Il Calcolo e la sua storia

Ottavio Caligaris

CAPITOLO 1

INTRODUZIONE

Con il nome di Analisi Matematica, o Calcolo Differenziale, più folkloristicamente Calcolo Sublime o più semplicemente Calcolo, si indica uno dei più potenti strumenti di cui disponiamo per costruire modelli della realtà che ci circonda.

Mediante il Calcolo differenziale possiamo descrivere:

il moto di un sasso che cade nel vuoto o nell'aria,

la discesa di un paracadutista,

l'oscillazione di un pendolo, semplice o rovesciato,

l'oscillazione di una massa appesa ad una molla,

la crescita di una popolazione di batteri, di animali o di esseri umani,

la coesistenza, cooperativa o competitiva, di due popolazioni,

la crescita di una popolazione di predatori e della popolazione delle loro prede,

la diffusione di un inquinante in in fiume o nell'atmosfera,

il traffico autostradale,

la propagazione del calore in un corpo,

l'andamento dei mercati economici.

Mediante il Calcolo Differenziale si possono risolvere problemi quali:

determinare la linea di lunghezza minima che congiunge due punti su un piano o su una superficie,

determinare la tecnica di frenata per far scendere un veicolo lunare dalla sua orbita attorno alla luna fino al suolo lunare in modo che il consumo di carburante sia minimo,

rallentare un corpo in movimento nel minor tempo possibile,

determinare la superficie di rotazione che offre la minor resistenza all'avanzamento nell'aria.

Il Calcolo differenziale si fonda,oltre che sul concetto di numero reale, sulla nozione di infinitesimo (una quantità arbitrariamente piccola) o, equivalentemente di infinito (una quantità arbitrariamente grande).

Fin dall'antichità il concetto di infinito ha suscitato problemi discussioni e non poche perplessità.

L'indagine sul concetto di infinito inizia con i pensatori greci; tra essi si segnalano per il loro interesse più o meno diretto al tema Zenone, Aristotele, Archimede.

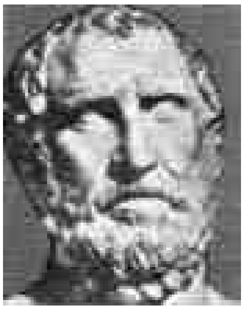

FIGURA 1.1. Zenone

Zenone è famoso per i suoi paradossi; egli ne formulò oltre quaranta, che ci sono pervenuti attraverso ciò che di essi ci riferiscono Platone, proclo ed Aristotele

Aristotele cita Zenone per confutare la validità dei suoi argomenti: egli dice che Zenone sbaglia perchè considera il tempo costituito da istanti indivisibili. Ad Aristotele è dovuta la distinzione tra infinito **potenziale** ed infinito **attuale**. (I numeri sono potenzialmente infiniti, ma ogni grandezza è rappresentata da un numero finito)

Archimede escogita il metodo di **esaustione** per calcolare l'area del settore parabolico e la lunghezza della circonferenza.

Per meglio inquadrare l'evoluzione del problema consideriamo la collocazione temporale dei matematici greci negli ultimi secoli prima di Cristo.

Possiamo osservare che i Matematici che abbiamo citato coprono l'arco di tempo che va da 600 A.C. al 200 A.C..

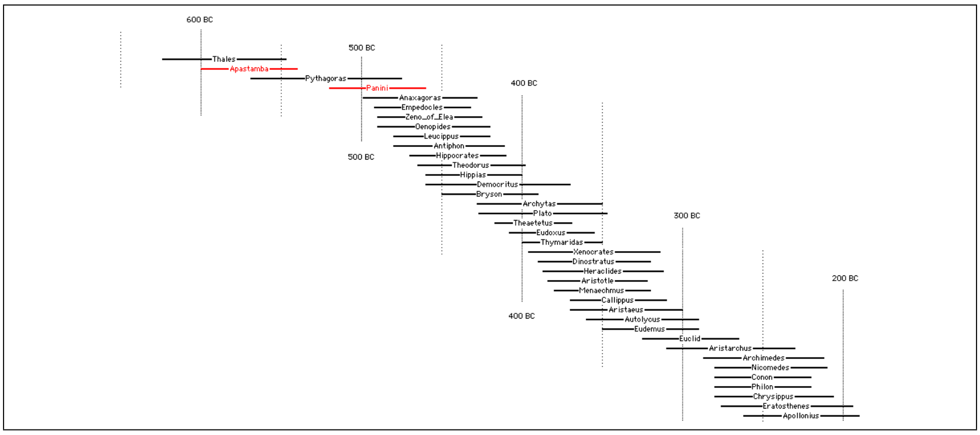

FIGURA 1.2.

