Leggi del Moto e Simmetria

Nino Zanghì

Dipartimento di Fisica dell'Università di Genova
Facoltà di Ingegneria - Polo di Savona

Cogne, Giugno 2002

Argomenti delle lezioni

1 Le Leggi del moto

“Secondo il sistema di Newton il reale fisico è caratterizzato dai concetti di spazio, di tempo, di punto materiale, di forza (equivalente all’azione reciproca tra punti materiali). I fenomeni fisici devono intendersi, secondo Newton, come movimenti di punti materiali nello spazio, movimenti retti da leggi. Il punto materiale è l’unico rappresentante del reale... I corpi percettibili hanno manifestamente dato origine all’idea del punto materiale; si è immaginato il punto materiale come l’analogo dei corpi mobili, privo dei caratteri di forma, estensione, orientamento nello spazio, di tutte le proprietà intrinseche, insomma, all’infuori dell’inerzia e della traslazione e introducendovi l’idea di forza. Questi corpi materiali che hanno provocato psicologicamente la formazione del concetto “punto materiale”, dovevano quindi, a loro volta, essere considerati sistemi di punti materiali. ” (A. Einstein, *Come io vedo il mondo)*

1.1 Punti materiali

Un corpo è formato da tantissimi atomi ($\sim 10^{23}$)

Un corpo appare come un punto materiale se guardato da lontano...

...ad esempio, un pianeta o una stella...

Il sistema Sole-Terra-Luna

raggio del Sole: $6,96 \times 10^8$ m

raggio della Terra: $6,37 \times 10^6$ m

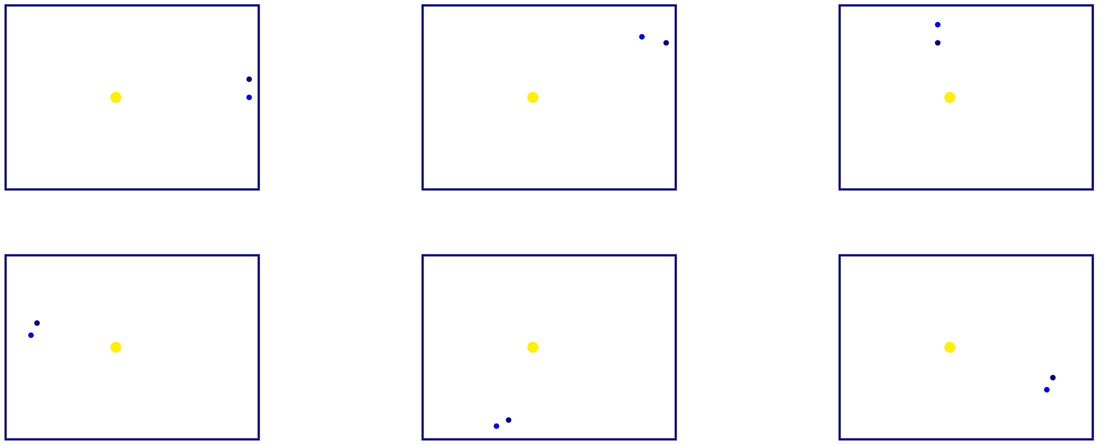
raggio della Luna: $1,74 \times 10^6$ m

distanza Terra-Sole: $1,49 \times 10^{11}$ m

distanza Terra-Luna: $3,84 \times 10^8$ m

1.2 Il movimento

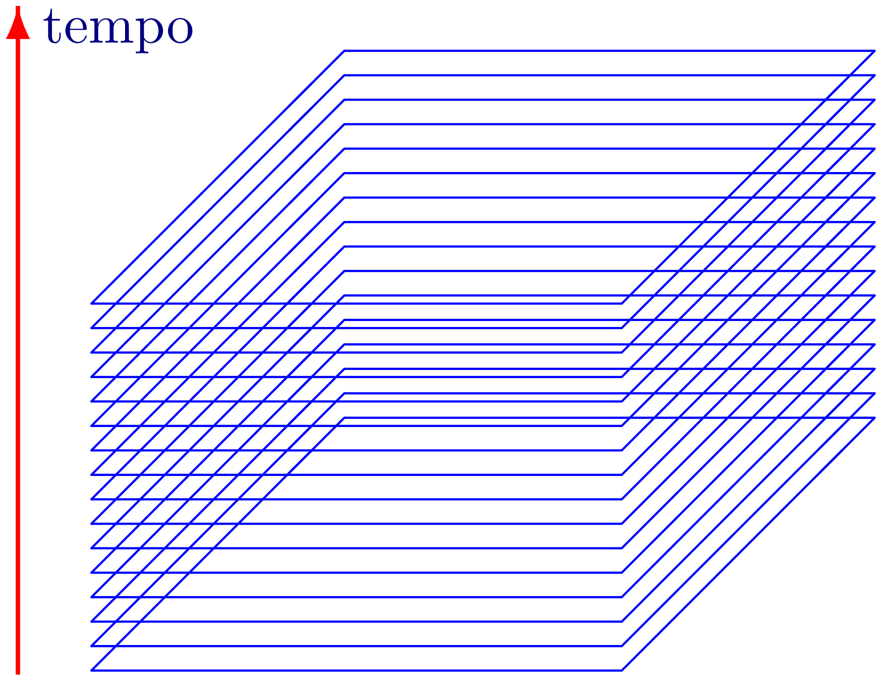
Metafora del movimento: il cinema...



Ogni fotogramma rappresenta la configurazione del sistema Terra-Sole-Luna ad un dato istante.

In generale, la configurazione dell'universo ad ogni istante è un insieme di punti nello spazio 3-dimensionale (3-spazio)

Incolliamo i fotogrammi 3-dimensionali e formiamo così un oggetto 4-dimensionale



Ogni Σ ha un numero: il tempo in cui è stata scattata la fotografia: $\Sigma_0, \Sigma_\tau, \Sigma_{2\tau}, \ldots$ (τ è l'intervallo di tempo tra due scatti consecutivi)

Due problemi:

- Come misuriamo il tempo?

Con un orologio, cioè facendo riferimento ad un fenomeno fisico (un movimento) regolare.

Ad esempio, quando diciamo che il tizio ha percorso 8 Km in 1 ora intendiamo che mentre il tizio ha percorso 8 Km il sole si è spostato nel cielo di 15^o.

Sembra un gatto che si morde la coda: per spiegare il movimento ci basiamo sul movimento! (la differenza tra scienza e mito è sottile: "Perchè il mare è agitato?" "Perchè Nettuno è arrabbiato!" "E come fai a sapere che Nettuno è arrabbiato?" "Ma non vedi come è agitato il mare!")

- Come identifichiamo due Σ consecutivi?

Al punto P di Σ_t quale punto di $\Sigma_{t+\tau}$ associamo?

1.3 Lo Spazio-Tempo di Newton

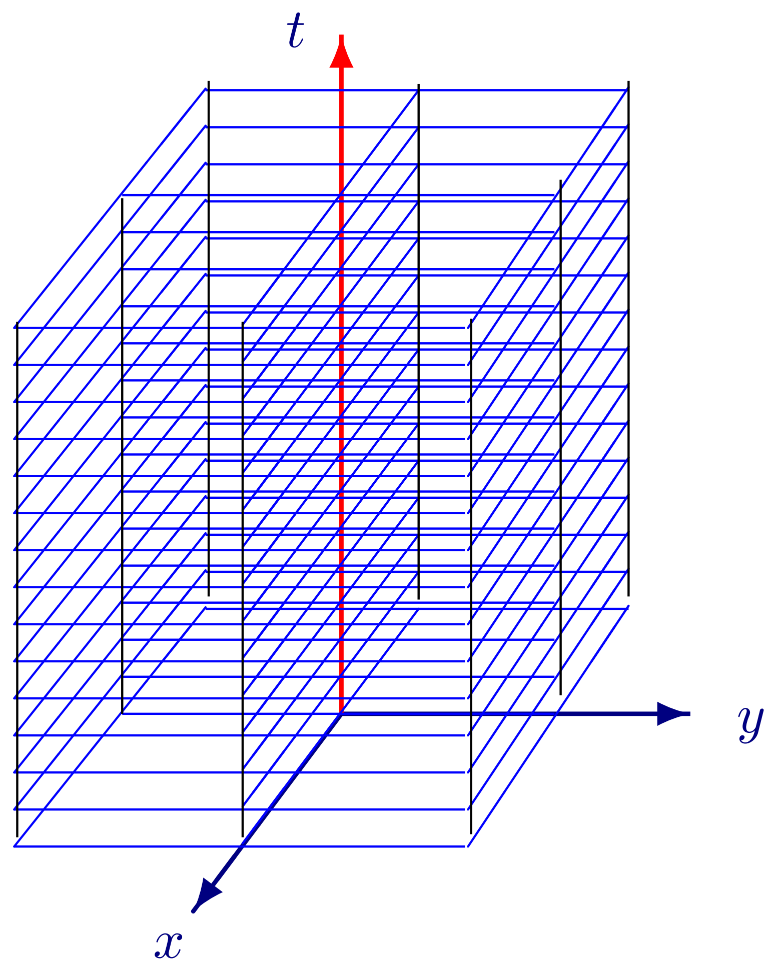
1) - *"Il tempo assoluto vero e matematico senza alcuna relazione a nulla di esteriore, scorre uniformemente..."*

2) - *"Lo spazio non relativo alle cose esterne, rimane sempre simile ed immobile..."*

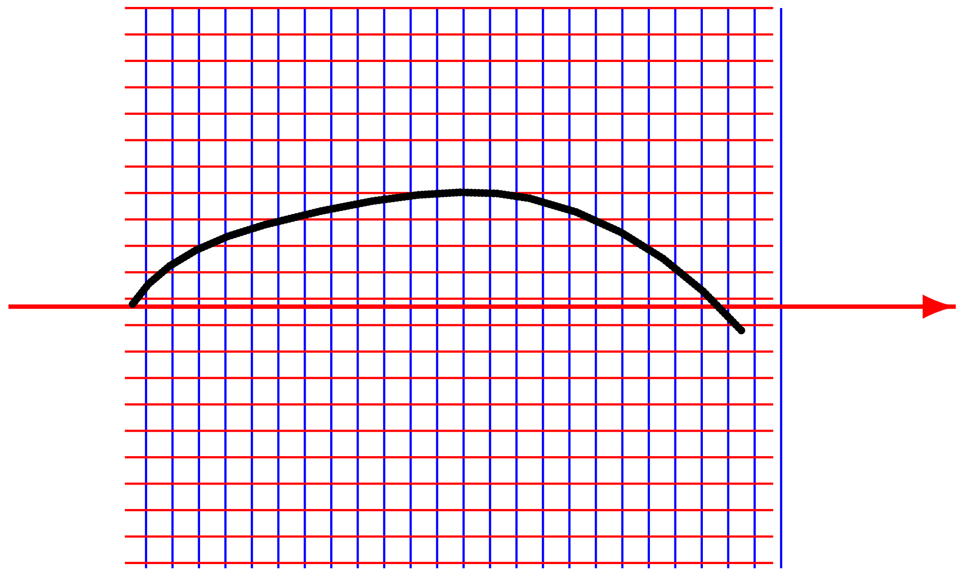
1) definisce il tempo e 2) fornisce un crierio per identificare i 3-spazi e formare così lo spazio-tempo newtoniano...

