Qualche Esempio di Processo Markoviano

Giugno 2002

O.Caligaris

Alcuni problemi con caratteristiche comuni

La Rovina del Giocatore

Un Giocatore gioca contro il banco

Ad ogni puntata

- **può vincere 1 gettone con probabilità** p
- **può perdere 1 gettone con probabilità** $q = 1 - p$

Se $p = q$ **il gioco è equo.**

Il giocatore inizia a giocare con n gettoni e si prefigge di continuare a giocare fino a che

- *esaurisce i gettoni di cui dispone*
- *raggiunge il possesso di T gettoni*

Il giocatore abbandona quando rimane senza gettoni oppure quando raggiunge la vincita che si è prefissa.

Previsioni Metereologiche

In una località turistica il tempo si conserva soleggiato da un giorno all'altro 7 volte su 10

Il tempo cambia da piovoso a soleggiato 3 volte su 5.

Oggi è bello.

Il modello di Erhenfest

In due recipienti comunicanti ci sono N molecole di gas.

Si osserva lo stato delle molecole ad intervalli discreti di tempo.

La probabilità che in due successive osservazioni si riscontri che una molecola è passata da un recipiente all'altro è proporzionale al numero di molecole presenti nel recipiente.

Ci chiediamo se è possibile fare previsioni su

- *Le sorti del gioco*
- *Il tempo che farà domani*
- *Quante molecole ci sono, a regime, in ogni recipiente.*

I tre problemi hanno alcune caratteristiche in comune

- *Dipendono da eventi non certi*
  - *Non sappiamo se al prossimo lancio uscirà testa o croce*
    - *Sappiamo soltanto che testa o croce hanno la stessa probabilità di uscire.*

– *Non sappiamo se domani farà bello o brutto tempo*
  * *Sappiamo soltanto che se oggi è bello domani è bello* 7 *volte su* 10.
  * *mentre se oggi è brutto domani è bello* 3 *volte su* 5.

- *Non sappiamo se una molecola si sposterà dal primo al secondo recipiente*
  - *Sappiamo soltanto che da ogni recipiente si sposteranno tante più molecole quante più esso ne contiene.*

- *Possiamo identificare un numero finito di stati*
  - *Il numero di gettoni in possesso di ciascun giocatore*
  - *Le condizioni del tempo in ogni giorno*
  - *Il numero di molecole contenute in ciascuno dei recipienti.*

- *Ogni stato dipende dallo stato precedente*
  - *Il numero di gettoni in possesso del giocatore in un certo istante dipende dal numero di gettoni posseduti nell'istante precedente*
  - *Le condizioni del tempo in ogni giorno dipendono da quelle del giorno precedente*
  - *Il numero di molecole contenuto in ciascuno dei recipienti dipende dal numero di molecole contenute nei recipienti nell'istante precedente.*

Probabilità

Si parla di probabilità quando sono possibili diversi eventi e si è in grado di assegnare ad ognuno di essi un numero compreso tra 0 ed 1 che misuri la frequenza con cui ogni evento accade.

- ***Quando lanciamo una moneta sappiamo che uscirà Testa oppure Croce con una frequenza, se la moneta non è truccata, del 50%***

- ***Quando lanciamo un dado ognuna delle sue facce apparirà 1 volta ogni 6, sempre che non sia truccato.***

- ***Estraendo una carta da un mazzo di 52 abbiamo 4 possibilità su 52 di estrarre un asso***

Situazioni di questo tipo si possono inquadrare in un ambito che prevede

- *Un ambiente in cui si osservano degli eventi*
- *La famiglia degli eventi osservabili*
- *Una misura della probabilità che ciascuno degli eventi accada.*

Consideriamo ad esempio il caso del lancio di due dadi

Identifichiamo l'esito del lancio con la coppia di numeri (i, j) (punteggio) che si leggono sulla faccia superiore del primo e del secondo dado.