In questo periodo si sono sviluppate le convinzioni, specie ad opera di Aristotele, che hanno influenzato il pensiero degli scienziati fino al 1600.

Le idee di Aristotele sull'infinito

Poichè nessuna grandezza sperimentabile è infinita, è impossibile eccedere ogni assegnata grandezza; infatti se ciò fosse possibile potrebbe esistere qualcosa di più grande dell'Universo.

erano talmente radicate che persino Carlo Federico Gauss contestava ad un collega

Per quel che riguarda la vostra dimostrazione devo protestare con forza contro l'uso dell'infinito come qualcosa di assodato, in quanto ciò non è permesso in matematica. L'infinito è solo un modo di dire.....

Nonostante le posizioni di Gauss già molto tempo prima Galileo (1560) aveva messo in evidenza i problemi sull'infinito insiti nella dottrina Aristotelica.

Egli fece osservare che si poteva sottrarre all'insieme dei numeri naturali l'insieme dei numeri pari, cioè la metà dell'insieme, e che il rimanente insieme,i numeri dispari, è ancora tanto numeroso come prima.

Da allora questa osservazione è nota come Paradosso di Galileo e può essere considerata come il primo tentativo di introdurre nelle argomentazioni matematiche l'infinito Attuale.

Ciò avvenne nel periodo di massimo sviluppo del calcolo durante il 1600-1700, nonostante non fossero infrequenti voci contrarie a questo sviluppo, come quella di Gauss.

Il primo ad introdurre il simbolo che oggi usiamo per indicare l'infinito fu John Wallis (1616) nel suo trattato Arithmetica infinitorum pubblicato nel 1665.

Un decennio dopo Newton e Leibniz cominciarono a sviluppare indipendentemente i fondamenti del calcolo differenziale usando tecniche che facevano largo uso di infiniti ed infinitesimi, anche se Newton ricorse in un primo tempo ad una poco chiara nozione che chiamò flussione e che precisò successivamente sotto il nome di rapporto di incrementi evanescenti.

Attorno ai primi anni del decennio a partire dal 1870, Georg Cantor pubblicò i suoi lavori sui numeri reali e prese una posizione completamente contraddittoria rispetto alla dottrina Aristotelica che escudeva l'infinito attuale.

Questa posizione gli valse le critiche ed anche la condanna di molti influenti matematici dell'epoca che danneggiò la sua carriera e probabilmente anche la sua salute mentale.

Henri Poincare espresse la sua disapprovazione affermando che la teoria degli insiemi di Cantor sarebbe stata considerata dalle generazioni future come una malattia dalla quale guarire.

Leopold Kronecker era fermamente convinto che i numeri potessero essere solo naturali ed interi, frazioni, numeri immaginari ed in particolar modo irrazionali non dovevano avere diritto di cittadinanza nella matematica.

Kronecker che ricopriva una prestigiosa posizione all'Università di Berlino avversò in ogni modo Cantor, i suoi allievi e le loro pubblicazioni.

A seguito dei continui attacchi cui era sottoposto, nel 1884, Cantor soffrì di diversi crolli nervosi e morì in una casa di cura per malattie mentali nel 1918, dopo aver ricevuto nel 1904 una medaglia della Royal Society di Londra.

I matematici della sua epoca non furono tuttavia tutti contrari alle sue teorie: Mittag-Leffler, Weierstraße Dedekind furono tra i suoi sostenitori, avevano capito che Cantor si sarebbe guadagnato, con le sue torie una posizione di primo piano nella storia della matematica e che le sue idee avrebbero preso lentamente il sopravvento e sarebbero state alla base della matematica contemporanea ed in particolare del calcolo.

CAPITOLO 2

I Paradossi di Zenone

Vediamo quindi i quattro più famosi paradossi enunciati da Zenone.