Secondo Poincaré il tempo assoluto è quella variabile che più semplifica la descrizione del movimento.

...un mazzo di carte con i fili neri (le linee di universo di punti in uno stato assoluto di quiete) che “cuciono” le carte tra loro e rendono rigida la struttura



Rovesciando l'asse del tempo e rappresentando il 3-spazio come se fosse 1-dimensionale otteniamo



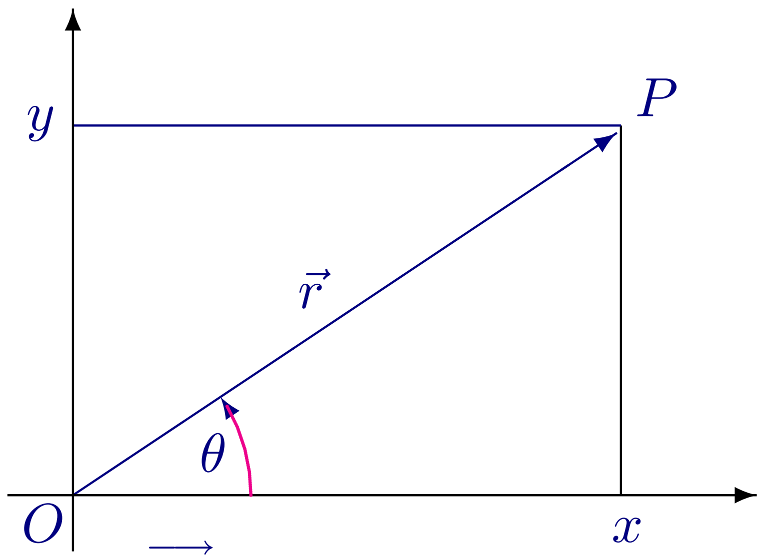
La curva nera rappresenta il movimento di un punto materiale (legge oraria del punto $\equiv$ linea di universo del punto)

Nello spazio reale 3-dimensionale descriviamo il moto rispetto ad un sistema di riferimento...

1.4 Sistemi di riferimento

(x, y) coordinate cartesiane (nel piano) del punto P

(r, θ) coordinate polari



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

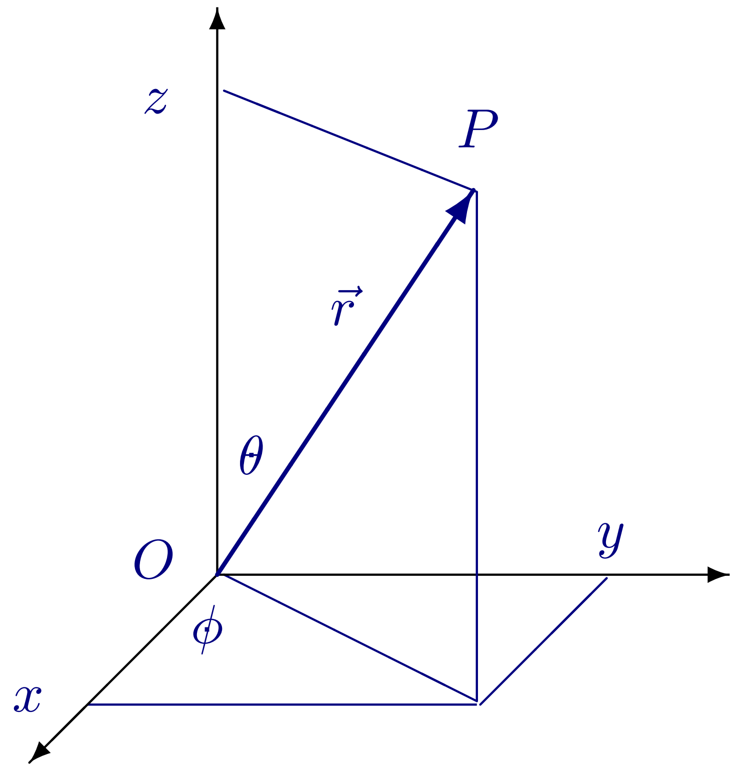
$$x = r \cos\theta$$

$$y = r \sin\theta$$

vettore $\overrightarrow{OP} = \vec{r} = (x, y)$, x e y sono le componenti del vettore rispetto al sistema di riferimento (assi cartesiani ortogonali)

- norma o modulo del vettore $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- vettore unitario nella direzione e verso di $\vec{r}$ (versore) : $\vec{e}_r = \dfrac{\vec{r}}{r}$

analogamente nello spazio: $P \equiv (x, y, z) \equiv (r, \theta, \phi)$



vettore $\quad \overrightarrow{OP} = \vec{r} = (x, y, z)$

norma o modulo del vettore $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

vettore unitario nella direzione e verso di $\vec{r}$ (versore) : $\quad \vec{e}_r = \dfrac{\vec{r}}{r}$

1.5 Esempi di leggi orarie

La legge oraria di P è data dalle funzioni

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

che rappresentano le coordinate di P al variare del tempo t

Es.1. Moto rettilineo uniforme lungo x

$$x = vt + x_0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

Es.2. Caduta di un grave lungo y con velocità uniforme lungo x

$$x = vt, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2, \quad z = 0$$

Es.3. Moto circolare uniforme nel piano $x - y$

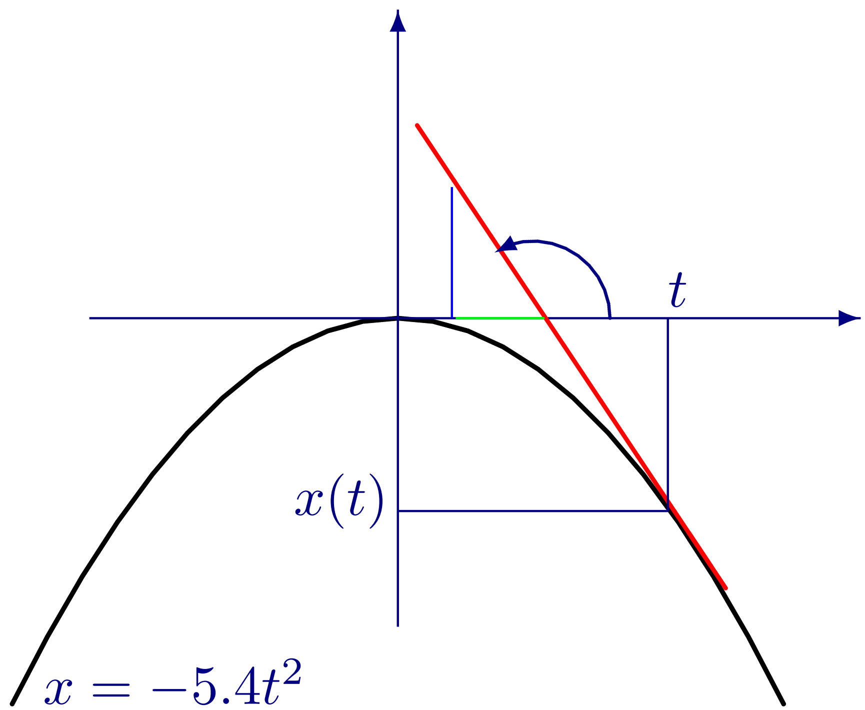
$$x = A\cos(\omega t), \quad y = A\sin(\omega t), \quad z = 0$$

1.6 La nozione di derivata

$x = x(t)$: posizione del punto in funzione del tempo t

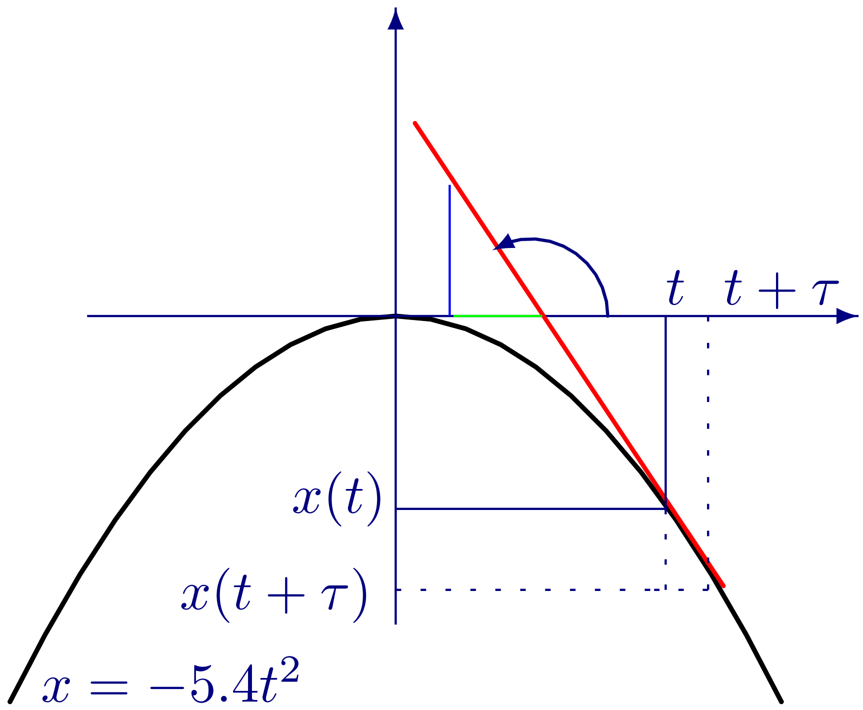
$v = v(t)$: velocità = derivata della funxione $x = x(t) =$