Rappresentiamo ciascuna delle 36 possibili uscite (eventi) con il punto del piano cartesiano di coordinate (i, j);

Indichiamo l' evento con $A_{i,j}$

• (1,6)	• (2,6)	• (3,6)	• (4,6)	• (5,6)	• (6,6)
• (1,5)	• (2,5)	• (3,5)	• (4,5)	• (5,5)	• (6,5)
• (1,4)	• (2,4)	• (3,4)	• (4,4)	• (5,4)	• (6,4)
• (1,3)	• (2,3)	• (3,3)	• (4,3)	• (5,3)	• (6,3)
• (1,2)	• (2,2)	• (3,2)	• (4,2)	• (5,2)	• (6,2)
• (1,1)	• (2,1)	• (3,1)	• (4,1)	• (5,1)	• (6,1)

La famiglia degli eventi nel caso del lancio di due dadi

Nel caso di dadi non truccati ogni evento è equiprobabile

$$\mathcal{P}(A_{i,j}) = \frac{1}{36}$$

Se

$$B = A_{1,4} \cup A_{5,6} = \{A_{1,4}, A_{5,6}\}$$

Si presenta l'evento $A_{1,4}$ oppure l'evento $A_{5,6}$. Accettiamo 2 eventi su 36 possibili, quindi

$$\mathcal{P}(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$$

Se vogliamo stimare la probabilità che si presenti uno qualunque degli eventi $A_{i,j}$, cioè se vogliamo stimare la probabilità che si presenti l'evento

$$\mathcal{U} = \{A_{i,j} \, : \, i, j = 1..6\}$$

poichè accettiamo 36 possibilità su 36 possiamo dire che

$$\mathcal{P}(\mathcal{U}) = 1$$

e che $\mathcal{U}$ è l'evento certo.

In generale possiamo parlare di spazio di probabilità finito se è assegnata una famiglia di eventi

$$\mathcal{F} = \{A_i \,:\, i = 1..N\}$$

soddisfacente le seguenti condizioni

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- *Se* $A \in \mathcal{F}$ *Allora* $A^C \in \mathcal{F}$
- *Se* $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ *Allora* $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$
- *Se* $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ *Allora* $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$

ed una funzione

$$\mathcal{P} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$A \in \mathcal{F} \mapsto p(A) \in \mathbb{R}$$

soddisfacente le seguenti condizioni

- $\mathcal{P}(A) \geq 0$
- ***se*** $\mathcal{U} = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \in \mathcal{F}$***, si ha*** $\mathcal{P}(\mathcal{U}) = 1$
- ***se*** $A_1, A_2 \in \mathcal{F} \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ***allora***

$$\mathcal{P}(A_1 \cup A_2) = \mathcal{P}(A_1) + \mathcal{P}(A_2)$$

$\mathcal{P}(A)$ è la probabilità che l'evento A accada.

Avremo che

$$\mathcal{U} = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \in \mathcal{F}$$

$\mathcal{U}$ è l'evento certo

$\mathcal{U}$ è anche l'ambiente in cui si individuano gli eventi possibili.

È assegnato uno spazio di probabilità se è assegnato

- *un insieme* $\mathcal{U}$
- *una famiglia* $\mathcal{F}$ *di sottoinsiemi di* $\mathcal{U}$
- *una funzione* $\mathcal{P}$ *definita su* $\mathcal{F}$ *a valori in* $\mathbb{R}$.

Ci riferiremo quindi ad uno spazio di probabilità come ad un terna $(\mathcal{U}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$

La rovina del Giocatore

Un Giocatore gioca contro il banco

Ad ogni puntata

- *può vincere 1 gettone con probabilità* p
- *può perdere 1 gettone con probabilità* $q = 1 - p$

Se $p = q$ *il gioco è equo: La vincita media è uguale alla somma giocata, la probabilità di vincere e quella di perdere sono uguali*

Esempio

- **Testa o Croce**

$$p = q = \frac{1}{2}$$

- **Rosso e Nero alla roulette Americana**

$$p = \frac{18}{38} = \frac{9}{19} \ , \ \ q = \frac{20}{38} = \frac{10}{19}$$

- **Rosso e Nero alla roulette Europea**

$$p = \frac{18}{37} \ , \ \ q = \frac{19}{37}$$

Il giocatore inizia a giocare con n gettoni e si prefigge di continuare a giocare fino a che

