$  prefissato, genera una figura come quella a sinistra



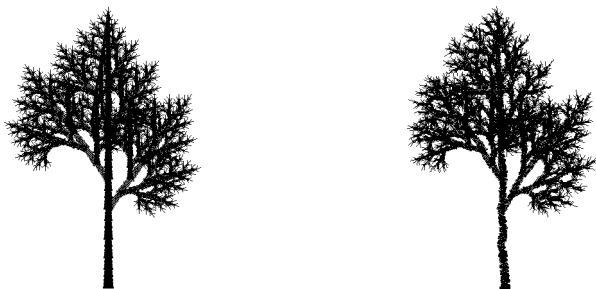
per la verità questa volta troppo frastagliata (l'ampiezza della frastagliatura dipende dalla scelta di  $\delta$ ).

Se noi però introduciamo un fattore che faccia variare  $\delta$ , rimpicciolendolo man mano che l'intervallo si restringe, (si osservi che se la figura è autosimile le oscillazioni sono proporzionali alla scala) in maniera proporzionale alla sua ampiezza; scegliamo cioè

$$y_m = \frac{y_i + y_j}{2} + pr$$

dove  $r$  è il solito numero casuale (compreso tra -0.5 e 0.5) e  $p = |x_j - x_i|$ , il risultato è decisamente apprezzabile (figura a destra).

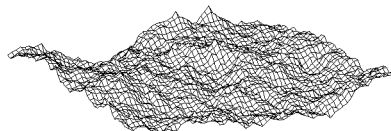
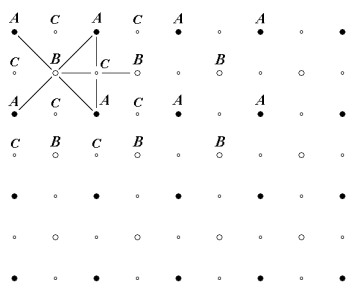
Si noti che l'introduzione di un po' di caso può essere applicata a qualunque altra situazione; se prendiamo il caso degli L-system ed applichiamo una piccola perturbazione casuale alla lunghezza dei segmenti ed all'angolo di rotazione, otterremo per esempio una figura di un albero che sarà meno perfetto dal punto di vista geometrico, ma proprio per questo ancora più realistico.



Vediamo ora di applicare il procedimento visto per generare profili di montagne al caso tridimensionale.

Generiamo cioè una superficie che si possa utilizzare per disegnare una porzione di superficie terrestre.

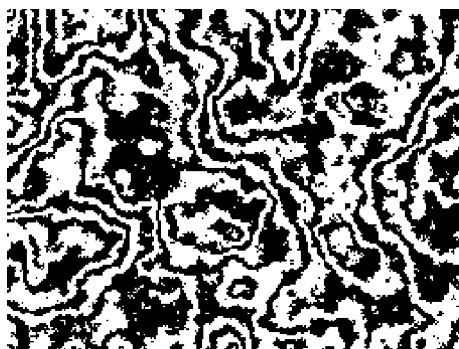
L'idea è naturalmente la stessa: si parte da una matrice di valori (che rappresentano le quote) definita in alcuni punti, con valori arbitrari; tali punti sono indicati con la lettera  $A$  nella figura seguente.



Vengono poi calcolate le quote nei vari punti intermedi, indicati con  $B$ , facendo la media tra le quote dei quattro vertici dei quadrati, alterata di un fattore casuale proporzionale alla dimensione dei quadrati; successivamente si ripete il procedimento calcolando le quote nei nuovi punti intermedi  $C$  con la stessa tecnica (per i punti sul bordo la media si può fare fra tre valori).

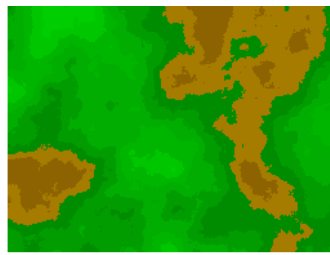
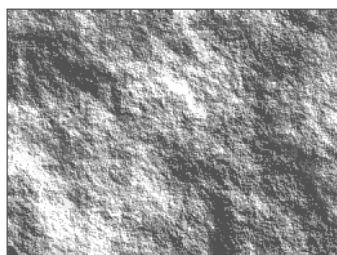
Il procedimento viene ripetuto sui quadrati sempre più piccoli, fino ad aver calcolato le quote in tutti i punti della matrice.

Nell'immagine che segue è fornita una vista in pianta della matrice ottenuta in cui ogni punto è colorato alternativamente in bianco o in nero a seconda della sua quota; si distinguono, anche se in maniera non molto chiara, le varie zone di livello della superficie (che appaiono accettabili: né troppo regolari, né troppo casuali).