$=$ pendenza della retta tangente alla curva $x = x(t)$ al tempo t



$$v(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{x(t+\tau) - x(t)}{\tau} \equiv \dot{x}(t)$$

(notazione per la derivata)



accelerazione = derivata della velocità

$$a = a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$$

Altre notazioni per la derivata

$$x'(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt} \equiv (Dx)(t)$$

Regole di calcolo:

- Calcolare
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\tau) - x(t)}{\tau}$$
- Semplificare $\Delta x/\Delta t$ tenendo conto che τ è "piccolo": ad es. porre $\tau + \tau^2 = \tau$ ($10^{-6} + 10^{-12} = 10^{-6}$ per tutti gli scopi pratici)
- Dopo le semplificazioni porre $\tau = 0$.

Esempi

$x = vt$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{vt + v\tau - vt}{\tau} = v$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{x} = v \qquad \ddot{x} = 0$$

$y = -\frac{1}{2}gt^2$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = -\frac{1}{2}g\frac{(t+\tau)^2 - t^2}{\tau}$$

$$= -\frac{1}{2}g(2t+\tau) \to -\frac{1}{2}g(2t)$$

$$= -gt$$

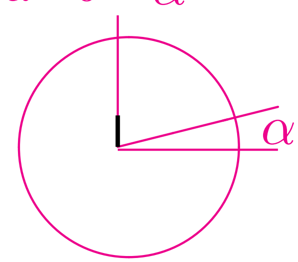
$$\Rightarrow \qquad \dot{y} = -gt \qquad \ddot{y} = -g$$

Moto circolare uniforme: $x = A\cos(\omega t), \quad y = A\sin(\omega t)$

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ velocità angolare costante; T periodo del moto

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = A\frac{\cos(\omega t + \omega\tau) - \cos(\omega t)}{\tau}$$
$$= A\frac{\cos(\omega t)\cos(\omega\tau) - \sin(\omega t)\sin(\omega\tau) - \cos(\omega t)}{\tau}$$
$$\to A\frac{\cos(\omega t) - \sin(\omega t)\sin(\omega\tau) - \cos(\omega t)}{\tau}$$
$$= -A\sin(\omega t)\frac{\sin(\omega\tau)}{\tau} = -A\omega\sin(\omega t)\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau}$$
$$\to -A\omega\sin(\omega t)$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$$



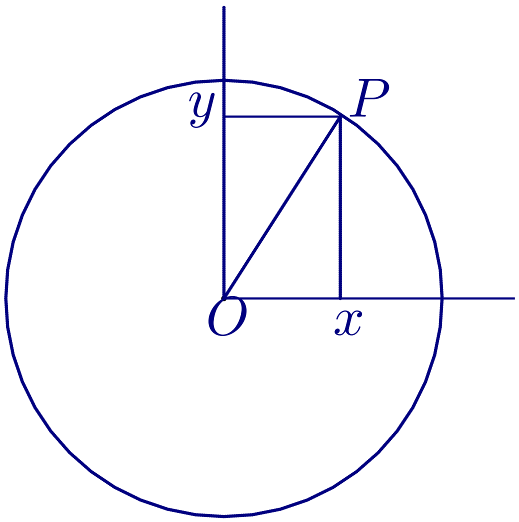
$$\Rightarrow \qquad \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t)$$

In maniera analoga si trova $\quad \dot{y} = A\omega\cos(\omega t)$

Quache osservazione sul moto circolare uniforme

- Il modulo del vettore posizione $\vec{r} = (x, y)$ è costante

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = A = \text{costante}$$



- Il modulo del vettore velocità $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y})$ è costante

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \omega A = \omega r$$

- La direzione della velocità cambia nel tempo... c'è accelerazione

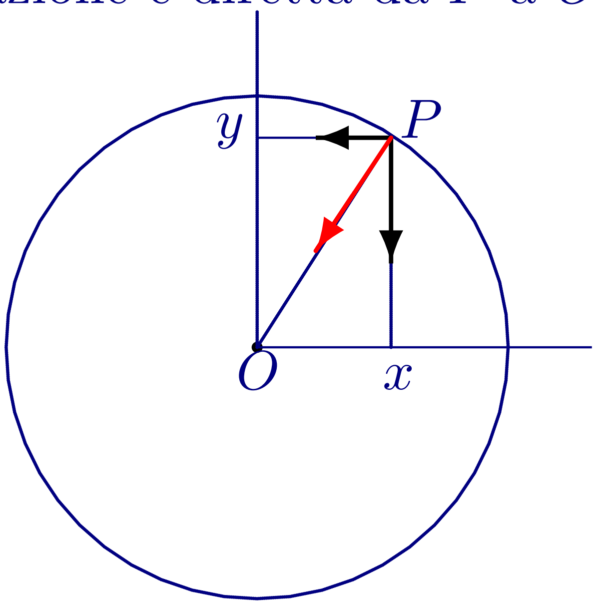
• Il vettore accelerazione $\vec{a} = (\ddot{x}, \ddot{y})$ ha componenti

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \qquad \ddot{y} = -\omega^2 y$$

$\Rightarrow$ il moto circolare uniforme è la composizione di due moti armonici

• $$\vec{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}) = -\omega^2 \vec{r} = -\omega r \vec{e}_r$$

$\Rightarrow$ l'accelerazione è diretta da P a O



• modulo dell'accelerazione

$$a = |\vec{a}| = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

1.7 Le leggi del moto

A) (I LEGGE) "Ogni corpo continua nel suo stato di quiete o di moto uniforme lungo una linea retta a meno che non sia costretto a cambiare tale stato da una forza F esercitata su di esso."

B) (II LEGGE)

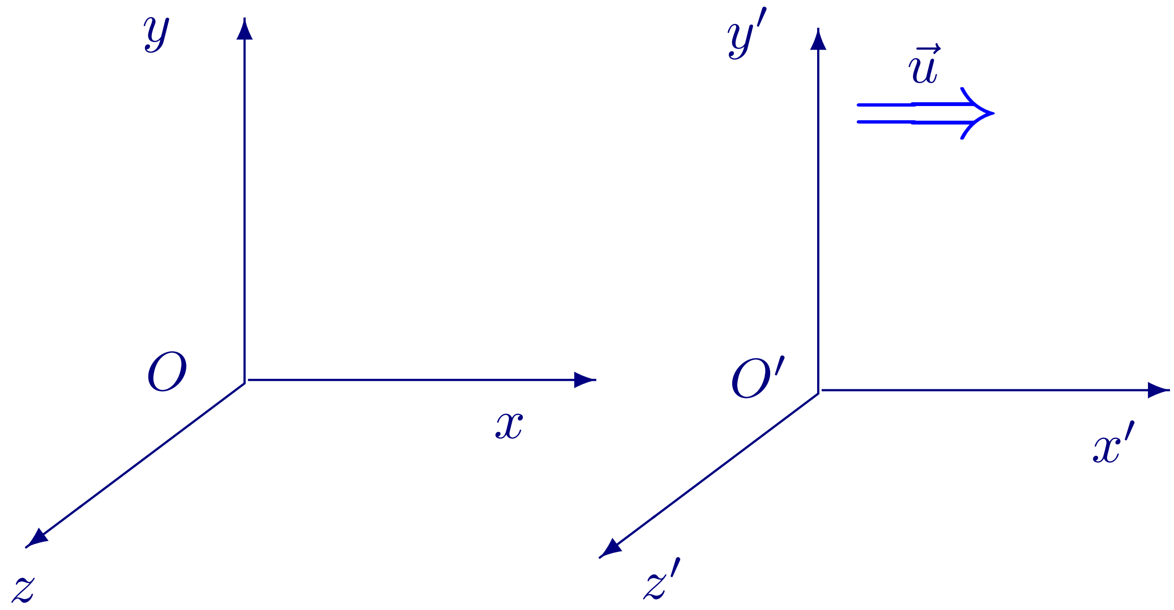
$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}$$

C) (III LEGGE)

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

- m è la massa del corpo
- F è una funzione della posizione del corpo (punto materiale) e della posizione di tutti i punti materiali che agiscono sul corpo

Sistema di riferimento inerziale: sistema di riferimento "rigido" che si muove con velocità costante rispetto allo spazio assoluto



Le leggi del moto sono le stesse in ogni sistema di riferimento inerziale (impossibilità di misurare la velocità assoluta di un sistema di riferimento inerziale)

La seconda legge di Newton è una legge "differenziale", nel senso che confronta lo stato di moto del punto ad un dato istante con un istante infinitamente vicino

$$m\ddot{\vec{r}} = F(\vec{r}, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \qquad (*)$$

equivalentemente

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \vec{v} \\ m\dot{\vec{v}} &= F(\vec{r}, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \end{aligned}$$

stesse equazioni per $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$

.. dalle leggi particolari di Keplero ($\longrightarrow$), per il moto dei pianeti intorno al Sole, a quelle generali di Newton, valide per **qualsiasi** moto...