- *esaurisce i gettoni di cui dispone*
- *raggiunge il possesso di T gettoni*

L'esito del gioco è pertanto limitato a due possibilità:

Il giocatore finisce con 0 gettoni oppure il giocatore finisce con T gettoni

Chiaramente

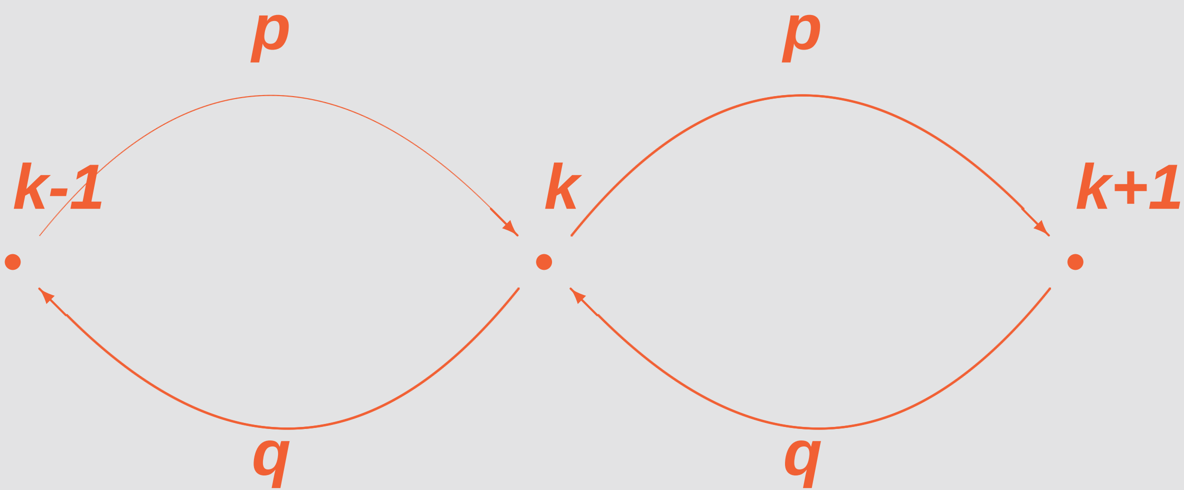
- *il giocatore può passare*

  da k *gettoni a* $k+1$ *gettoni con probabilità* p

  e

  da k *gettoni a* $k-1$ *gettoni con probabilità* q

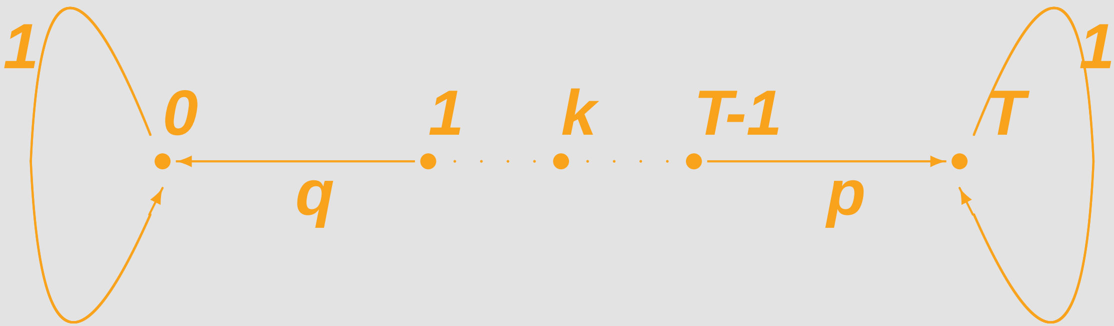
Possiamo schematizzare la situazione come segue