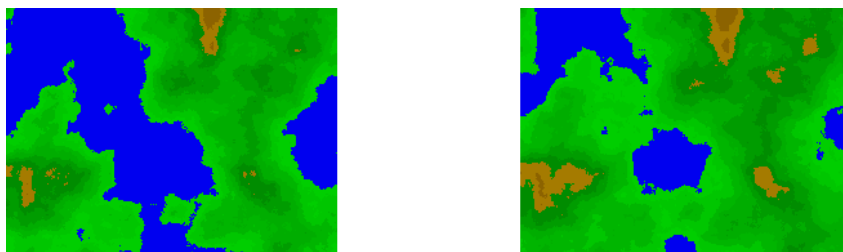


A questo punto è facile sbizzarrirsi e generare vari tipi di immagini.

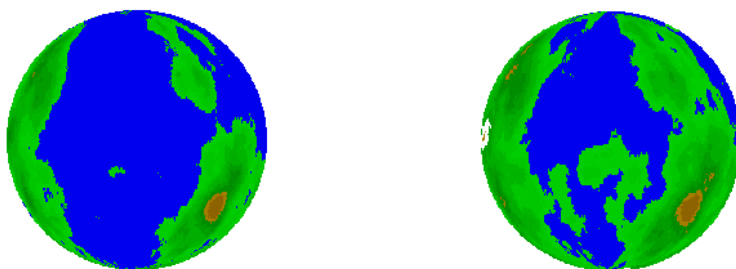
Possiamo colorare la figura con alcune tonalità di grigio a seconda della differenza di quota tra un punto e quello immediatamente adiacente (per esempio a destra in basso), per ottenere un effetto di ombra (figura a sinistra), oppure colorare le quote con poche tonalità di verde e marrone, come nelle carte geografiche fisiche ed ottenere la figura di destra.



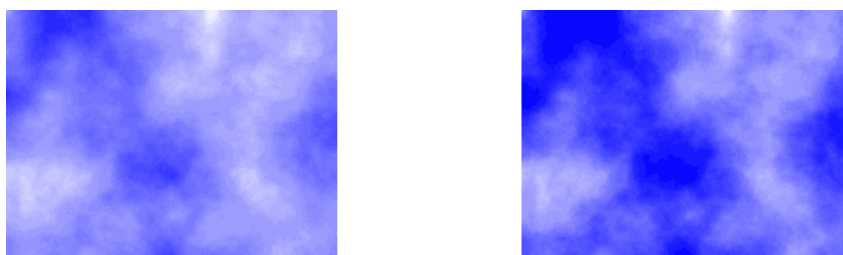
Possiamo invece colorare di azzurro le quote inferiori ad un certo valore (riempire con acqua); due risultati sono mostrati qui sotto con differenti quote di mare.



Possiamo spalmare tale figura su di una sfera, ottenendo pianeti immaginari:



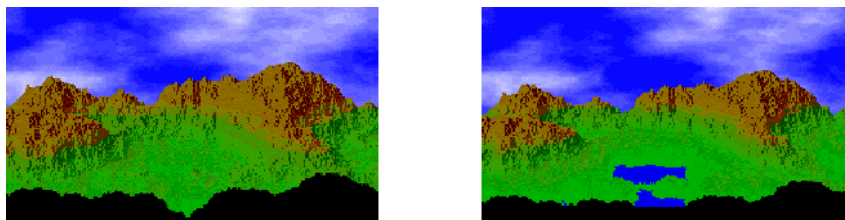
Possiamo invece utilizzare ad esempio una scala dall'azzurro al bianco per colorare le quote ed ottenere un cielo con nuvole (più o meno nuvoloso a seconda della quota sotto la quale si lascia l'azzurro, ovvero il sereno):



Possiamo infine riunire tutto in un'unica immagine (a bassa risoluzione per semplicità, con pochi colori in tutto, una quindicina di azzurri e altrettanti fra verdi e marroni), utilizzando i cieli così generati per lo sfondo, e riportando le montagne in prospettiva (o assonometria) utilizzando sia le tonalità di verde e marrone a seconda della quota, e due tonalità di ogni colore, uno più scuro ed uno

più chiaro a seconda del fatto che la sezione del profilo montano che viene disegnato va in salita o in discesa ottenendo un gradevole effetto di ombreggiatura.

Sono qui riportate due differenti immagini, sempre ottenute dalla precedente matrice, ove si è fissata a differenti valori la quota al di sotto della quale sta l'acqua (mare o lago alpino).



Ovviamente tutto quanto fatto, essendo generato dai primi punti casuali  $A_i$  messi sulla matrice originale, fornisce un'infinità di differenti immagini: basta generare un'altra matrice per avere un altro paesaggio.