Fissate le posizioni e le velocità ad un tempo "iniziale" $(*)$ determina univocamente il movimento del punto materiale e di tutti i punti materiali con cui interagisce

1.8 La Forza Gravitazionale

Le leggi di Keplero

1. I pianeti percorrono orbite ellittiche di cui il sole occupa uno dei due fuochi.

2. Il raggio vettore diretto dal sole verso un pianeta descrive aree uguali in tempi uguali

3. Il periodo di rivoluzione $T \propto L^{3/2}$ (L asse maggiore dell'ellisse)

Nel caso particolare di moto circolare Keplero $\Longrightarrow$

1. Il pianeta si muove lungo una circonferenza di raggio r con il Sole nel centro

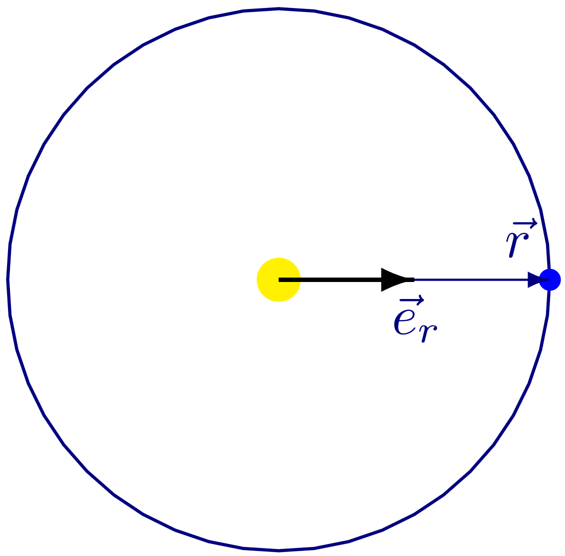
2. Il pianeta si muove di moto circolare uniforme con velocità angolare costante $\omega = 2\pi/T$

3. $T \propto r^{3/2} \implies \omega^2 = \dfrac{k}{r^3}$, dove k è la stessa per tutti i pianeti

La Legge di Gravitazione Universale

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r \qquad \text{(Newton)}$$

$\vec{e}_r = \dfrac{\vec{r}}{r}$ (versore dal Sole alla Terra)



Perchè $1/r^2$?

1) Keplero $\Rightarrow$ Newton

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r$$

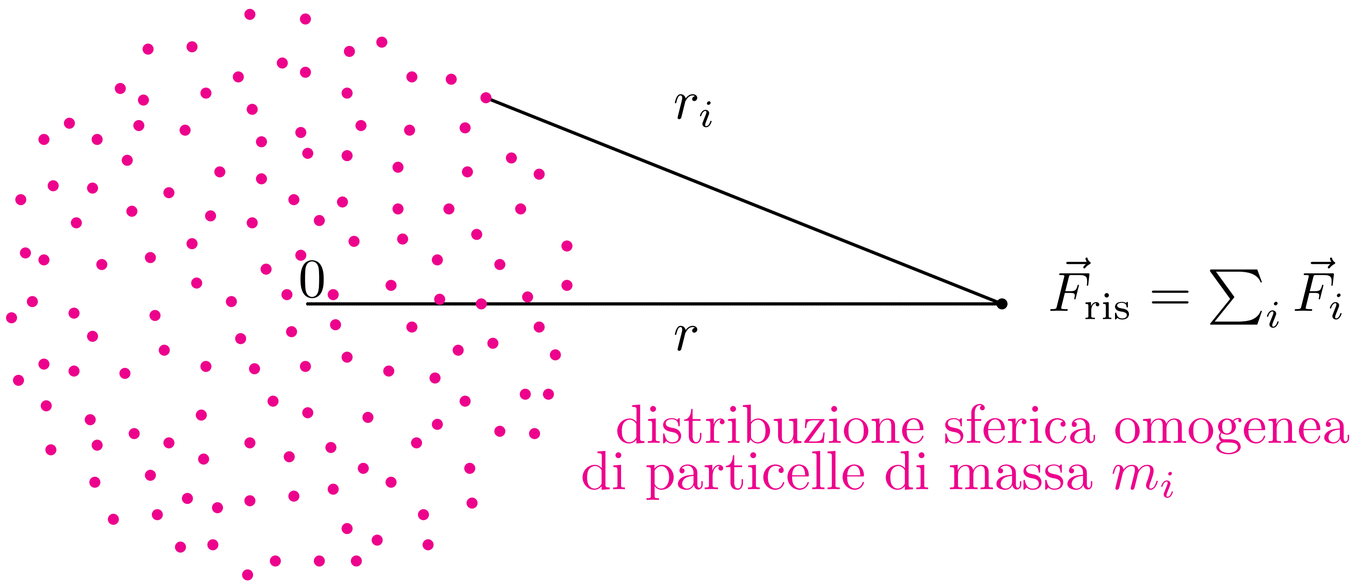
accelerazione centripeta $\quad a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = k\frac{1}{r^2}$

$$\Longrightarrow \quad F = ma = k\frac{km}{r^2}$$

dove k dipende solo dal sole ($k = GM$)

2) Newton $\Rightarrow$ Keplero

3)Teorema di Newton (noto anche come teorema di Gauss)



Se

$$\vec{F}_i \propto \frac{m_i}{r_i^2}\,\vec{e}_{r_i}$$

allora

$$\vec{F}_{\rm ris} = \sum_i \vec{F}_i \propto \frac{M}{r^2}\,\vec{e}_r \quad \text{dove} \quad M = \sum_i m_i$$

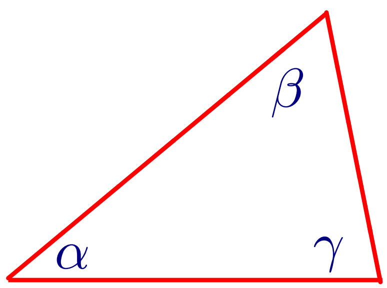
2 Simmetria e Leggi fisiche

Una cosa è simmetrica se è possibile cambiare in essa qualche cosa lasciandone immutato l'aspetto (Hermann Weyl).

Incominciamo con le simmetrie di ciascuna carta del mazzo...

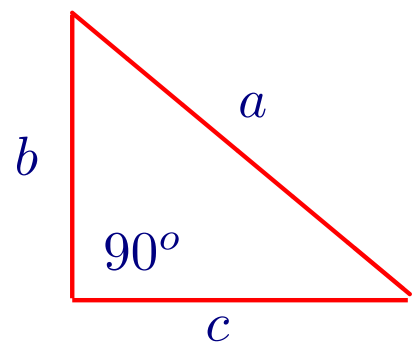
... che sono gli assiomi e i teoremi della geometria euclidea

Esempi:



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^o$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

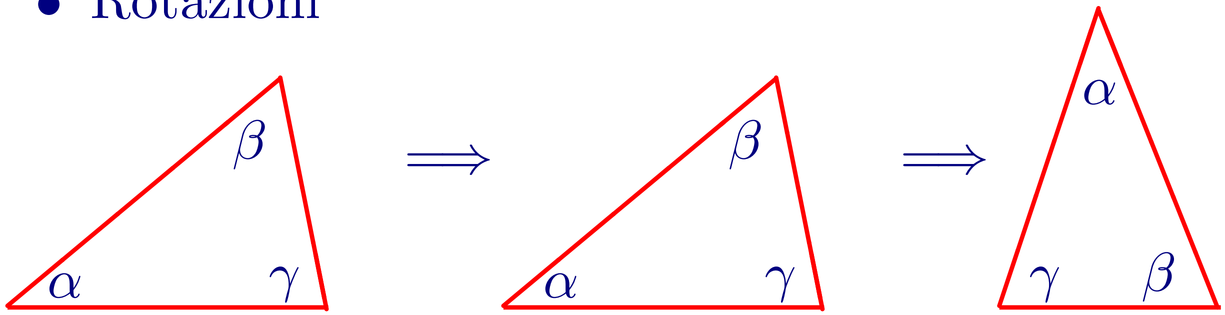


"La fisica teorica incomincia con la geometria di Euclide... (Einstein)

2.1 Simmetrie dello spazio euclideo

Le leggi della geometria euclidea sono invarianti per:

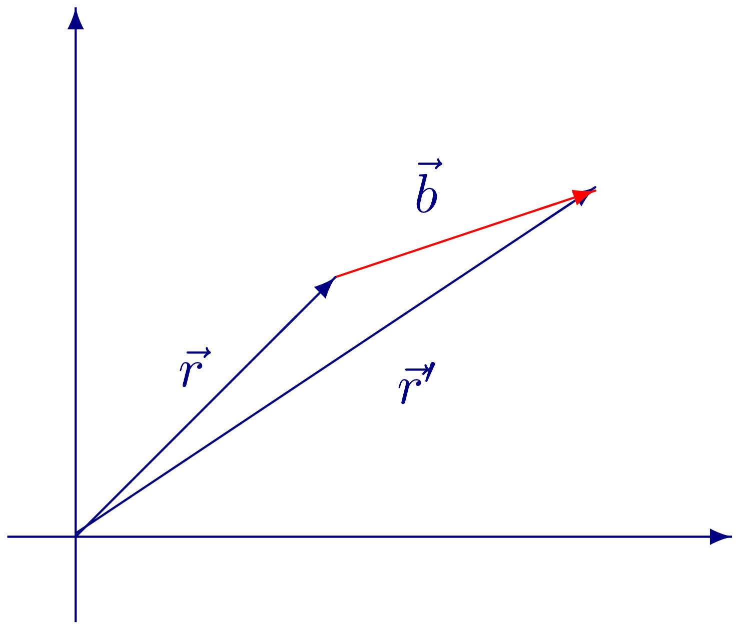
- Traslazioni
- Rotazioni



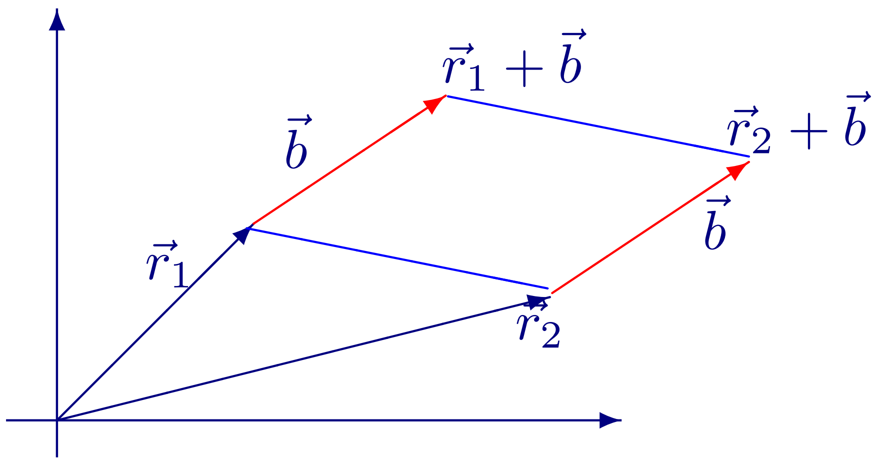
• Le similitudini (trasformazioni di scala) non sono simmetrie della geometria euclidea. Traslazioni e rotazioni sono tutte (e sole) le trasformazioni che lasciano invariata la distanza tra due punti

