Le Frazioni Continue

5-7 Giugno 2003

O.Caligaris

- ***Eulero*** ***(1707-1783)***
- ***Lambert*** ***(1728-1777)***
- ***Lagrange*** ***(1736-1813)***

Prima di Eulero

- ***Aryabhata***, **attorno al 550 risolve una equazione diofantina lineare**
- ***Bombelli***, **nel 1530 sviluppa in frazione continua** $\sqrt{13}$
- ***Pietro Cataldi***, **(1548-1626) sviluppa in frazione continua** $\sqrt{18}$

Inoltre

- ***Wallis**, (1616-1703)*
- ***Lord Brouncker**, (1620-1684)* **primo presidente della Royal Society**
- ***Christian Huygens**, (1629-1695)* **usa le frazioni continue per approssimare i rapporti tra ingranaggi meccanici per un planetario**

In tempi più moderni,

Brezinski, Jacobi, Perron, Hermite, Gauss, Cauchy, Stieltjes

Recentemente

Applicazioni agli algoritmi di calcolo per calcolare una approssimazione razionale di un numero reale

Teoria del caos.

L'Algoritmo Euclideo (VII libro degi Elementi).

Supposto $b < a$,

- *Sottrarre* b *da* a *tante volte fino a che non si ottiene un resto* $c < b$.
- *Sottrarre* c *da* b *tante volte fino a che si ottiene un resto minore di* c
- *Iterare il procedimento fino a che si ottiene* 0 *come ultimo resto*

Il penultimo resto è il massimo comun divisore di a ***e di*** b ***e divide tutti i resti precedenti.***

Con il linguaggio algebrico moderno

$$
\begin{array}{ll}
a = bq_1 + r_1 & 0 \le r_1 < b \\
b = r_1 q_2 + r_2 & 0 \le r_2 < r_1 \\
r_1 = r_2 q_3 + r_3 & 0 \le r_3 < r_2 \\
r_2 = r_3 q_4 + r_4 & 0 \le r_4 < r_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
r_{n-1} = r_n q_{n+1} & 0 \le r_n
\end{array}
$$

$$a = bq_1 + r_1$$
$$b = r_1 q_2 + r_2$$
$$r_1 = r_2 q_3 + r_3$$
$$r_2 = r_3 q_4$$

$$r_2 = r_3 q_4$$
$$r_1 = (r_3 q_4) q_3 + r_3 = r_3(q_4 q_3 + 1) = Q_1 r_3$$
$$b = (r_3 Q_1) q_2 + r_3 q_4 = r_3(Q_1 q_2 + q_4) = Q_2 r_3$$
$$a = (r_3 Q_2) q_1 + Q_1 r_3 = r_3(Q_2 q_1 + Q_1) = Q_2 r_3$$

r_3 ***divide*** a b r_1 r_2.

Dati due numeri interi positivi

$$a \quad \boldsymbol{e} \quad b$$

possiamo trovare q ***ed*** r ***tali che***

$$a = bq + r \qquad , \qquad 0 \leq r < b$$

Rappresentazione di Numeri Interi e Razionali

$$
\begin{aligned}
1234 &= 123 \cdot 10 + \boxed{4}\\
123 &= 12 \cdot 10 + \boxed{3}\\
12 &= 1 \cdot 10 + \boxed{2}\\
1 &= 0 \cdot 10 + \boxed{1}\\
0 &= 0 \cdot 10 + \boxed{0}\\
0 &= 0 \cdot 10 + \boxed{0}\\
0 &= 0 \cdot 10 + \boxed{0}
\end{aligned}
$$

Se

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

chiamiamo $E(\alpha)$***, parte intera di*** α ***il più grande intero minore di*** α***.***

$$\boxed{E(\alpha) = \max\{n \in \mathbb{N} \quad n \leq \alpha\}}$$

$$
\begin{aligned}
E(0.1234) &= \boxed{0} \\
E(0.1234\cdot 10) = E(1.234) &= \boxed{1} \\
E\left(\left(0.1234-\frac{1}{10}\right)\cdot 100\right) = E(2.34) &= \boxed{2} \\
E\left(\left(0.1234-\frac{1}{10}-\frac{2}{100}\right)\cdot 1000\right) = E(3.4) &= \boxed{3} \\
E\left(\left(0.1234-\frac{1}{10}-\frac{2}{100}-\frac{3}{1000}\right)\cdot 10000\right) = E(4) &= \boxed{4} \\
E\left(\left(0.1234-\frac{1}{10}-\frac{2}{10^2}-\frac{3}{10^3}-\frac{0}{10^4}\right)\cdot 10^5\right) = & \\
= E(0) &= \boxed{0} \\
E\left(\left(0.1234-\frac{1}{10}-\frac{2}{10^2}-\frac{3}{10^3}-\frac{0}{10^4}-\frac{0}{10^5}\right)\cdot 10^6\right) = & \\
= E(0) &= \\
&= \boxed{0}
\end{aligned}
$$

$$0.1234 = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{4}{10000}$$

$$0.1234 = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{4}{10000} + \frac{0}{10000} + \frac{0}{1000000}$$

$$\frac{1}{3} = 0.3333\cdots = 0.\overline{3} =$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000}\cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{10^k}$$