1. La dicotomia

Se un oggetto si muove, da un punto A ad un altro punto B, prima di giungere in B deve percorrere la metà della distanza e prima di coprire la metà della distanza rimanente deve percorrere la metà di questa metà; pertanto l'oggetto, per raggiungere B deve compiere un numero infinito di passi e questo richiederebbe infinito tempo.
Pertanto l'oggetto non può muoversi

2. Achille la tartaruga

Achille e la tartaruga sono impegnati in una corsa, ma Achille, che è molto più veloce della tartaruga, le concede un vantaggio.
Achille non raggiungerà più, a causa del vantaggio concesso, la tartaruga infatti quando Achille ha coperto lo svantaggio, la tartaruga si sarà mossa dalla sua posizione e quindi Achilledovrà coprire un nuovo, anche se più piccolo svantaggio.
Quando Achille avrà coperto anche questo, la tartaruga si sarà ancora mossa e quindi Achille rimarrà in svantaggio, anche se ancora minore.
Poichè questa situazione si ripete all'infinito Achille non raggiungerà mai la tartaruga.

3. Il Paradosso della freccia

Una freccia, durante il suo volo, mentre si muove occupa in ogni istante uno spazio uguale a se' stessa; d'altra parte quando la freccia occupa uno spazio uguale a se' stessa non si muove.
Quindi se la freccia si muove allora non si muove.

4. Il Paradosso dello Stadio

Consideriamo quattro corpi di uguale dimensione A_2, A_2, A_3, A_4, immobili.
Siano B_2, B_2, B_3, B_4, corpi della stessa dimensione in movimento verso destra in modo che ciascun B supera ciascun A nel minimo tempo possibile.
Siano ancora C_2, C_2, C_3, C_4, corpi della stessa dimensione in movimento verso sinistra in modo che ciascun C supera ciascun A nel minimo tempo possibile.
È chiaro quindi che dopo che è trascorso un istante, ogni C ha superato un A, ogni B ha superato un A ma ogni C ha superato 2 B e quindi l'istante trascorso non è il minimo possibile.

$$\boxed{A_1}\boxed{A_2}\boxed{A_3}\boxed{A_4}$$

$$\boxed{B_1}\boxed{B_2}\boxed{B_3}\boxed{B_4}$$

$$\boxed{C_1}\boxed{C_2}\boxed{C_3}\boxed{C_4}$$

$$\boxed{A_1}\boxed{A_2}\boxed{A_3}\boxed{A_4}$$

$$\qquad\quad\boxed{B_1}\boxed{B_2}\boxed{B_3}\boxed{B_4}$$

$$\boxed{C_1}\boxed{C_2}\boxed{C_3}\boxed{C_4}\qquad\quad$$

CAPITOLO 3

La soluzione dei Paradossi di Zenone

Per comprendere come i paradossi della Dicotomia e di Achille e della tartaruga si possano inquadrare nell'ambito del moderno calcolo differenziale e vi trovino una semplice spiegazione, occorre capire come sia possibile sommare infiniti numeri positivi ottenendo una somma finita.

Più precisamente dobbiamo considerare il problema di sommare i termini di una progressione geometrica.

Chiamiamo progressione geometrica di ragione x la successione di numeri reali ottenuti partendo da 1, ciascuno dei quali si ottiene moltiplicando il precedente per la ragione x.

In simboli, se indichiamo con a_n il termine di posto n, la progressione geometrica si definisce mediante le

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = x a_{n-1} \end{cases} \tag{3.1}$$

Si vede subito che i termini di una progressione geometrica di ragione x sono

$$1, x, x^2, x^3, x^4, \cdots\cdots, \cdots\cdots, x^n, x^{n+1}, \cdots$$

Per calcolare la somma dei primi n termini di una progressione geometrica possiamo osservare che

$$S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \tag{3.2}$$

$$xS_n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n+1} \tag{3.3}$$

da cui, sottraendo membro a membro, le precedenti uguaglianze

$$(1-x)S_n = 1 - x^{n+1} \tag{3.4}$$

e si ricava per $x \neq 1$

$$S_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \tag{3.5}$$

Ora, se supponiamo che $0 < x < 1$, possiamo constatare che X^{n+1} diventa arbitrariamente piccolo quando n diventa sufficientemente grande.