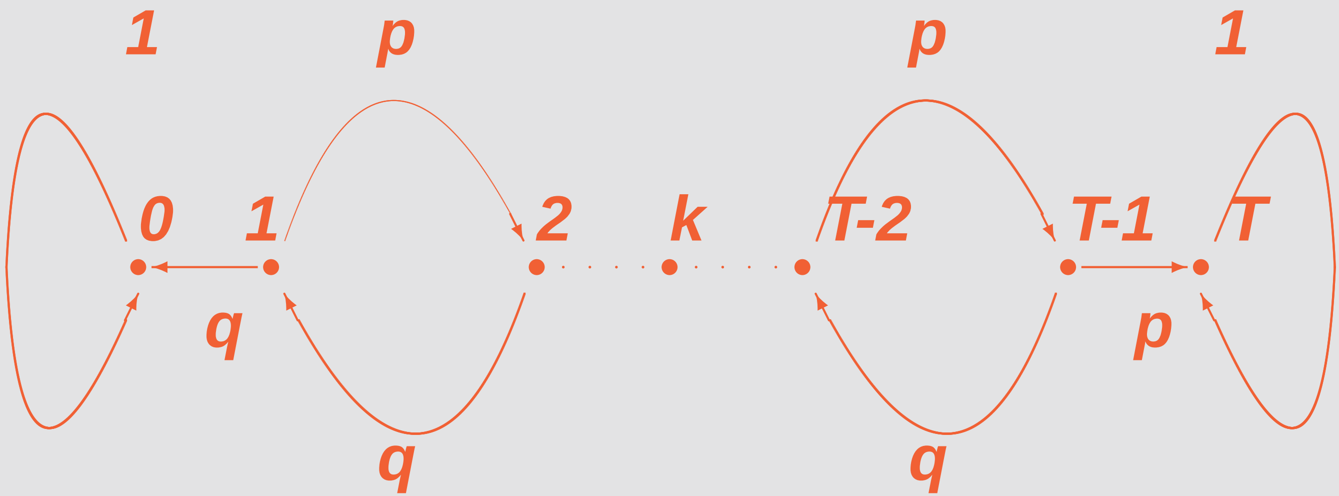
Inoltre

- Se il giocatore possiede 0 gettoni (è rovinato), non può più giocare e rimane a 0 gettoni con probabilità 1.
- se il giocatore possiede T gettoni (ha raggiunto il suo scopo), smette di giocare e rimane a T gettoni con probabilità 1.

Possiamo schematizzare la situazione come segue



Il processo può essere schematizzato come segue



Supponiamo il gioco equo:

$$p = q = \frac{1}{2}$$

Sia w_k la probabilità che il giocatore ha di vincere, cioè di finire con T gettoni, nel momento in cui possiede k gettoni

$$w_0 = 0$$

$$w_T = 1$$

$$w_k = \frac{1}{2}w_{k+1} + \frac{1}{2}w_{k-1}$$

Pertanto w_k soddisferà la seguente regola di ricorrenza

$$\begin{cases} w_{k+1} = 2w_k - w_{k-1} \\ w_0 = 0 \\ w_T = 1 \end{cases}$$

Si ha

$$
\begin{aligned}
0 = w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1} &= \\
&= w_{k+1} - w_k - w_k + w_{k-1} = \\
&= (w_{k+1} - w_k) - (w_k - w_{k-1})
\end{aligned}
$$

e posto $d_k = w_{k+1} - w_k$

$$
\begin{aligned}
0 = w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1} &= \\
&= d_k - d_{k-1}
\end{aligned}
$$

Ne deduciamo che

$$d_k = d_{k-1}$$

e pertanto d_k è costante per ogni k

$$d_k = A$$

Allora

$$w_k - w_{k-1} = A$$

e

$$w_k = w_{k-1} + A$$

Partendo da w_0 ed iterando avremo

$$w_1 = w_0 + A$$

$$w_2 = w_1 + A = w_0 + 2A$$

$$w_3 = w_2 + A = w_0 + 3A$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$w_k = w_0 + kA$$

Poichè

$$w_0 = 0 \quad \text{e} \quad w_T = 1$$

si ha

$$w_k = \frac{k}{T}$$

La probabilità di raggiungere lo scopo è alta solo se il capitale iniziale e la vincita che si vuole raggiungere differiscono di poco.