Inoltre, data la semplicità delle tecniche utilizzate (il solito ripetere tante volte la stessa operazione), i risultati sono più che apprezzabili.

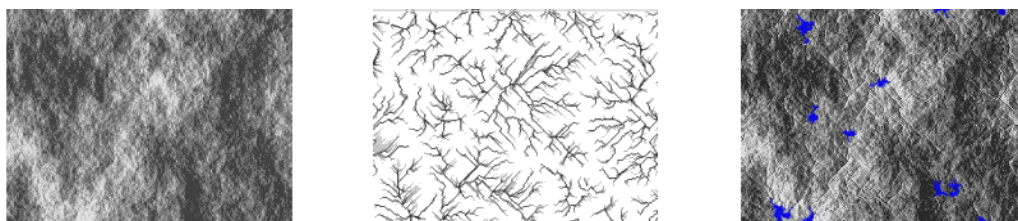
Volendo essere pignoli, ci sono due cose che non vanno molto bene: la prima è che se si riguarda l'immagine in scala di grigi della vista in pianta, ciò che si vede assomiglia più ad un paesaggio lunare che ad uno terrestre; mancano gli effetti dell'erosione, le valli generate dai fiumi, ecc.; la seconda è che avendo riempito d'acqua fino ad una quota prefissata, i vari laghi si trovano tutti alla stessa quota, e ciò non è realistico.

Per ovviare a ciò si potrebbe generare una erosione artificiale; per curiosità si è provato a realizzare un semplice programma che fa le seguenti cose:

- si suppone di far cadere in un punto una goccia d'acqua e si segue il percorso di tale goccia nella sua discesa verso valle: si guarda cioè, dato il punto in cui si trova la goccia, qual è il punto adiacente con la quota più bassa, in modo da far passare su quel punto la goccia stessa.
- si ripete tale procedimento fino a che la goccia non raggiunge un punto da cui non può più scendere (i punti adiacenti sono tutti a quote più alte)
- tutto quanto sopra viene ripetuto per ogni punto dell'immagine, ovvero si suppone di far cadere una pioggia uniforme sulla superficie.

Così, in base al computo di quante gocce sono passate per ogni punto, si ha un'idea di quanta erosione ci sia stata in quel punto.

Le immagini seguenti mostrano la superficie originale, i fiumi che si sono generati (ottenuti colorando ogni punto con grigi proporzionali alla quantità d'acqua passata per quel punto; più scuro, più acqua) e infine la stessa superficie erosa (le quote sono state diminuite sempre in maniera proporzionale all'acqua da lì passata).

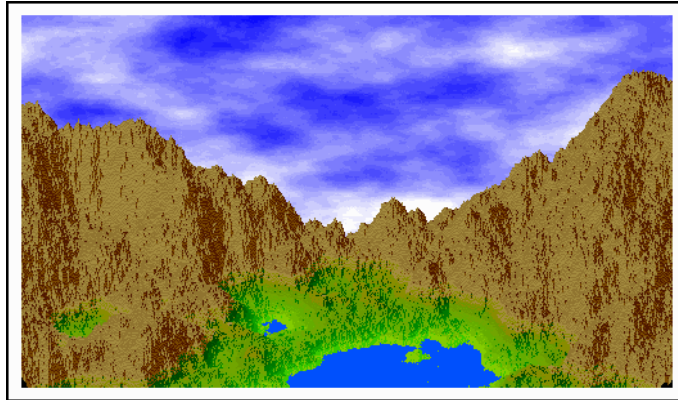




Là dove i fiumi finiscono si vedono anche alcuni laghi le cui profondità sono naturalmente proporzionali alla quantità d'acqua ivi affluita.

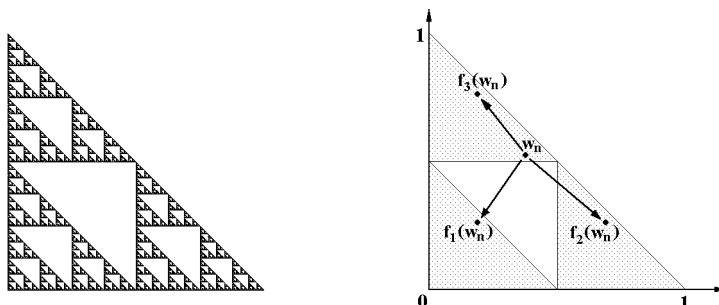
Un ultimo appunto va fatto sulla struttura dei fiumi, in quanto essi appaiono un po' troppo regolari, disposti lungo linee inclinate intorno ai  $45^\circ$ , e questo è probabilmente un difetto del generatore dei numeri casuali utilizzato per costruire la superficie.

In ogni caso possiamo ritenerci soddisfatti.