Questo concetto di solito si esprime dicendo che

$$\lim_n x^{n+1} = 0 \tag{3.6}$$

e si formalizza mediante la seguente definizione:

Comunque si scelga un numero positivo ϵ possiamo trovare N tale che se $n > N$ si ha

$$x^{n+1} < \epsilon$$

Per rendere evidente il concetto possiamo soffermarci sul comportamento di x^{n+1} nel caso in cui $x = \frac{1}{2}$; in tal caso i termini della progressione geometrica sono dati da:

$$1, \left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \ldots\ldots, \ldots\ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \ldots$$

È evidente che il termine $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ diventa piccolo quanto si vuole man mano che n aumenta; ad esempio

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{100} \quad \text{per} \quad n > 7 \tag{3.7}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{1000} \quad \text{per} \quad n > 10 \tag{3.8}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{10000} \quad \text{per} \quad n > 14 \tag{3.9}$$

(3.10)

ed in generale

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{10^N} \tag{3.11}$$

se e solo se

$$2^n > 10^N \tag{3.12}$$

se e solo se

$$n \log_{10} 2 > N \tag{3.13}$$

se e solo se

$$n > \frac{N}{\log_{10} 2} \tag{3.14}$$

Da

$$\lim_n x^{n+1} = 0$$

possiamo immediatamente dedurre che

$$\lim_n S_n = \frac{1}{1-x} \tag{3.15}$$

Pertanto $\frac{1}{1-x}$ è la somma di tutti gli infiniti termini della progressione geometrica: esprimeremo questo concetto scrivendo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \tag{3.16}$$

È anche utile osservare che

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \tag{3.17}$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x} \tag{3.18}$$

La precedente formula consente, ad esempio, di far luce sul fatto che

$$0.\bar{9} = 1$$

Infatti

$$\begin{aligned} 0.\bar{9} &= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \cdots + \cdots + \frac{9}{10^n} + \cdots = \\ &= 9 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = 9 \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 9 \frac{1}{9} \end{aligned} \tag{3.19}$$

CAPITOLO 4

Una spiegazione dei Paradossi della Dicotomia e di Achille e la tartaruga

I Paradossi della Dicotomia e di Achille e la tartaruga sono strettamente legati alla serie geometrica.

Ci occuperemo qui di esporre i particolari di questo legame. Non ci occupiamo invece dei paradossi della freccia e dello stadio che sono invece legati alla definizione di velocità puntuale e quindi di derivata e alla questione della quantizzazione del tempo.

1. Perch’‘e si arriva in fondo: La dicotomia non è un problema.

Il paradosso della dicotomia è quello che può più facilmente essere ricondotto allo studio di una serie geometrica.

La distanza che l’oggetto deve percorrere è $B - A$ e per percorrerla interamente dovrà coprire le distanze:

$$\frac{B-A}{2}, \frac{B-A}{4}, \frac{B-A}{8}, \frac{B-A}{16}, \dots, \dots \frac{B-A}{2^n}, \dots \tag{4.1}$$

Le distanze da coprire sono un numero infinito, tuttavia la loro somma è finita, infatti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B-A}{2^n} = (B-A)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = (B-A)\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = (B-A) \tag{4.2}$$

2. Vince sempre il migliore

Anche se Zenone nonè d’accordo Achille raggiungerà la tartaruga. Il buon senso non ce lo aveva mai fatto dubitare ed è quantomeno confortante che la matematica dopo 2000 anni ce lo confermi.

Cominciamo con l’osservare che se V_A è la velocità di Achille e V_T è la velocità della tartaruga ed H è il vantaggio concesso da Achille alla tartaruga,

- la posizione di Achille è data da
$$V_A t + H$$
- la posizione della tartaruga è data da
$$V_T t$$

Pertanto Achille raggiugerà la tartaruga al tempo t_0 tale che

$$V_A t_0 + H = V_T t_0 \tag{4.3}$$

da cui si ricava

$$t_0 = \frac{H}{V_A - V_T} \tag{4.4}$$

Lo stesso risultato si può ottenere sommando i tempi necessari ad Achille per colmare il suo svantaggio.