Ad esempio la probabilità di raddoppiare la somma iniziale è $\frac{1}{2}$, mentre la probabilità di triplicare la somma iniziale è $\frac{1}{3}$.

Più alta è la somma che si vuole raggiungere più è bassa la probabilità di avere successo nel tentativo.

La situazione già in queste condizioni non è molto felice.

Tuttavia peggiora considerevolmente se il gioco non è equo.

Supponiamo che la probabilità di vincita p sia minore della probabilità di perdita q.

In tal caso

$$w_0 = 0$$

$$w_T = 1$$

$$w_k = p w_{k+1} + q w_{k-1}$$

Pertanto w_k soddisferà la seguente regola di ricorrenza

$$
\begin{cases}
w_{k+1} = \frac{1}{p} w_k - \frac{q}{p} w_{k-1} \\
w_0 = 0 \\
w_T = 1
\end{cases}
$$

Si ha

$$
\begin{aligned}
0 = w_{k+1} - \frac{1}{p}w_k + \frac{q}{p}w_{k-1} = \\
&= w_{k+1} - w_k + w_k - \frac{1}{p}w_k + \frac{q}{p}w_{k-1} = \\
&= w_{k+1} - w_k + \left(1 - \frac{1}{p}\right) w_k + \frac{q}{p}w_{k-1} = \\
&= w_{k+1} - w_k - \left(\frac{1-p}{p}\right) w_k + \frac{q}{p}w_{k-1} = \\
&= w_{k+1} - w_k - \frac{q}{p}w_k + \frac{q}{p}w_{k-1} = \\
&= w_{k+1} - \frac{q}{p}w_k - \left[w_k - \frac{q}{p}w_{k-1}\right]
\end{aligned}
$$

e posto

$$z_k = w_{k+1} - \frac{q}{p} w_k$$

$$\begin{aligned} 0 &= w_{k+1} - \frac{1}{p} w_k + \frac{q}{p} w_{k-1} = \\ &= w_{k+1} - \frac{q}{p} w_k - \left[w_k - \frac{q}{p} w_{k-1} \right] = \\ &= z_k - z_{k-1} \end{aligned}$$

Ne deduciamo che

$$z_k = z_{k-1}$$

e pertanto z_k è costante per ogni k

$$z_k = A$$

Allora

$$w_{k+1} - \frac{q}{p} w_k = A$$

e

$$w_{k+1} = \frac{q}{p} w_k + A$$

Partendo da w_0 ed iterando avremo

$$w_1 = \frac{q}{p} w_0 + A$$

$$w_2 = \frac{q}{p} w_1 + A = \left(\frac{q}{p}\right)^2 w_0 + A\left(1 + \frac{q}{p}\right)$$

$$w_3 = \frac{q}{p} w_2 + A = \left(\frac{q}{p}\right)^3 w_0 + A\left(1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$w_k = \left(\frac{q}{p}\right)^k w_0 + A\left(1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1}\right) =$$

$$= \left(\frac{q}{p}\right)^k w_0 + A\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)}$$

Poichè

$$w_0 = 0 \quad \textbf{\textit{e}} \quad w_T = 1$$

si ha

$$w_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^T - 1}$$

Se

$$\frac{q}{p} = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}$$

partendo con 10 ***gettoni la probabilità di vincere*** 20 ***gettoni è***

$$w_{10} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{10} - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{20} - 1} = .2585\ldots$$

Tuttavia partendo da 500 gettoni la probabilità di vincere 600 gettoni è molto bassa infatti poichè si può verificare che

Se $0 < a < b$ allora

$$\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$$

(Infatti $ab + a < ab + b$)

si ha

$$w_k < \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^T} = \left(\frac{q}{p}\right)^{k-T} = \left(\frac{p}{q}\right)^{T-k}$$