Traslazioni: Una traslazione è definita da un vettore $\vec{b}$ che agisce sullo spazio traslando tutti i punti della distanza $b = |\vec{b}|$ nella direzione e verso individuati da $\vec{b}$

$$\vec{r} \longrightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \vec{b} \qquad\qquad (*)$$

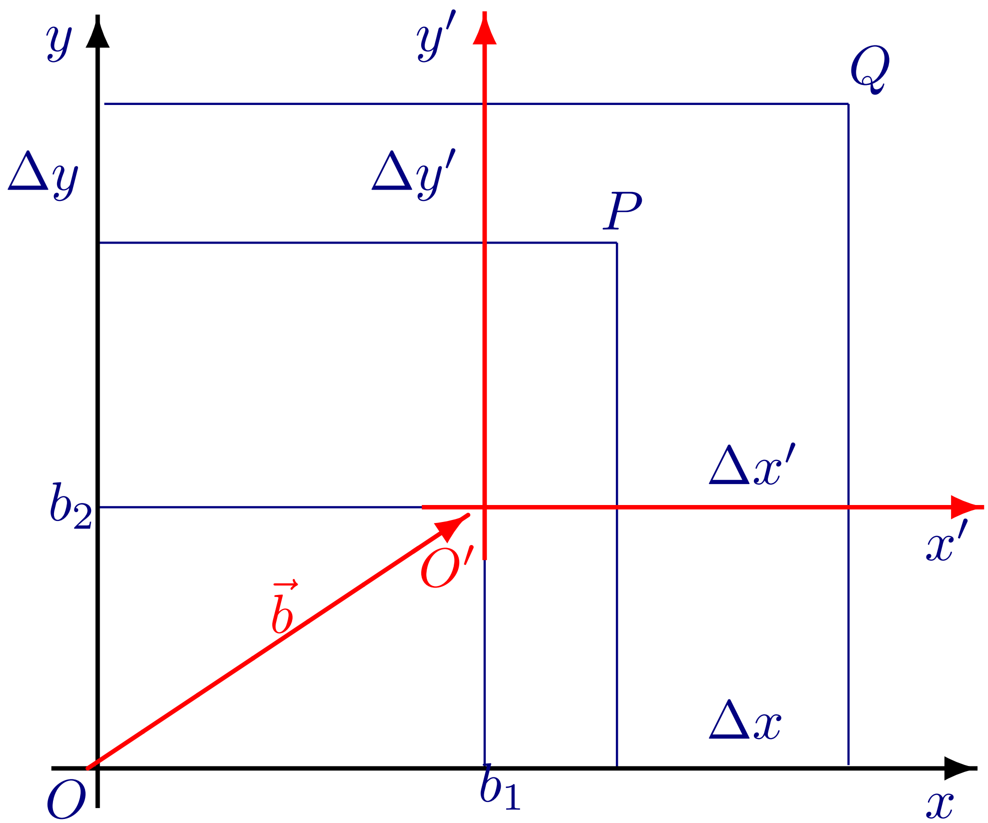


- Le traslazioni lasciano invariata la distanza tra due punti



$$d' = |\vec{r}_2\,' - \vec{r}_1\,'| = |(\vec{r}_2 + \vec{b}) - (\vec{r}_1 + \vec{b})| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = d$$

Traslazioni del sistema di riferimento: $O \to O' = O + \vec{b}$



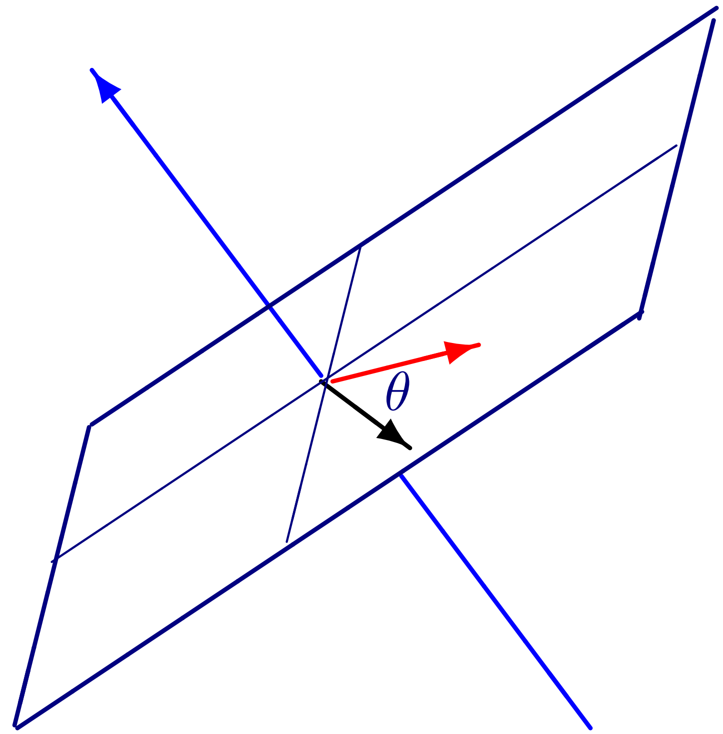
$$x' = x - b_1$$

$$y' = y - b_2$$

La distanza d tra due punti è la stessa nei due sistemi di riferimento

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2}$$

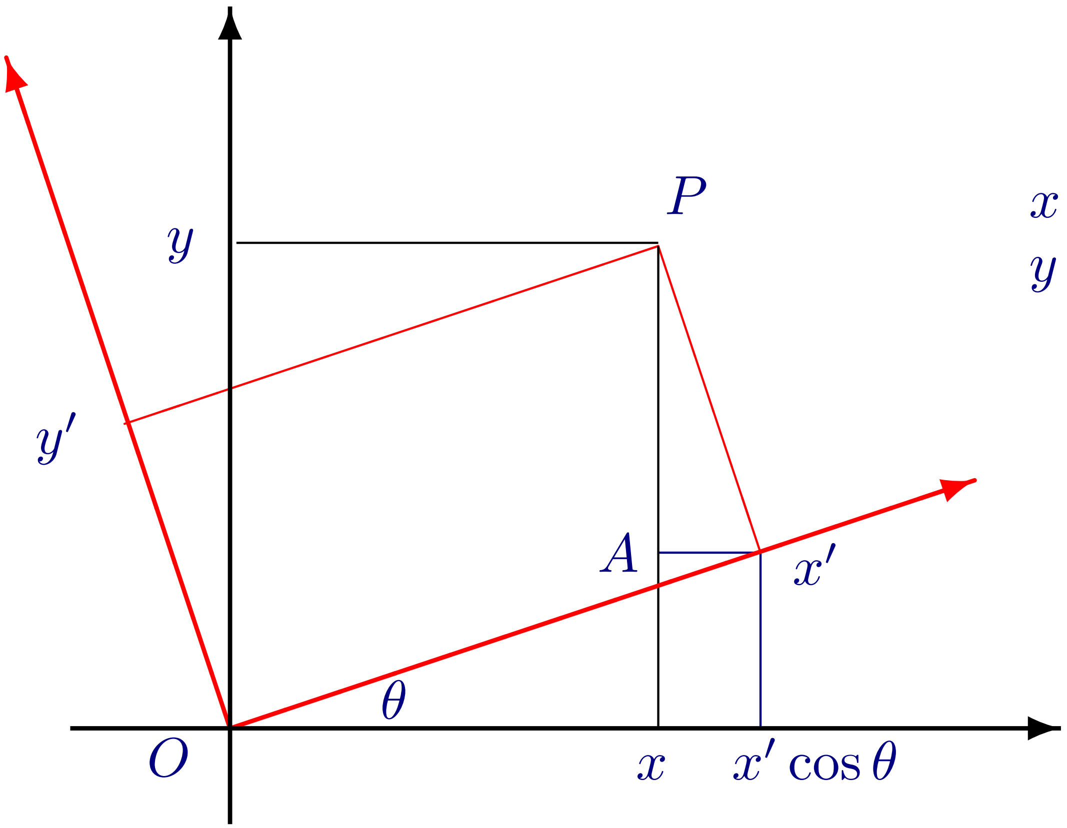
Rotazioni: tutti i punti dello spazio sono ruotati di un angolo θ attorno all'asse di rotazione: $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = R\vec{r}$



La rotazione R è definita dal versore $\vec{n}$ dell'asse di rotazione e dall'angolo θ: $\qquad R = R(\vec{n}, \theta)$

- Le rotazioni lasciano invariata la distanza tra due punti

Rotazioni del sistema di riferimento (di un angolo θ attorno all'asse z)



$$
\begin{aligned}
x &= x' \cos\theta - y' \sin\theta \\
y &= x' \sin\theta + y' \cos\theta
\end{aligned}
$$

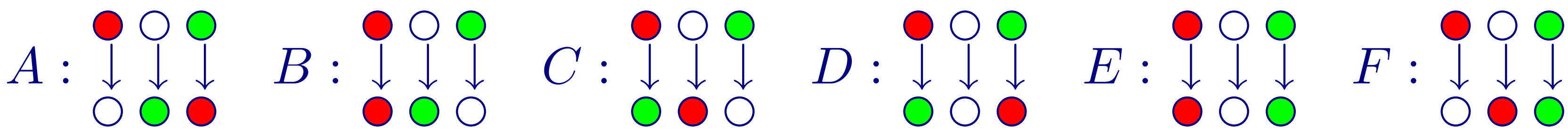
Esercizio: dimostrare (analiticamente) che la distanza tra due punti è invariante per rotazioni del sistema di riferimento

2.2 Gruppi di trasformazioni

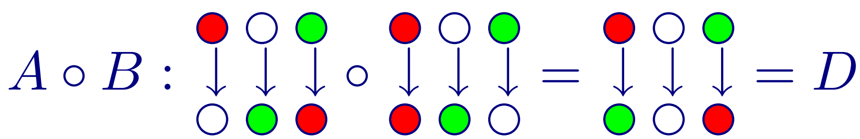
Le trasformazioni che si otteggono componendo rotazioni e traslazioni formano un “gruppo” di trasformazioni, detto il GRUPPO EUCLIDEO.