- Achille colmerà lo svantaggio iniziale in un tempo
$$\frac{H}{V_A}$$
nel frattempo accumulerà un nuovo svantaggio pari a
$$\frac{H}{V_A} V_T$$
- Achille coprirà il nuovo svantaggio nel tempo
$$\frac{H}{V_A} V_T \frac{1}{V_A} = \frac{H V_T}{V_A^2}$$
e la tartaruga accumulerà un nuovo vantaggio pari a
$$\frac{H V_T}{V_A^2} V_T = \frac{H V_T^2}{V_A^2}$$
- Achille raggiungerà la nuova posizione nel tempo
$$\frac{H V_T^2}{V_A^2} \frac{1}{V_A} = \frac{H V_T^2}{V_A^3}$$

Gli svantaggi accumulati accumulati di volta in volta da Achille possono pertanto essere espressi da

$$\frac{H V_T^{n-1}}{V_A^n} \qquad n \geq 1$$

ed il tempo in cui avviene l'aggancio si ottiene sommandoli tutti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H V_T^{n-1}}{V_A^n} = \frac{H}{V_T} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{V_T}{V_A} \right)^n = \frac{H}{V_T} \frac{\frac{V_T}{V_A}}{1 - \frac{V_T}{V_A}} = \frac{H}{V_A - V_T} \tag{4.5}$$

3. Un passerotto generoso ma sfortunato

La serie geometrica può anche essere impiegata per risolvere in modo complicato un semplice, classico problema.

La soluzione complicata, pur non essendo interessante per il risultato che produce, che potrebbe essere ottenuto in maniera semplice, riveste tuttavia un certo interesse in quanto illustra un corretto uso della serie geometrica.

Due locomotive viaggiano sullo stesso binario, una verso l'altra, partendo da due punti A e B con velocità V.
I macchinisti sono particolarmente distratti e non si accorgono, che se non interverranno verranno a collisione, però, sulla prima locomotiva, un passerotto si rende conto della situazione e decide di intervenire.
Cerca di attirare l'attenzione del macchinista, ma non riuscendoci, decide di volare, con velocità w, fino alla seconda locomotiva.
Appena la raggiunge si rende conto che non riuscirà ad attirare l'attenzione neanche del secondo macchinista e quindi torna immediatamente alla prima, ma anche questa volta il suo tentativo di intervento è vano.
Di nuovo torna indietro fino alla seconda locomotiva e poi ancora alla prima e così via fino a che le due locomotive non si scontrano.
Quanta strada ha fatto lo sfortunato passerotto nel suo generoso tentativo?

La risposta al quesito è molto semplice.

Se all'istante $t = 0$ la prima locomotiva si trova in A, la seconda in B e il passerotto inizia il suo volo, la posizione delle due locomotive all'istante t, sarà data da

$$x_A = A + Vt \qquad x_B = B - Vt \tag{4.6}$$

e quindi lo scontro avverrà quando

$$A + Vt = B - Vt \tag{4.7}$$

cioè quando

$$t = \frac{B - A}{2V} \tag{4.8}$$

Pertanto il passerotto che vola a velocità w avrà percorso la distanza

$$wt = w\frac{B - A}{2V} \tag{4.9}$$

Vediamo come lo stesso risultato si possa ottenere anche sommando i singoli percorsi compiuti dal passerotto.

A questo scopo osserviamo che il passerotto raggiunge B partendo da A la prima volta in un tempo t_1 che si ottiene risolvendo rispetto a t la seguente uguaglianza

$$A + wt = B - Vt \tag{4.10}$$

per cui

$$t_1 = \frac{B - A}{V + w} \tag{4.11}$$

Indichiamo con $A_0 = A$ e con $B_0 = B$ le posizioni iniziali delle due locomotive, nell'istante t_1 esse si troveranno in una posizione A_1 e B_1, rispettivamente, che può essere calcolata mediante le

$$A_1 = A_0 + Vt_1 \qquad B_1 = B_0 - Vt_1 \tag{4.12}$$

ed il passerotto avrà percorso lo spazio

$$B_1 - A_0 = (B_0 - A_0) - Vt_1 = (B_0 - A_0) - V\frac{B_0 - A_0}{V + w} = (B_0 - A_0)\left(1 - \frac{V}{V + w}\right) \tag{4.13}$$

È utile osservare per il seguito che la distanza coperta dal passerotto sarebbe stata la stessa anche se avesse volato in senso opposto da B ad A.

In altri termini

$$A_1 - B_0 = B_1 - A - 0$$

Naturalmente il passo successivo e del tutto simile al precedente.

Consideriamo ora la situazione che si verifica dopo $n-$esimo volo del passerotto.

Le due locomotive, partite da A_0 e B_0 si troveranno in una posizione A_n, B_n, il passerotto si troverà su una di esse e raggiungerà l'altra dopo un volo che dura il tempo t_n che si ricava dall'equazione

$$A_n + wt_n = B_n - Vt_n \tag{4.14}$$

per cui

$$t_N = \frac{B_n - A_n}{V + w} \tag{4.15}$$

Ricordiamo che la direzione del volo non cambia questo risultato.