e quindi la probabilità di vincere 100 ***gettoni è inferiore a***

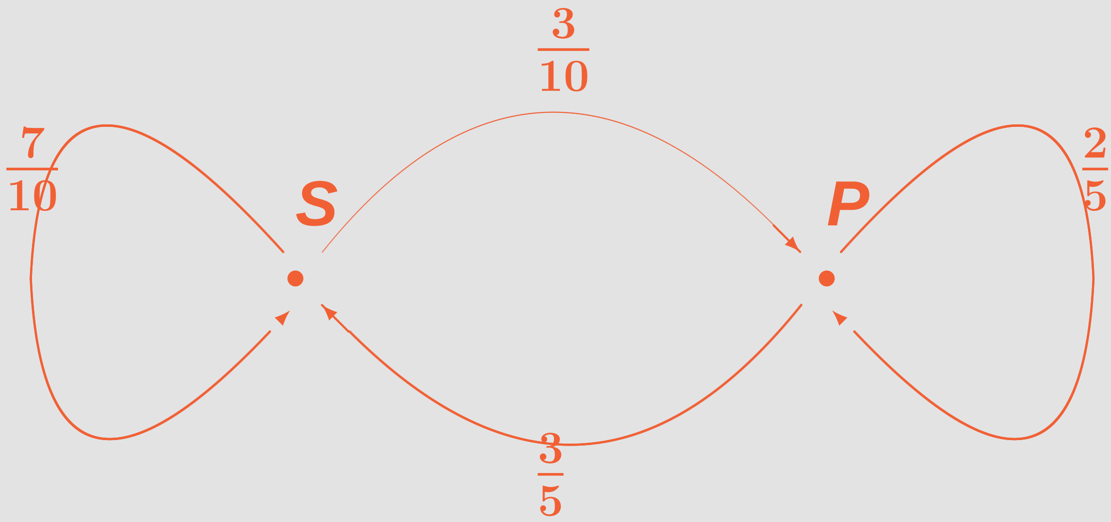
$$\left(\frac{p}{q}\right)^{100} < \frac{1}{37648}$$

Previsioni metereologiche

In una località turistica il tempo atmosferico può essere descritto come segue:

- *ad un giorno soleggiato, ne segue uno soleggiato 7 volte su 10*
- *ad un giorno piovoso, ne segue uno soleggiato 3 volte su 5*

Possiamo schematizzare la situazione come segue



Se indichiamo con S_n la probabilità che il giorno n sia Soleggiato e con P_n la probabilità che il giorno n sia Piovoso, avremo che

$$\boldsymbol{S_{n+1} = \frac{7}{10}S_n + \frac{3}{5}P_n}$$
$$\boldsymbol{P_{n+1} = \frac{3}{10}S_n + \frac{2}{5}P_n}$$

Osserviamo che

$$S_{n+1} + P_{n+1} = S_n + P_n = 1$$

Pertanto

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{7}{10} S_n + \frac{3}{5}(1 - S_n) = \\ &= \frac{1}{10} S_n + \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Quindi

$$S_1 = \frac{1}{10}S_0 + \frac{3}{5}$$

$$S_2 = \frac{1}{10}S_1 + \frac{3}{5} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}S_0 + \frac{3}{5}\right) + \frac{3}{5} =$$

$$= \left(\frac{1}{10}\right)^2 S_0 + \left(1 + \frac{1}{10}\right)\frac{3}{5}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_k = \left(\frac{1}{10}\right)^k S_0 + \left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}\right)\frac{3}{5} =$$

$$= \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^k}{1 - \frac{1}{10}}\right)\frac{3}{5}$$

Se k è grande possiamo trascurare il termine $\left(\frac{1}{10}\right)^k S_0$

e possiamo concludere che a regime la probabilità di avere una giornata soleggiata è

$$\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right)\frac{3}{5}=\frac{2}{3}$$

Il Modello di Erhenfest

Due recipienti comunicanti contengono N molecole di gas.

Lo stato dei recipienti è verificato ad intervalli regolari di tempo e in ogni istante si ha che

una molecola passa dal recipiente A al recipiente B con probabilità proporzionale al numero di molecole contenute in A

Se N_A ed N_B sono il numero di molecole contenute in A o in B rispettivamente

- *la Probabilità che una molecola passi da A a B è*

$$\frac{N_A}{N}$$

- *la Probabilità che una molecola passi da B ad A è*

$$\frac{N_B}{N}$$

Possiamo identificare lo stato del sistema assegnando ad ogni molecola la cifra 1 o la cifra 0 a seconda che la molecola sia contenuta nel recipiente A o nel recipiente B.