## Complementi.

Qualche ultima considerazione su altre possibili applicazioni delle metodologie qui viste. Torniamo ancora al già più volte usato triangolo di Sierpinsky:



si noti che, se indichiamo con  $S$  il punto fisso della trasformazione  $F$  (ovvero il triangolo stesso),  $f_1(S), f_2(S), f_3(S)$  risultano disgiunti (ad esclusione dei punti  $(.5,0), (0,.5), (.5,.5)$ ); essendo le tre funzioni  $f_i$  invertibili possiamo definire una funzione  $g : S \rightarrow S$ , inversa della  $F$ , ovvero

$$g(x, y) = \begin{cases} f_3^{-1}(x, y) & , (x, y) \in f_3(S) \setminus \{(0, .5), (.5, .5)\} \\ f_2^{-1}(x, y) & , (x, y) \in f_2(S) \setminus \{(.5, 0)\} \\ f_1^{-1}(x, y) & , (x, y) \in f_1(S) \end{cases}$$

Tale  $g$  può essere estesa a tutto  $\mathbb{R}^2$  come

$$g(x, y) = \begin{cases} (2x, 2y - 1) & , y > .5 \\ (2x - 1, 2y) & , x > .5 \text{ e } y \leq .5 \\ (2x, 2y) & , \text{altrove} \end{cases}$$

Allora  $g$  trasforma punti di  $S$  in punti di  $S$ , mentre partendo da punti fuori di  $S$ , ed iterando la  $g$  ci si allontana da  $S$ .

Quindi, nella successione

$$a_0 \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad a_{n+1} = f_i(a_n) \quad \text{con } i \text{ scelto a caso in } 1..n$$

se  $a_{n+1} \in S$ , si ha  $a_n \in S$ , e iterando il procedimento,  $a_0 \in S$ .

In definitiva  $S$  è un punto fisso “repulsivo” per la  $g$ , mentre è un punto fisso “attrattivo” per la  $F$ .

In particolare si noti che, se  $a_0 \in S$ , allora ovviamente  $a_n \in S$  per ogni  $n$  (perché  $S$  è punto fisso per  $F$ ), ma è anche vero che se  $a_0 \notin S$ , allora  $a_n \notin S$  per ogni  $n$ . Cioè i punti generati dalla successione sopra definita, partendo da un punto a caso, che non è in  $S$ , non appartengono mai ad  $S$ , pur essendovi molto vicini.

Più in generale consideriamo un sistema dinamico in  $\mathbb{R}^2$  definito da

$$f(x, y) = (x^2 - y^2 + a, 2xy + b) \quad , \quad (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad (x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_n, y_n)$$

(in forma complessa la ‘solita’  $z_{n+1} = z_n^2 + \lambda$ ) e sia

$$J_f = \{(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 : (x_n, y_n) \text{ è limitata}\} \quad .$$

La frontiera di  $J_f$  è detta *insieme di Julia* associato ad  $f$ .

(Se  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , l'insieme  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : (x_n, y_n) \text{ è limitata}\}$  è l'*insieme di Mandelbrot*.)

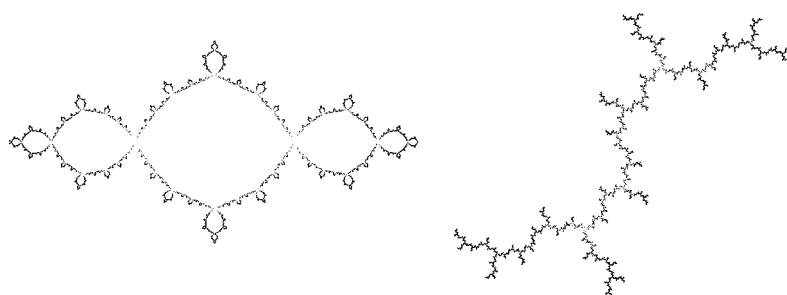
Ad esempio, se  $(a, b) = (0, 0)$ , si ha che  $(x_n, y_n)$  è limitata se e solo se  $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \leq 1$ , cioè  $J_f$  è il cerchio di centro l'origine e raggio 1, mentre il 'Julia set'  $J$  è la circonferenza.