L'algoritmo di Euclide consente di sviluppare ogni razionale $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ **in frazione continua finita**

$$a = bq_1 + r_1$$
$$b = r_1q_2 + r_2$$
$$r_1 = r_2q_3 + r_3$$
$$r_2 = r_3q_4 + r_4$$
$$\ldots\ldots$$

da cui

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{r_1}{b} = q_1 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}$$

$$\frac{b}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = q_3 + \frac{r_3}{r_2} = q_3 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}$$

$$\frac{r_2}{r_3} = q_3 + \frac{r_4}{r_3} = q_4 + \frac{1}{\frac{r_3}{r_4}}$$

$$\ldots\ldots$$

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \cfrac{1}{r_3 + \cfrac{1}{r_4 + \dots}}}}$$

Huygens usò lo sviluppo di $\frac{2946}{100}$ in frazione continua per ottenere una approssimazione razionale con numeratore e denominatore più piccoli.

Se ne servì nella costruzione degli ingranaggi di un planetario meccanico per simulare il moto di Saturno in rapporto con quello della Terra.

Nel caso in questione si ha

$$a = b q_1 + r_1 \qquad 2946 = 100 \cdot 29 + 46$$

$$b = r_1 q_2 + r_2 \qquad 100 = 46 \cdot 2 + 8$$

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3 \qquad 46 = 8 \cdot 5 + 6$$

$$r_2 = r_3 q_4 + r_4 \qquad 8 = 6 \cdot 1 + 2$$

$$\cdots\cdots \qquad 6 = 2 \cdot 3$$

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{r_1}{b} = q_1 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}$$

$$\frac{b}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = q_3 + \frac{r_3}{r_2} = q_3 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}$$

$$\frac{r_2}{r_3} = q_3 + \frac{r_4}{r_3} = q_4 + \frac{1}{\frac{r_3}{r_4}}$$

$$\ldots\ldots$$

$$\frac{2946}{100} = 29 + \frac{46}{100} = 29 + \frac{1}{\frac{100}{46}}$$

$$\frac{100}{46} = 2 + \frac{8}{46} = 2 + \frac{1}{\frac{46}{8}}$$

$$\frac{46}{8} = 5 + \frac{6}{8} = 5 + \frac{1}{\frac{8}{6}}$$

$$\frac{8}{6} = 1 + \frac{2}{6} = 1 + \frac{1}{\frac{6}{2}}$$

$$\frac{6}{2} = 3$$

e quindi

$$\frac{2946}{100} = 29 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}$$

Troncando il procedimento otteniamo le seguenti frazioni

$$\frac{29}{1} = 29$$

$$29 + \frac{1}{2} = \frac{59}{2} = 29.5$$

$$29 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5}} = \frac{324}{11} = 29.45$$

$$29 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1}}} = \frac{383}{13} = 29.461$$

LEONHARDI EULERI OPERA OMNIA
SUB AUSPICIIS SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM HELVETICAE
EDENDA CURAVERUNT
F. RUDIO · A. KRAZER · A. SPEISER · L. G. DU PASQUIER

SERIES I · OPERA MATHEMATICA · VOLUMEN VIII

LEONHARDI EULERI

INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM

TOMUS PRIMUS

EDIDERUNT

ADOLF KRAZER ET FERDINAND RUDIO

LIPSIAE ET BEROLINI
TYPIS ET IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI
MCMXXII

DE FRACTIONIBUS CONTINUIS

356. Quoniam in praecedentibus capitibus plura cum de seriebus infinitis tum de productis ex infinitis factoribus conflatis disserui, non incongruum fore visum est, si etiam nonnulla de tertio quodam expressionum infinitarum genere addidero, quod continuis fractionibus vel divisionibus continetur. Quanquam enim hoc genus parum adhuc est excultum, tamen non dubitamus, quin ex eo amplissimus usus in analysin infinitorum aliquando sit redundaturus.