Dopo il tempo t_n le locomotive avranno raggiunto la posizione

$$A_{n+1} = A_n + Vt_n \qquad B_{n+1} = B_n - Vt_n \tag{4.16}$$

Lo spazio percorso dal passerotto si può calcolare mediante la

$$\begin{aligned} B_{n+1} - A_n = B_n - Vt_n - A_{n-1} - Vt_{n-1} = \\ (B_n - A_{n-1}) - V(t_n + t_{n-1}) = \\ (B_n - A_{n-1}) - V\left(\frac{B_n - A_n + B_{n-1} - A_{n-1}}{V + w}\right) = \\ (B_n - A_{n-1}) - \frac{V}{V + w}\left((B_n - A_{n-1}) + (B_{n-1} - A_n)\right) \end{aligned} \tag{4.17}$$

e ricordando che $B_{n-1} - A_n = B_n - A_{n-1}$

$$B_{n+1} - A_n = (B_n - A_{n-1}) - \frac{V}{V+w} 2(B_n - A_{n-1}) = \\ (B_n - A_{n-1}) \left(1 - \frac{2V}{V+w}\right) = \\ (B_n - A_{n-1}) \left(\frac{W-V}{V+w}\right) \tag{4.18}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} B_{n+1} - A_n &= (B_n - A_{n-1}) \left(\frac{W-V}{V+w}\right) \\ &= (B_{n-1} - A_{n-2}) \left(\frac{W-V}{V+w}\right)^2 \\ &= (B_{n-2} - A_{n-3}) \left(\frac{W-V}{V+w}\right)^3 \\ &= (B_1 - A_0) \left(\frac{W-V}{V+w}\right)^n = \\ &= (B_0 - A_0) \frac{w}{V+w} \left(\frac{W-V}{V+w}\right)^n = \end{aligned} \tag{4.19}$$

e sommando le distanze degli infiniti voli otterremo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (B_{n+1} - A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (B_1 - A_0) \left(\frac{W-V}{V+w}\right)^n = \\ (B_0 - A_0) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w}{V+w} \left(\frac{W-V}{V+w}\right)^n = \\ (B_0 - A_0) \frac{w}{V+w} \frac{1}{1 - \frac{W-V}{V+w}} = \\ (B_0 - A_0) \frac{w}{V+w} \frac{V+w}{w+V+V-w} = \\ (B_0 - A_0) \frac{w}{V+w} \frac{V+w}{2V} = \\ (B_0 - A_0) \frac{w}{2V} \tag{4.20}$$

CAPITOLO 5

Il metodo di esaustione per il calcolo dell'area del settore parabolico

Gli argomenti impiegati per illustrare i precedenti esempi possono essere impiegati per calcolare l'area del segmento parabolico seguendo le orme di Archimede che porò a termine questo calcolo tra il 300 ed il 200 A.C..

In realtà Archimede fece uso di argomentazioni esclusivamente geometriche, alcune delle quali fatte risalire ad Euclide e delle quali non ciè pervenuta la dimostrazione originale. Noi faremo invece uso di quel potente strumento che è la geometria analitica introdotta attorno al 1500 da Cartesio.

Il Problema da risolvere è estremamente semplice:

Calcolare l'area della figura piana che delimitata da una parabola e da una retta che la interseca.

Per semplificare la trattazione analitica del problema consideraimo un sistema di riferimento in cui l'asse delle ordinate coincide con l'asse della parabola così che l'equazione della parabola è

$$y = \alpha x^2$$

Possiamo inoltre considerare solo $\alpha = 1$.

Sia

$$y = ax + b$$

la retta che interseca la parabola.

Le ascisse dei punti A e B di intersezione tra retta e parabola sono dati dalle soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$x2 = ax + b \tag{5.1}$$

cioè

$$x^2 - ax - b = 0 \tag{5.2}$$

Affinchè ci siano intersezioni dovrà essere

$$\Delta = a^2 + 4b > 0 \tag{5.3}$$

mentre se $\Delta = 0$ la retta risulta tangente alla parabola (due soluzioni coincidenti).

Le soluzioni dell'equazione sono

$$\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \tag{5.4}$$

che sono, come abbiano già osservato le ascisse dei punti di intersezione tra retta e parabola.