Poiché, detta  $X$  la corona circolare di centro l'origine e raggio compreso tra .5 e 2, si ha  $X \subset f(X)$ , si può utilizzare il successivo teorema 9 per affermare che, definita  $F : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  come  $F(A) = f^{-1}(A)$ , pur non essendo una contrazione (è la radice quadrata), essa ha un punto fisso

$$A = \lim F^n(X)$$

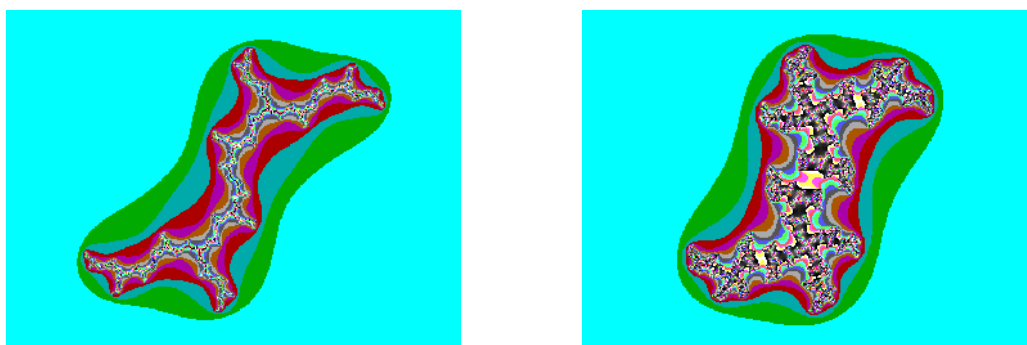
che è proprio  $J$ .

I seguenti disegni illustrano i punti fissi delle inverse di  $f$ , (ovvero i 'Julia set' di  $f$ ), nei casi  $(a, b) = (1, 0)$  e  $(a, b) = (0, 1)$  rispettivamente (ottenuti utilizzando sempre il solito programma citato, con le funzioni opportunamente modificate).



Gradevoli effetti si possono al solito ottenere colorando diversamente i punti dello schermo, se la successione del sistema dinamico diverge, a seconda del valore di  $n$  in cui la distanza dall'origine supera un valore prefissato.

Le seguenti figure sono relative alla precedente figura di destra



## Per matematici.

Provvediamo ora a sistemare brevemente, in maniera rigorosa, le affermazioni fatte in precedenza.

DEFINIZIONE 1 - Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico completo; indichiamo con  $\mathcal{H}(X)$  lo spazio costituito dai sottoinsiemi compatti, non vuoti, di  $X$ .

OSSERVAZIONE - Considereremo nel seguito per semplicità soltanto  $\mathcal{H}(X)$  nel caso in cui  $X = \mathbb{R}^N$ , con la usuale metrica euclidea.

Dati  $x \in \mathbb{R}^N$  ed  $A \subset \mathbb{R}^N$  ricordiamo che si definisce distanza di un punto da un insieme

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$$

Dati ora  $A$  e  $B$  entrambi sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^N$  siano

$$\delta(A, B) = \sup\{d(x, B) : x \in A\} \quad , \quad \delta(B, A) = \sup\{d(x, A) : x \in B\}$$

(si noti che se gli insiemi sono compatti i precedenti inf e sup sono in realtà dei minimi e dei massimi) e consideriamo la seguente definizione di distanza nello spazio  $\mathcal{H}(X)$

DEFINIZIONE 2 - Siano  $A, B \in \mathcal{H}(X)$  (cioè compatti non vuoti di  $\mathbb{R}^N$ ) definiamo distanza di  $A$  da  $B$  (di Hausdorff)

$$h(A, B) = \max\{\delta(A, B), \delta(B, A)\}$$

Verifichiamo che  $h$  è una distanza.

Intanto

$$h(A, A) = \max\{\delta(A, A), \delta(A, A)\} = \delta(A, A) = \max\{d(x, A) : x \in A\} = 0$$

Inoltre, poichè  $A$  e  $B$  sono compatti, si ha  $0 \leq h(A, B) < +\infty$ .

Sia ora  $A$  diverso da  $B$ , allora si può supporre che esista  $a \in A$  tale che  $a \notin B$ ; ne segue

$$h(A, B) \geq \delta(A, B) \geq d(a, B) > 0$$

È pure immediato che  $h(A, B) = h(B, A)$ .

Proviamo infine la disuguaglianza triangolare; dati  $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$  si ha, per ogni  $a \in A$  e  $c \in C$

$$d(a, B) = \min\{d(a, b) : b \in B\} \leq \min\{d(a, c) + d(c, b) : b \in B\} = d(a, c) + d(c, B)$$

Quindi

$$d(a, B) \leq d(a, c) + \max\{d(c, B) : c \in C\} = d(a, c) + \delta(C, B)$$

$$d(a, B) \leq \min\{d(a, c) : c \in C\} + \delta(C, B) = d(a, C) + \delta(C, B)$$

e

$$\delta(A, B) = \max\{d(a, B) : a \in A\} \leq \max\{d(a, C) : a \in A\} + \delta(C, B) = \delta(A, C) + \delta(C, B)$$

Analogamente si prova che  $\delta(B, A) \leq \delta(C, A) + \delta(B, C)$  da cui

$$\begin{aligned} h(A, B) &= \max\{\delta(A, B), \delta(B, A)\} \leq \max\{\delta(A, C) + \delta(C, B), \delta(C, A) + \delta(B, C)\} \leq \\ &\leq \max\{\max\{\delta(A, C), \delta(C, A)\} + \max\{\delta(C, B), \delta(B, C)\}\} = h(A, C) + h(C, B) \end{aligned}$$

e la fine della verifica. ■

Nel seguito, dati  $A \subset X$  ed  $\epsilon \geq 0$ , indicheremo con  $A + \epsilon = \{x \in X : d(x, A) \leq \epsilon\}$ , cioè l'insieme  $A$  "gonfiato" di  $\epsilon$ .