DE FRACTIONIBUS CONTINUIS

356. Quoniam in praecedentibus capitibus plura cum de seriebus infinitis tum de productis ex infinitis factoribus conflatis disserui, non incongruum fore visum est, si etiam nonnulla de tertio quodam expressionum infinitarum genere addidero, quod continuis fractionibus vel divisionibus continetur. Quanquam enim hoc genus parum adhuc est excultum, tamen non dubitamus, quin ex eo amplissimus usus in analysin infinitorum aliquando sit redundaturus.

356. Dal momento che nei precedenti capitoli ho dissertato di molti argomenti a riguardo sia delle serie che dei prodotti costituiti da infiniti fattori, non sembra incongruo che io aggiunga qualcosa su un terzo tipo di espressioni di genere infinito che contenga frazioni o divisioni continue. Sebbene infatti questo genere sia stato fin qui poco coltivato,tuttavia non dubitiamo che di questo concetto si trovino numerosissime applicazioni nell’analisi degli infinitesimi.

Exhibui enim iam aliquoties eiusmodi specimina, quibus haec expectatio non parum probabilis redditur. Imprimis vero ad ipsam arithmeticam et algebram communem non contemnenda subsidia affert ista speculatio, quae hoc capite breviter indicare atque exponere constitui.

357. Fractionem autem continuam voco eiusmodi fractionem, cuius denominator constat ex numero integro cum fractione, cuius denominator denuo est aggregatum ex integro et fractione, quae porro simili modo sit comparata, sive ista affectio in infinitum

Exhibui enim iam aliquoties eiusmodi specimina, quibus
Ho già mostrato infatti molti esempi in cui queste previsioni si
haec expectatio non parum probabilis redditur. Im-
dimostrano non poco probabili. Soprattutto invero
primis vero ad ipsam arithmeticam et algebram com-
la ricerca che ho deciso di indicare ed esporre brevemente
munem non contemnenda subsidia affert ista specula-
in questo capitolo fornisce un aiuto non disprezzabile alla
tio, quae hoc capite breviter indicare atque exponere
stessa aritmetica ed algebra comune
constitui.
357 Pertanto chiamo continua una frazione fatta in modo da avere
357. Fractionem autem continuam voco eiusmodi
il denominatore costituito da un numero intero sommato
fractionem, cuius denominator constat ex numero in-
ad una frazione il cui denominatore è fatto a sua volta da un
tegro cum fractione, cuius denominator denuo est ag-
intero e da una frazione e che in avanti sia costituita in simile
gregatum ex integro et fractione, quae porro simili
modo sia che questo comportamento si estenda
modo sit comparata, sive ista affectio in infinitum

progrediatur sive alicubi sistatur. Huiusmodi ergo fractio continua erit sequens expressio

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f+\textit{etc.}}}}}}, \qquad a+\cfrac{\alpha}{e+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e+\cfrac{\epsilon}{f+\textit{etc.}}}}}},$$

in quarum forma priori omnes fractionum numeratores sunt unitates, quam potissimum hic contemplabor in altera vero forma sunt numeratores numeri cuicunque.

progrediatur sive alicubi sistatur. Huiusmodi ergo frac-
all'infinito o si fermi ad un certo punto. In questo senso pertanto
tio continua erit sequens expressio
chiamiamo frazione continua una espressione del tipo

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f+\mathit{etc.}}}}}},\qquad a+\cfrac{\alpha}{e+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e+\cfrac{\epsilon}{f+\mathit{etc.}}}}}},$$

in quarum forma priori omnes fractionum numera-
nella forma della prima delle quali i numeratori delle frazioni sono
tores sunt unitates, quam potissimum hic contem-
tutti unitari, mentre nella seconda, che qui mostreremo essere molto potente
plabor in altera vero forma sunt numeratores numeri
i numeratori sono numeri qualunque.
cuicunque.

Generalità sulle frazioni continue

La forma generale di una frazione continua è

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \cdots \cfrac{b_n}{a_n + \cfrac{b_{n+1}}{a_{n+1} + \cdots}}}}}}$$

Una frazione continua è individuata da

$$\{a_n\} \quad \textbf{e} \quad \{b_n\}$$

e possiamo indicarla con

$$a_0 + \frac{\{a_n\}}{\{b_n\}}$$

Nel caso in cui

$$\boxed{b_n = 1 \quad \textit{per ogni } n}$$

la frazione continua si dice semplice.

Poniamo

$$\frac{[a_1..a_n]}{[b_1..b_n]} = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \cdots \cfrac{\cdots b_n}{a_n}}}}}$$

$$\frac{[a_1..a_n]}{[b_1..b_n]}$$

è la successione dei convergenti della frazione continua.