Per familiarizzarci con la nozione matematica di gruppo consideriamo un esempio semplice....

Il gruppo tricolore. Sono date tre palle  il cui colore può essere cambiato. Le possibili trasformazioni di colore sono



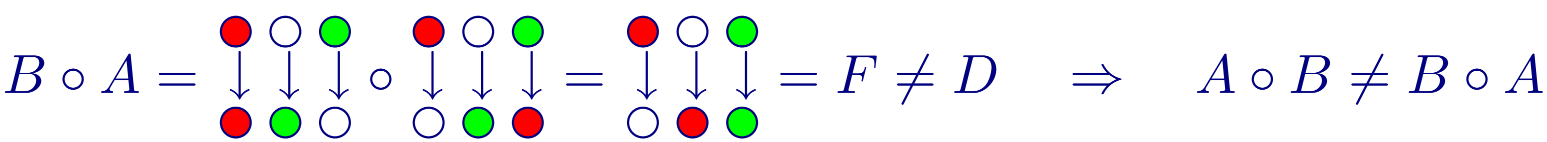
conideriamo la composizione di due trasformazioni



Analogamente si verifica che

$$A \circ F = B \quad A \circ E = A \quad A \circ C = E \quad F \circ D = A \quad \ldots$$

Notate che



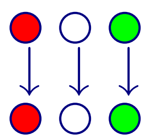
Esercizio: Costruire la tavola per l'operazione $\circ$ del gruppo tricolore

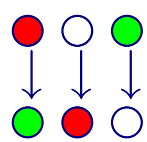
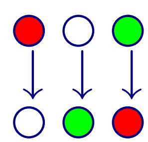
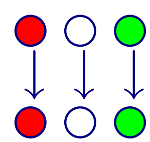
---

Un insieme di trasformazioni di uno spazio (insieme) forma un gruppo se

1. la composizione di due trasformazioni è ancora una trasformazione

2. per ogni trasformazione esiste una trasformazione "inversa", cioè tale che quando viene composta con la trasformazione si ottiene la trasformazione identica.

Esempio per 2: $E =$  è la trasformazione identica. C è l'inverso di A e viceversa ($C = A^{-1}$, $A = C^{-1}$),

$A \circ C =$  $\circ$  $=$  $= E$

2.3 Simmetria delle leggi fisiche

Il gruppo euclideo è una simmetria delle leggi della geometria euclidea ... e delle leggi della fisica.

L'invarianza delle leggi fisiche rispetto ad un gruppo di trasformazioni G è la nozione più importante di tutta la fisica!

• Si consideri una situazione fisica s ben definita governata da una legge fisica $\mathcal{L}$ (ad es., s rappresenta le traietteorie dei pianeti e del sole e $\mathcal{L}$ sono le leggi di Newton).

• Si consideri un gruppo di trasformazioni G e la situazione fisica $g(s)$ ottenuta da s per azione della trasformazione $g \in G$ (ad es., se s rappresenta le traietteorie dei pianeti e del sole e g è una traslazione di 1.000.000 Km nella direzione dal Sole ad Alpha Centauri, $g(s)$ rappresenta le traiettorie del sole e dei pianeti traslate di 1.000.000 Km nella direzione dal Sole ad Alpha Centauri).

La legge $\mathcal{L}$ è invariante rispetto ad un gruppo di trasformazioni G se la situazione fisica trasformata $g(s)$, dove $g \in G$, sodddisfa ancora la legge $\mathcal{L}$

• Se fate qui un esperimento con certi oggetti e poi fate lo stesso esperimento là con gli stessi oggetti traslati o ruotati ottenete gli stessi risultati...

...potreste però sbattere contro il muro o finire sottoterra...

Il senso del principio di invarianza è che **dovete traslare o ruotare "abbastanza roba" che possa avere influenza sul fenomeno che state considerando...**

..ad esempio, se fate un esperimento con un pendolo e vi spostate a 100.000 m di altezza per ottenere gli stessi risultati dovete spostare anche la terra!

2.4 Conseguenze dell'invarianza euclidea

1. Un punto materiale in una regione di spazio lontano dall'influenza di altri corpi.

Legge del moto $\quad m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})$

Invarianza per traslazioni: $\quad \vec{r} \longrightarrow \vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{b}$

$\ddot{\vec{r}}\,' = \ddot{\vec{r}}, \quad \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r} + \vec{b}) \quad \Longrightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}$ (vettore costante)

Invarianza per rotazioni: $R\vec{F} = \vec{F} \quad \Longrightarrow \quad \vec{F} = 0$ (vettore nullo)

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}} = 0}$$

moto rettilineo uniforme

2. Due punti materiali in una regione di spazio lontano dall'influenza di altri corpi.

Legge del moto: $\quad m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2), \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$

Invarianza per traslazioni:

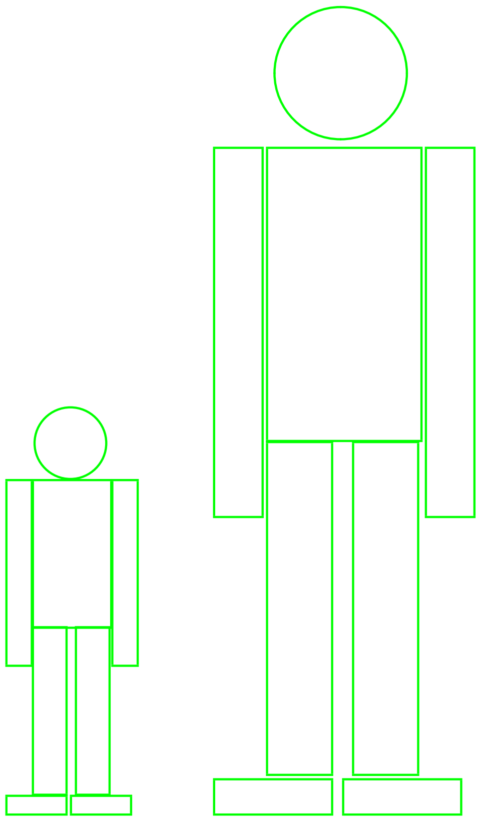
$$\vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Invarianza per rotazioni:

$$\vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \vec{F}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

2.5 Trasformazioni che non sono simmetrie

- Trasformazioni di scala $\vec{r} \longrightarrow \alpha\vec{r}$



- $L \longrightarrow \alpha L$

Peso $\longrightarrow \alpha^3$ Peso

sezione (delle ossa) $\longrightarrow \alpha^2$ sezione

(*Galileo Galilei in " Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze")*

- Le leggi di Newton non sono invarianti per $\vec{r} \longrightarrow \alpha\vec{r}$

Osservazione: Le trasformazioni di scala sono un ottimo sistema per ottenere informazione sulle soluzioni delle equazioni (senza risolverle)

• Equazione per il moto di un pianeta intorno al sole

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^2}\vec{e}_r$$

$\vec{r} \to \alpha\vec{r}$:

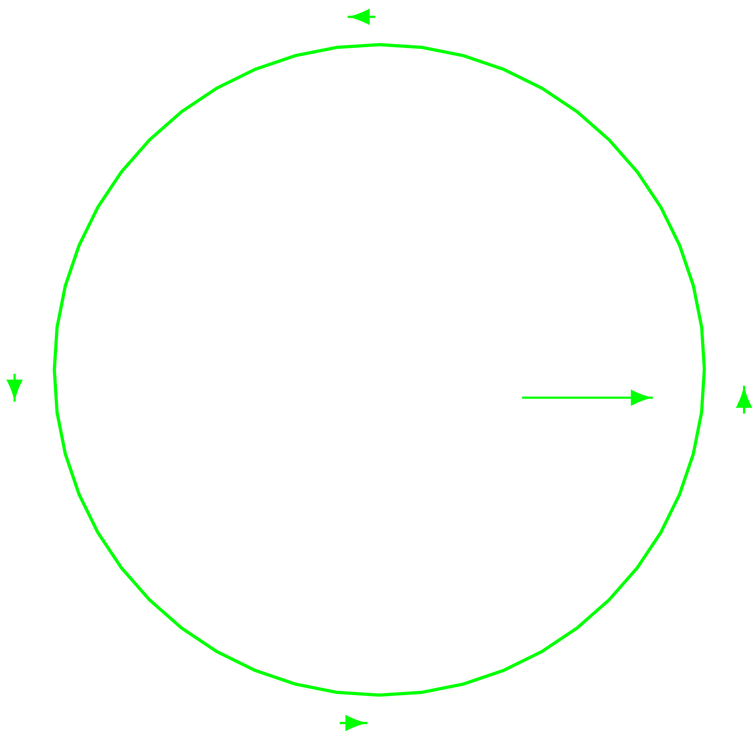
$$\alpha\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{\alpha^2 r^2}\vec{e}_r \qquad \longrightarrow \qquad \ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{\alpha^3 r^2}\vec{e}_r$$

riotteneniamo la legge di Newton solo se $t \to \alpha^{3/2}t$, da cui la terza legge di Keplero: $T \propto L^{3/2}$

• Problema: dedurre l'isocronicità delle oscillazioni del pendolo da $m\ddot{x} = -kx$ (Galileo).