Il seguente teorema chiarisce il significato geometrico della distanza di Hausdorff.

TEOREMA 3 - Siano  $A, B \in \mathcal{H}(X)$  ed  $\epsilon \geq 0$ , allora

$$h(A, B) \leq \epsilon \Leftrightarrow A \subset B + \epsilon \text{ e } B \subset A + \epsilon$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} h(A, B) \leq \epsilon &\Leftrightarrow \delta(A, B) \leq \epsilon \text{ e } \delta(B, A) \leq \epsilon \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow d(a, B) \leq \epsilon \quad \forall a \in A \text{ e } d(b, A) \leq \epsilon \quad \forall b \in B \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A \subset B + \epsilon \text{ e } B \subset A + \epsilon \end{aligned}$$

e la tesi. ■

Vale inoltre il seguente

TEOREMA 4 -  $(\mathcal{H}(X), h)$  (cioè  $\mathcal{H}(X)$  con la distanza di Hausdorff) è uno spazio metrico completo.

Dimostrazione. Sia  $A_n \in \mathcal{H}(X)$  una successione di Cauchy, cioè tale che

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon : n, m > n_\epsilon \Rightarrow h(A_n, A_m) < \epsilon$$

Sia ora  $\epsilon > 0$  fissato, allora, se  $n, m > n_\epsilon$  si ha, per il teorema 3

$$A_n \subset A_m + \epsilon \quad \text{e} \quad A_m \subset A_n + \epsilon$$

La prima delle due relazioni, per  $m$  fissato ci dice che tutti gli  $A_n$  sono definitivamente contenuti in un unico compatto, per cui, se  $x_n \in A_n$ , esiste  $x_{n_k} \in A_{n_k}$  convergente ad un certo  $x$ .

Definiamo allora

$$A = \{x \in X : \exists x_{n_k} \in A_{n_k}, \lim x_{n_k} = x\}$$

Per quanto visto sopra  $A$  è non vuoto e limitato (perché contenuto in  $A_m + \epsilon$ ). Si vede che  $A$  è anche chiuso, infatti se  $x_m \in A$ ,  $\lim x_m = x$  allora, (utilizzando il classico procedimento diagonale)

$$\forall m \exists A_{n_m}, \exists y_m \in A_{n_m} : d(x_m, y_m) < \frac{1}{m}, \quad \text{con } n_m \text{ strettamente crescente}$$

da cui  $\lim y_m = x$  e  $x \in A$ .

Ne segue che  $A \in \mathcal{H}(X)$ . Proviamo ora che  $\lim A_n = A$ . Sia sempre  $\epsilon > 0$  fissato; abbiamo già visto sopra che, per  $m > n_\epsilon$  si ha  $A \subset A_m + \epsilon$ . Resta pertanto da provare che, sempre per  $n > n_\epsilon$  risulta  $A_n \subset A + \epsilon$ .

Sia quindi  $x \in A_n$ , si ha, se  $n, m > n_\epsilon$ ,  $A_n \subset A_m + \epsilon$ , ovvero

$$\forall m > n_\epsilon \quad \exists y_m \in A_m : d(x, y_m) \leq \epsilon.$$

Essendo  $y_m$  nella sfera di centro  $x$  e raggio  $\epsilon$  si può trovare un'estratta tale che  $\lim y_{m_k} = y$ ; ne segue che  $y \in A$  e  $d(x, y) < \epsilon$  ovvero  $x \in A + \epsilon$ , che è la tesi. ■

Ricordiamo brevemente la nozione di contrazione ed il teorema del punto fisso.

DEFINIZIONE 5 - Una funzione  $f : X \rightarrow X$  si dice *contrazione*, sullo spazio metrico  $(X, d)$ , se esiste  $k \in [0, 1)$  tale che

$$d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y) \quad , \quad \forall x, y \in X .$$

È immediato provare che

TEOREMA 6 - Sia  $f : X \rightarrow X$  una contrazione su uno spazio metrico  $(X, d)$ , allora  $f$  è continua.