In questo modo lo stato del sistema è associato ad un numero binario di N cifre.

Nel recipiente A avremo tante molecole quanti sono i numeri binari di N cifre con k cifre uguali ad 1.

Per scrivere un numero binario di N cifre con k cifre uguali ad 1 abbiamo

- ***N possibilità per collocare il primo 1***
- ***$N-1$ possibilità per collocare il secondo 1***
- ***$N-2$ possibilità per collocare il terzo 1***
- ***..................................***
- ***$N-k+1$ possibilità per collocare il k-esimo 1***

Possiamo in questo modo operare un numero di scelte pari a

$$N(N-1)(N-2)\cdots(N-k+1)$$

Tuttavia alcune scelte forniscono la stessa combinazione di 1 e 0:

Per $N = 12, \quad k = 3$ la combinazione

0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0

Si può ottenere:

- ***occupando il terzo posto con*** 1 ***alla prima scelta***
- ***occupando il sesto posto con*** 1 ***alla seconda scelta***
- ***occupando il settimo posto con*** 1 ***alla terza scelta***

0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0

0	0	1	0	0	2	3	0	0	0	0	0

oppure

- *occupando il sesto posto con* 1 *alla prima scelta*
- *occupando il terzo posto con* 1 *alla seconda scelta*
- *occupando il settimo posto con* 1 *alla terza scelta*

0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0

0	0	2	0	0	1	3	0	0	0	0	0

O in altri modi ancora.

Gli stati possibili quindi saranno molti di meno:

Dovremo dividere

$$N(N-1)(N-2)\cdots(N-k+1)$$

per il numero di modi con cui si possono disporre k cifre 1 in k posti.

Per contare i modi possibili possiamo osservare ancora che nel disporre k oggetti in k posizioni abbiamo

$$k(k-1)(k-2)\cdots 3\,2\,1 = k!$$

possibilità

Pertanto possiamo concludere che

Il numero di modi possibili per collocare k cifre 1 in N posizioni è dato da

$$\frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-k+1)}{k!} = \binom{N}{k}$$

$\binom{N}{k}$ ***si chiama coefficiente binomiale e possiamo calcolare che***

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Le configurazioni che prevedono k molecole in uno dei due recipienti sono in numero di

$$\frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Il numero totale delle configurazioni possibili è

$$2^N$$

(Per ognuna delle molecole abbiamo due possibilità: ogni cifra può essere 0 od 1 e le cifre disponibili sono N)

Pertanto ogni configurazione avviene con probabilità

$$\frac{1}{2^N}$$

e la probabilità che in uno dei due recipienti ci siano k molecole è

$$P_k = \frac{1}{2^N}\frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Possiamo verificare che, al variare di k, il valore massimo per P_k si ottiene in corrispondenza di $k = N/2$.

Infatti

$$P_k = \frac{1}{2^N}\frac{N!}{k!(N-k)!} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^N}\frac{N!}{(k+1)!(N-(k-1))!} = P_{k+1}$$

$$\frac{1}{N-k} \leq \frac{1}{k+1}$$

$$k+1 \leq N-k$$

$$2k \leq N-1$$

$$k \leq \frac{N-1}{2}$$

Possiamo mettere in evidenza quest'ultimo fatto osservando che il massimo di P_k *si ottiene quando*

$$\binom{N}{k}$$

è massimo

$$\binom{N}{k}$$

si può calcolare usando il triangolo di Tartaglia osservando il quale è evidente la correttezza dell'affermazione che il massimo si ha per

$$k = \frac{N}{2}$$

$$
\begin{array}{llllll}
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\cdots & \cdots\cdots & & & \cdots\cdots & \\
\binom{n}{0} & \cdots & \binom{n}{k-1} & & \binom{n}{k} \cdots & \binom{n}{n} \\
\cdots & \cdots\cdots & & \binom{n+1}{k} & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots\cdots & & & \cdots\cdots & \cdots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$