• Problema: Gli animali di un deserto devono compiere grandi distanze tra le diverse sorgenti d'acqua. Come dipende il tempo massimo che può correre un animale, dalle dimensioni L dell'animale?

- Trasformazioni ad un sistema ruotante



- “vi accorgete” di essere su una giostra
- “compare” la forza centrifuga
- Le leggi di Newton non sono invarianti per passaggio da un sistema inerziale ad un sistema ruotante (o in generale accelerato)

3 La relatività

3.1 La relatività Galileana

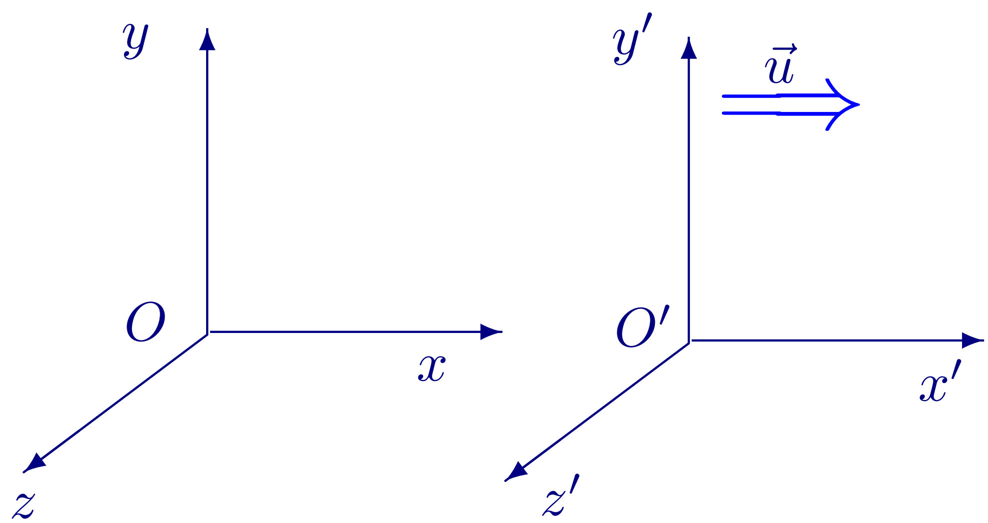
“Nella maggior stanza che sia sotto coverta di alcun grande navilio rinserratevi con qualche amico, e quivi fate di aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; pigliatevi anche un gran vaso con acqua, e dentrovi de' pescetti; accomodate ancora qualche vaso alto che vada gocciolando in un altro basso e di angusta gola: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci, gli vedrete andar vagando indifferentemente verso qual si voglia parte del vaso; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto...

Osservate che avrete bene tutte queste cose, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e 'n là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutte le nominate cose, nè meno da cosa che sia in voi stesso, potreste assicurarvi se la nave cammina o sta ferma... E se voi di tutti questi effetti mi domanderete la ragione, vi risponderò per ora: perché il moto universale della nave, essendo comunicato all'aria e a tutte quelle cose che in essa vengono contenute, e non essendo contrario alla naturale inclinazione di quella, in loro indelebilmente si conserva." (Galileo Galilei)

• ...Se fate un esperimento con certi oggetti nella nave ferma e poi fate lo stesso esperimento con gli stessi oggetti nella nave in moto uniforme ottenete gli stessi risultati...

Le leggi della fisica sono invarianti per cambiamento di sistema di riferimento inerziale

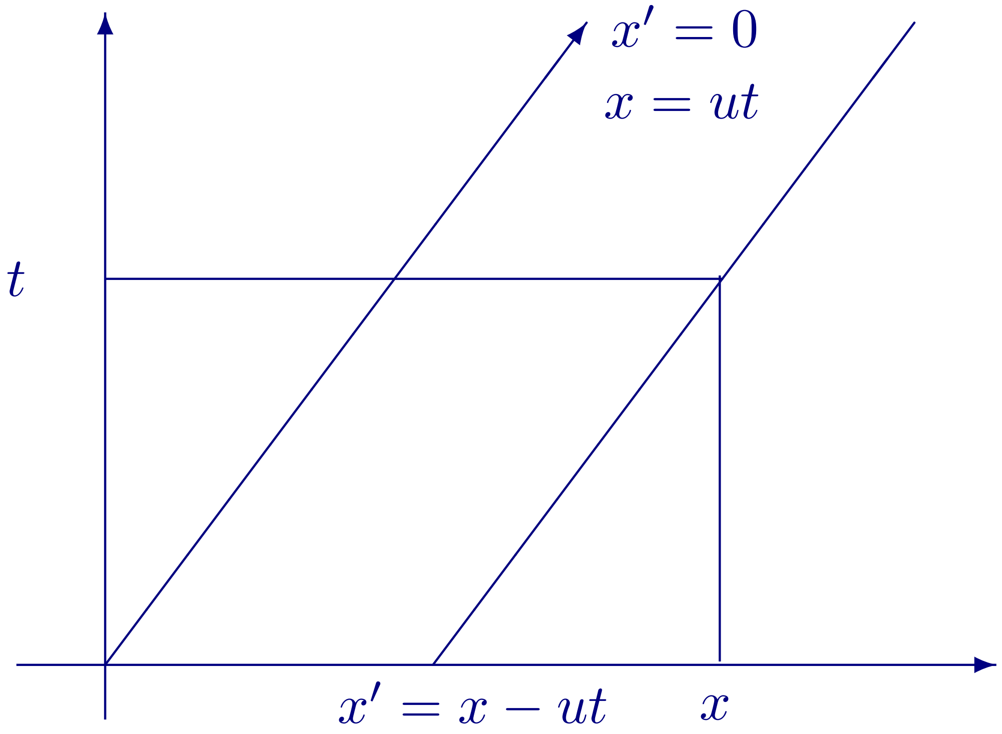
O' è in moto con velocità $\vec{u}$ lungo x rispetto a O. Per $t = 0$, $O \equiv O'$



Trasformazione tra i due sistemi di riferimento

$$y' = y\,, \qquad z' = z\,, \qquad x' = x - ut$$

Rappresentazione spazio-temporale



3.2 Il gruppo di Galileo

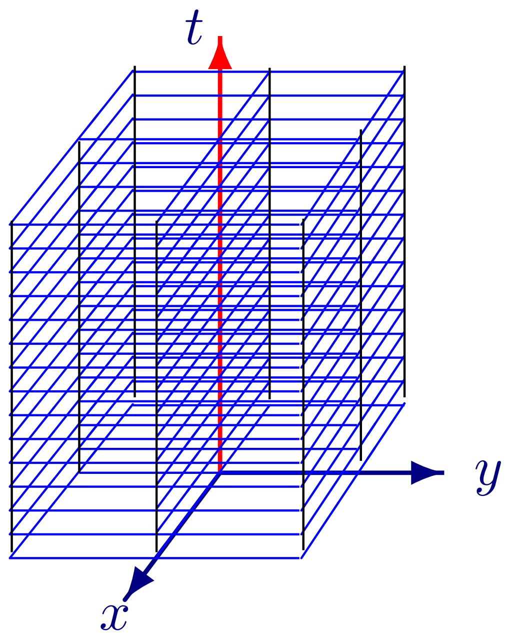
È il gruppo $\mathcal{G}$ di trasformazioni generato da:

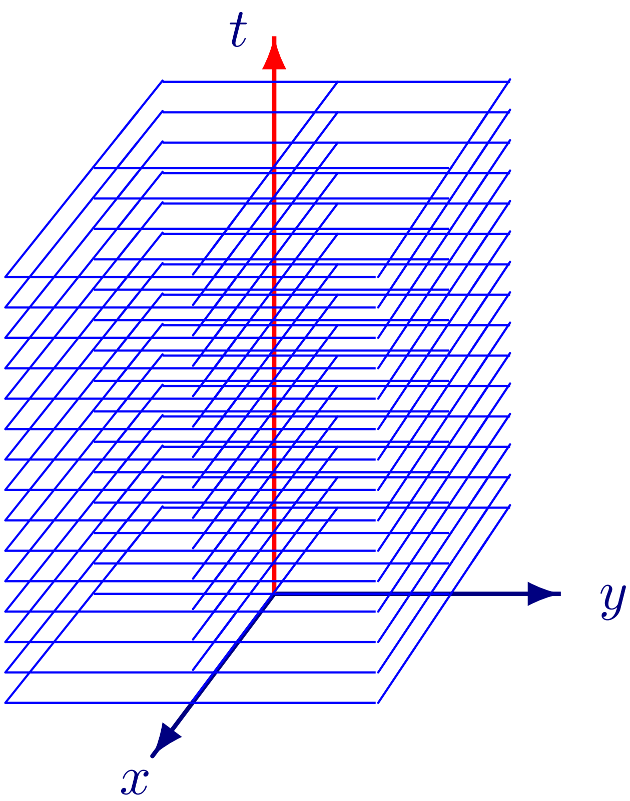
$$
\begin{aligned}
\vec{r}' &= \vec{r} + \vec{b} && \text{traslazioni spaziali} \\
\vec{r}' &= R\vec{r} && \text{rotazioni spaziali} \\
t' &= t + a && \text{spostamento nel tempo} \\
\vec{r}' &= \vec{r} + \vec{u}t && \text{cambiamento di sistema inerziale}
\end{aligned}
$$