Inoltre

TEOREMA 7 - Sia  $f : X \rightarrow X$  una contrazione su uno spazio metrico completo  $(X, d)$ , allora esiste uno ed un solo  $x \in X$  punto fisso per  $f$ , cioè tale che  $f(x) = x$ .

Inoltre, definita la successione  $x_0 \in X$ ,  $x_{n+1} = f(x_n)$ , si ha  $\lim x_n = x$ .

Dimostrazione. Osservato che

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq k d(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq k^n d(x_1, x_0)$$

si ha, per ogni  $p$  naturale

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \dots + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_n) \leq \\ &\leq (k^{n+p-1} + \dots + k^{n+1} + k^n) d(x_1, x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Ne segue, poiché  $k < 1$ , che  $x_n$  è una successione di Cauchy, ed essendo lo spazio completo,  $x_n$  converge ad  $x \in X$ .

Dalla continuità di  $f$  segue che  $x = f(x)$ .

Per quanto riguarda l'unicità del punto fisso, è immediato provare che se  $x$  ed  $y$  sono due punti fissi per  $f$ , allora  $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$  da cui, essendo  $k < 1$  segue  $d(x, y) = 0$  ovvero  $x = y$ . ■

Ricordato che, se  $f : X \rightarrow X$  e  $A \subset X$ , si definisce  $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ , vale il seguente

TEOREMA 8 - Siano  $f_i : X \rightarrow X$ ,  $i = 1, \dots, n$ , una famiglia di contrazioni, di costanti  $k_i$ , sullo spazio metrico completo  $(X, d)$  (nel nostro caso sempre  $\mathbb{R}^N$ ), sia  $A \in \mathcal{H}(X)$  e consideriamo la funzione definita da

$$F(A) = \bigcup_{i=1}^n f_i(A)$$

Allora  $F : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  è una contrazione sullo spazio metrico completo  $(\mathcal{H}(X), h)$ , la cui costante è  $k = \max\{k_i : i = 1 \dots n\}$ .

(Inoltre, se  $C \in \mathcal{H}(X)$ , la funzione  $G : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  definita da  $G(A) = F(A) \cup C$  è ancora contrazione, con uguale costante).

Dimostrazione. Si osservi che, essendo tutte le  $f_i$  continue, per il teorema di Weierstrass, se  $A \in \mathcal{H}(X)$  si ha  $F(A) \in \mathcal{H}(X)$ .

Siano ora  $A, B \in \mathcal{H}(X)$ , allora (ricordando che  $k = \max\{k_i\}$ )

$$\begin{aligned} \delta(F(A), F(B)) &= \max\{d(x, F(B)) : x \in F(A)\} = \\ &= \max\{\min\{d(f_i(a), f_j(b)) : b \in B, j = 1..n\} : a \in A, i = 1..n\} \leq \\ &\leq \max\{\min\{d(f_i(a), f_i(b)) : b \in B\} : a \in A, i = 1..n\} \leq \\ &\leq \max\{\min\{k_i d(a, b) : b \in B\} : a \in A, i = 1..n\} \leq \\ &\leq k \max\{\min\{d(a, b) : b \in B\} : a \in A\} = \\ &= k \delta(A, B) \end{aligned}$$

Analogamente si prova che  $\delta(F(B), F(A)) \leq k \delta(B, A)$  e quindi

$$h(F(A), F(B)) \leq k h(A, B)$$

L'ultima affermazione del teorema segue dal fatto che, se  $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$ , si ha  $h(A \cup C, B \cup C) \leq h(A, B)$ ; infatti

$$\begin{aligned} \delta(A \cup C, B \cup C) &= \max\{d(x, B \cup C) : x \in A \cup C\} = \max\{d(x, B \cup C) : x \in A\} \leq \\ &\leq \max\{d(x, B) : x \in A\} = \delta(A, B) \end{aligned}$$

e quindi la tesi. ■

OSSERVAZIONE - Dalla dimostrazione del Teorema 7, se  $n = 0$  e  $p \rightarrow +\infty$ , detto  $x$  il punto fisso, si ha

$$d(x, x_0) \leq \frac{1}{1-k} d(f(x_0), x_0)$$

Pertanto, se  $A \subset \mathbb{R}^2$  ed  $F$  è una contrazione di costante  $k$ , tale che  $h(F(A), A) < \epsilon$ , allora il punto fisso  $S$  di  $F$  non è molto lontano da  $A$ ; più precisamente

$$h(S, A) \leq \frac{\epsilon}{1-k}$$

Per ultimo si può provare l'esistenza di un punto fisso per una funzione che non è contrazione, sfruttando la monotonia delle iterazioni (inclusione degli insiemi), anziché il criterio di Cauchy. (Si è indicato con  $F^n$  la funzione ottenuta componendo iterativamente  $F$  per  $n$  volte)

TEOREMA 9 - Sia  $(Y, d)$  uno spazio metrico; sia  $X \subset Y$  un compatto non vuoto. Sia  $f : X \rightarrow Y$  continua tale che  $X \subset f(X)$ . Allora, definita  $F : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$

$$F(A) = f^{-1}(A) \quad , \quad A \in \mathcal{H}(X)$$

$F$  possiede un punto fisso  $A \in \mathcal{H}(X)$  dato da

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} F^n(X) = \lim F^n(X) \quad .$$

Dimostrazione. Proviamo intanto che  $F$  trasforma compatti non vuoti di  $X$  in compatti non vuoti di  $X$ .