È anche utile osservare che la retta $y = ax + b$ è tangente alla parabola se

$$\Delta = a^2 + 4b = 0 \quad \equiv \quad b = -\frac{a^2}{4}$$

ed in tal caso l'ascissa del punto di tangenza M è $\frac{a}{2}$

Possiamo riassumere la situazione come segue:

- A e B sono i punti di intersezione diretta e parabola: le loro ascisse sono
$$x_A = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{e} \quad x_B = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$
- A' e B' sono le proiezioni di A e B sull'asse delle X
- tra le rette parallele alla retta data $y = ax + b$ quella tangente alla parabola è
$$y = ax - \frac{a^2}{4}$$
- M è il punto in cui una retta parallela alla retta data è tangente alla parabola; M' è la sua proiezione sull'asse delle x e risulta essere ilpunto medio del segmento $B'A'$
- P è il punto della retta data di ascissa M'

I calcoli fatti ci permettono di affermare che

$$B'A' = \sqrt{\Delta} \tag{5.5}$$

$$PM = a\frac{a}{2} + b - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + b = \frac{a^2 + b}{4} = \frac{\Delta^2}{4} = \left(\frac{B'A'}{2}\right)^2 \tag{5.6}$$

Una prima approssimazione dell'area del segmento parabolico AMB, sotteso alla corda AB si può ottenere considerando l'area del triangolo AMB.

Consideriamo ora il segmento parabolico sotteso alla corda AM; la retta parallela alla corda AM sarà tangente alla parabola nel punto C la cui ascissa C' è il punto medio del segmento $A'M'$.

Siano ancora Q il punto della corda AM che ha ascissa C', CH l'altezza del triangolo AMC relativa allato AM PK l'altezza del triangolo AMP relativa allo stesso lato AM.

Possiamo verificare che

$$CH = \frac{1}{4}PK \tag{5.7}$$

infatti i triangoli PKM e CHQ sono simili e si ha

$$PM = \left(\frac{B'A'}{2}\right)^2 \tag{5.8}$$

$$QC = \left(\frac{B'M'}{2}\right)^2 = \left(\frac{B'A'}{4}\right)^2 = \left(\frac{B'A'}{2}\right)^2 \frac{1}{4} = \frac{PM}{4} \tag{5.9}$$

Pertanto l'area del triangolo AMC è $\frac{1}{4}$ dell'area AMP (hanno la stessa base ma l'altezza del primo è $\frac{1}{4}$ di quella dell'altro).

Analogo risultato si può ottenere considerando BMD la cui area è $\frac{1}{4}$ dell'area di BMP.

Possiamo allora concludere che una migliore approssimazione dell'area del segmento parabolico si ottiene considerando

$$\text{Area}(AMB) + \text{Area}(AMC) + \text{Area}(BMD)$$

Ma
$\text{Area}(AMB) = \text{Area}(AMP) + \text{Area}(BMP)$
$\text{Area}(AMC) = \frac{1}{4}\text{Area}(AMP)$
$\text{Area}(BMD) = \frac{1}{4}\text{Area}(BMP)$
per cui

$$\text{Area}(AMB)+\text{Area}(AMC)+\text{Area}(BMD) = \text{Area}(AMB)+\frac{1}{4}\text{Area}(AMP)+\frac{1}{4}\text{Area}(BMP) = \text{Ar}$$

Sia $T = \text{Area}(AMB)$, potremo approssimare l'area del segmento parabolico con

$$T \quad , \quad T + \frac{1}{4}T$$

e possiamo ancora migliorare aggiungendo l'area di quattro nuovi triangoli per una superficie complessiva che, gli argomenti precedenti ci permettono di indicare in $\frac{1}{4}\frac{1}{4}T$.

L'approssimazione quindi sarà

$$T \quad , \quad T + \frac{1}{4}T \quad , \quad T + \frac{1}{4}T + \frac{1}{16}T$$

Si capisce quindi come l'area del segmento parabolico sia data da

$$T\sum_{n=0}^{+\infty}(14)^n = T\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = T\frac{4}{3}$$

Che ovviamente coincide con il risultato che possiamo ottenere facendo uso del calcolo integrale.

Si può ancora verificare che

$$PM \cdot M'A' = \left(\frac{B'A'}{2}\right)^2 \frac{B'A'}{2} = \left(\frac{B'A'}{2}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)^3$$

Elenco delle figure

Indice