Le leggi di Newton sono invarianti rispetto a $\mathcal{G}$

Lo spazio-tempo assoluto di Newton **non** è invariante rispetto a $\mathcal{G}$

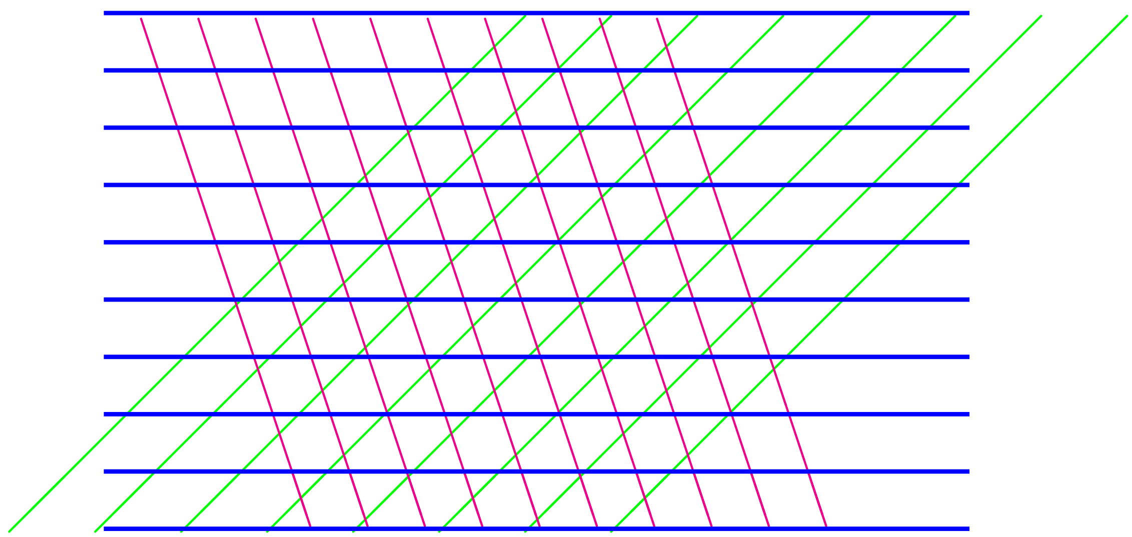
3.3 Lo spazio-tempo democratico di Galileo





Non ci sono più le linee nere che cuciono la struttura e la rendono rigida...

Cioè che è assoluto è la "foliazione" dello spazio-tempo in spazi tridimensionali Σ_t ($t = 1, t = 2, ...$), ma l'identificazione tra i punti di due Σ consecutivi dipende dal sistema di riferimento inerziale che si considera



La distanza spaziale tra due eventi non simultanei dipende dalla scelta del sistema di riferimento! "Lo spazio è relativo... "
... e se considerassimo la possibilità che anche lo scorrere del tempo sia relativo al sistema di riferimento inerziale?

3.4 La simmetria di Lorentz

$$\begin{cases} x' &= ax + bt \\ t' &= cx + dt \end{cases} \qquad \begin{cases} x &= a'x' + b't' \\ t &= c'x' + d't' \end{cases}$$

$$x = ut \qquad \Rightarrow \qquad x' = 0 \qquad\qquad x' = -ut' \qquad \Rightarrow \qquad x = 0$$

$$0 = aut + bt \quad \Rightarrow \quad b = -au \qquad\qquad 0 = -a'ut' + b't' \quad \Rightarrow \quad b' = a'u$$

$$x' = a(x - ut) \qquad\qquad x = a'(x' + ut')$$

• $x \longrightarrow -x$ e $x' \longrightarrow -x' \Longleftrightarrow O \leftrightarrow O'$

$$x' = a(x + ut) \qquad\qquad x = a'(x' - ut')$$

$$x = a(x' + ut') \qquad\qquad x' = a'(x - ut)$$

$\Longrightarrow a = a' \equiv \gamma$

$$x' = \gamma(x - ut) \qquad\qquad x = \gamma(x' + ut')$$

eliminiamo x' dalle due precedenti equazioni e otteniamo

$$t' = \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right) \qquad\qquad c^2 \equiv \frac{u^2\gamma^2}{\gamma^2 - 1}$$

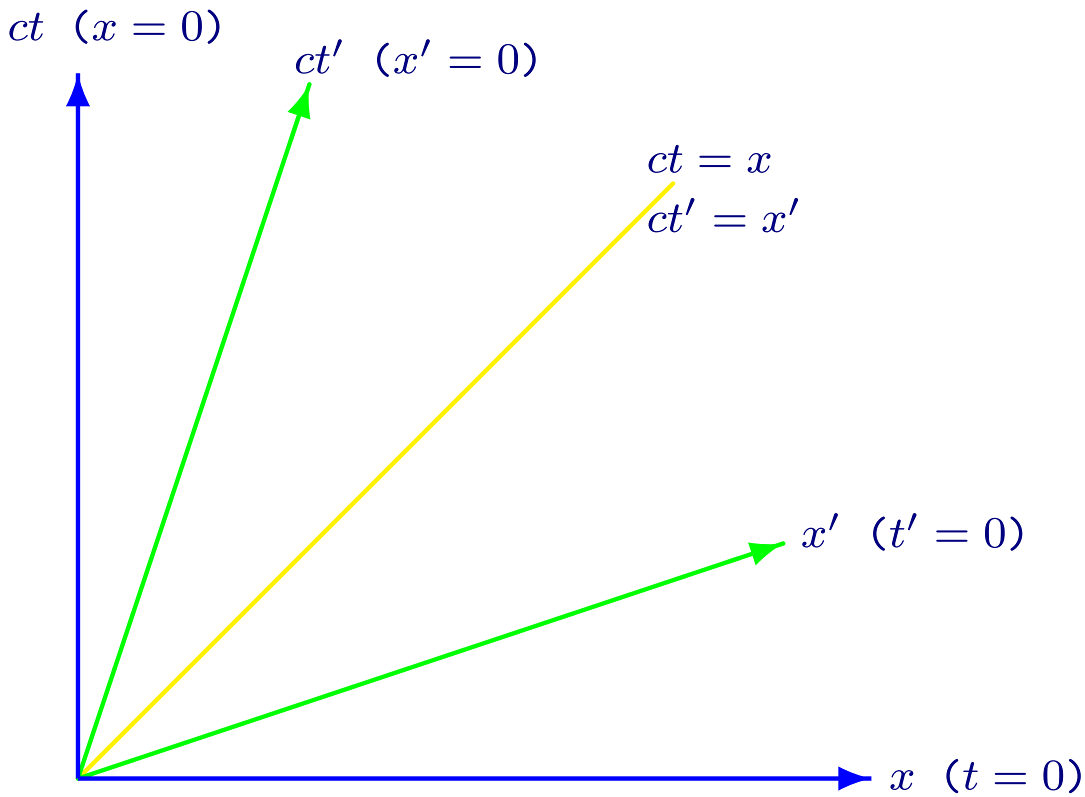
Imponendo la proprietà di gruppo si dimostra che c^2 non dipende da u, ma che è una costante universale!

$c = \infty \quad \Rightarrow \quad$ Trasformazioni di Galileo

$c =$ velocità della luce $\quad \Rightarrow \quad$ Trasformazioni di Lorentz

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \; > \; 1$$

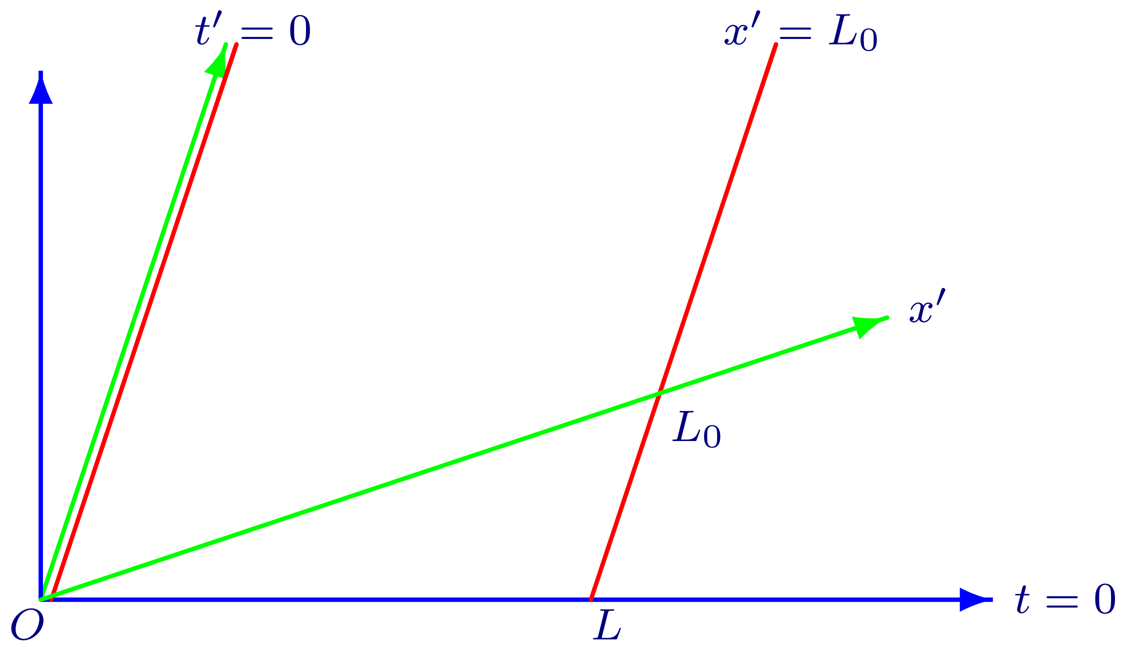
3.5 Lo spazio-tempo di Einstein e Minkowski



$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$t' = \gamma(t - vx/c^2)$$

Contrazione delle lunghezze

L_0: lunghezza a riposo del bastone $L?$



$$\begin{cases} t = 0 \\ x' = L_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \gamma(x - vt) = L_0 \end{cases} \Rightarrow \gamma x = L_0 \Rightarrow x \equiv L = \frac{1}{\gamma} L_0 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L_0$$

Dilatazione dei tempi

$$T = \gamma T_0$$