È intanto immediato che, se  $A \subset X$ , allora  $f^{-1}(A) \subset X$  (poiché  $X$  è il dominio di  $f$ ), e quindi  $f^{-1}(A)$  è limitato.

Se poi  $A$  è non vuoto e  $y \in A$ , allora  $y \in X \subset f(X)$  (per ipotesi), cioè  $\exists x \in X : f(x) = y \in A$ , ovvero  $x \in f^{-1}(A)$ ; pertanto  $f^{-1}(A)$  è non vuoto.

Sia ora  $A \subset X$ , compatto, e sia  $x_n \in f^{-1}(A)$ ,  $\lim x_n = x$ , allora  $f(x_n) \in A$ , e per la continuità di  $f$  e la chiusura di  $A$ , si ha  $f(x) \in A$ , ovvero  $x \in f^{-1}(A)$ , cioè  $f^{-1}(A)$  è chiuso.

Inoltre, (ricordando che  $F(A) = f^{-1}(A)$ )

$$X \supset F(X) \supset F^2(X) \supset \dots \supset F^n(X) \supset \dots$$

da cui, definito

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} F^n(X)$$

si prova che  $A = \lim F^n(X)$ ; infatti, posto  $A_n = F^n(X)$ , è immediato che, per ogni  $\epsilon > 0$  e per ogni  $n$ ,  $A \subset A_n \subset A_n + \epsilon$ .

Resta da provare che (essendo gli insiemi ‘decrementi’) per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $n_\epsilon$  tale che  $A_{n_\epsilon} \subset A + \epsilon$ .

Se ciò non fosse vero esisterebbe  $\epsilon > 0$  tale che per ogni  $n$  esiste  $x_n \in A_n$ , con  $d(x_n, A) > \epsilon$ .

Essendo  $x_n \in A_n \subset X$  in un compatto, esisterà  $x_{n_k}$  convergente ad  $x \in X$ ; allora, per ogni  $p$  naturale,  $x_{n_{k+p}} \in A_{n_{k+p}} \subset A_{n_k}$  e passando al limite su  $p$ , essendo  $A_{n_k}$  chiuso, si ha  $x \in A_{n_k}$  per ogni  $n_k$ , ovvero  $x \in A_n$  per ogni  $n$ , per la ‘decrecenza’ di  $A_n$ .

Ne segue  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$ , (questo ragionamento prova fra l’altro che  $A$  è non vuoto e quindi  $A \in \mathcal{H}(X)$ ).

Ma, da  $d(x_{n_k}, A) > \epsilon$ , si ha, per la continuità della distanza,  $d(x, A) \geq \epsilon$ , il che è assurdo.

Proviamo infine che  $A$  è punto fisso per  $f^{-1}$ ; tenuto conto che  $A_{n+1} = f^{-1}(A_n) = F(A_n)$ , si ha

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A) &\Leftrightarrow x \in f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow f(x) \in A_n \quad \forall n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A_n) \quad \forall n \Leftrightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{n+1} \Leftrightarrow x \in A \end{aligned}$$

e la tesi. ■

## Bibliografia.

- [1] M.F.Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press Professional.
- [2] S.Bettelli, R.Biolchini, *Frattali Flib Asteroidi*, Zanichelli.
- [3] J.A.Kaandorp, *Fractal Modelling, Growth and Form in Biology*, Springer-Verlag.
- [4] H.O.Peitgen, P.H.Richter, *The Beauty of Fractals*, Springer-Verlag.
- [5] M.Schroeder, *Fractals, Chaos, Power Laws*, Freeman.



**Indice.**

Introduzione .....	pag. 3
Le successioni definite per ricorrenza .....	pag. 3
Successioni nel piano complesso .....	pag. 10
Primi frattali .....	pag. 13
Erbe ed alberi .....	pag. 14
Qualche approfondimento teorico .....	pag. 18
Successioni di insiemi piani .....	pag. 20
Un semplice programma .....	pag. 26
Paesaggi, montagne, ecc. ....	pag. 28
Complementi .....	pag. 34
Per matematici .....	pag. 36
Bibliografia .....	pag. 40

---