Teorema 0.1. *Posto*

$$A_0 = 1 \quad , \quad B_0 = 0$$

$$A_1 = a_0 \qquad B_1 = 1$$

$$\begin{cases} A_{k+1} = a_k A_k + b_k A_{k-1} \\ B_{k+1} = a_k B_k + b_k B_{k-1} \end{cases}$$

Allora

$$\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} = \frac{[a_1..a_n]}{[b_1..b_n]}$$

Teorema 0.2. *Se le successioni* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *sono costituite da interi positivi allora*

$$\frac{A_{2n}}{B_{2n}} \leq \frac{A_{2n-1}}{B_{2n-1}}$$

$$\frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}} \leq \frac{A_{2n-1}}{B_{2n-1}}$$

$$\frac{A_{2n}}{B_{2n}} \geq \frac{A_{2n-2}}{B_{2n-2}}$$

La successione dei termini di posto pari è crescente,
La successione dei termini di posto dispari è decrescente
Ogni termine di posto pari è minore di ogni termine di posto dispari.

Se $b_n = 1$ (frazione continua semplice)

$$\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_n}{B_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{B_{n+1}B_n}$$

e

$$\frac{(-1)^{n+1}}{B_{n+1}B_n} \to 0$$

per cui $\frac{A_n}{B_n}$ ammette limite e tale limite è il valore rappresentato dalla frazione continua.

Le frazioni continue come somma di una serie

si ha

$$\frac{A_{k+1}}{B_{k+1}} - \frac{A_k}{B_k} = \frac{(-1)^{k+1}\prod_{j=1}^{k} b_j}{B_k B_{k+1}}$$

e quindi

$$\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \prod_{j=1}^{k} \frac{b_j}{B_k B_{k+1}}$$

$$a_0 + \frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \lim_n \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} =$$

$$= a_0 + \lim_n \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \prod_{j=1}^{k} \frac{b_j}{B_k B_{k+1}} =$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \prod_{j=1}^{k} \frac{b_j}{B_k B_{k+1}}$$

Ogni frazione continua si può ottenere come somma di una serie a segni alterni.

La somma di serie come frazione continua

Data una serie a segni alterni, possiamo trovare una frazione continua che rappresenta la sua somma.

Si confronti la serie

$$F_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} F_k =$$

$$= F_0 + F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5 - \dots\dots$$

con quella generata dalla frazione continua

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \dots}}}}$$

$$\dots \cfrac{b_n}{a_n + \cfrac{b_{n+1}}{a_{n+1} + \dots}}$$

che è

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \prod_{j=1}^{k} \frac{b_j}{B_k B_{k+1}}$$

dove

$$\begin{cases} B_0 = 0 \\ B_1 = 1 \\ B_{k+1} = a_k B_k + b_k B_{k-1} \end{cases}$$

Affinchè le due serie siano uguali deve essere, per $k \geq 1$,

$$b_{k+1} = \frac{F_{k+1}}{F_k}\frac{B_{k+2}}{B_k} =$$
$$= \frac{F_{k+1}}{F_k}\frac{F_{k-1}F_k a_k a_{k+1}}{(F_{k-1} - F_k)(F_k - F_{k+1})} =$$
$$= \frac{F_{k-1}F_{k+1} a_k a_{k+1}}{(F_{k-1} - F_k)(F_k - F_{k+1})}$$

Pertanto data la serie a segni alterni

$$F_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} F_k = F_0 - F_1 + F_2 - F_3 + F_4 - F_5 + \cdots\cdots$$

possiamo costruire una frazione continua

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \ldots}}}}$$

$$\ldots \cfrac{b_n}{a_n + \cfrac{b_{n+1}}{a_{n+1} + \ldots}}$$

equivalente alla serie data imponendo che

$$\begin{cases} b_1 = a_1 F_1 \\ b_2 = \dfrac{F_2 a_1 a_2}{F_1 - F_2} \\ b_3 = \dfrac{F_1 F_3 a_2 a_3}{(F_1 - F_2)(F_2 - F_3)} \\ \cdots\cdots \\ b_{k+1} = \dfrac{F_k F_{k+2} a_{k+1} a_{k+2}}{(F_k - F_{k+1})(F_{k+1} - F_{k+2})} \end{cases}$$

Lo sviluppo di $\frac{\pi}{4}$

È noto che

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \dots$$

e si ricava che

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\dots}}}}$$

$$\dots \cfrac{(2n-1)^2}{2+\cfrac{(2n+1)^2}{2+\quad\dots}}$$

Lo sviluppo di $\ln(2)$

Si ha

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots$$

da cui

$$\ln(2) = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{9}{1+\dots \cfrac{n^2}{1+\cfrac{(n+1)^2}{1+\quad\dots}}}}}}$$

Lo sviluppo di e

Da

$$\frac{1}{e} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} =$$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots$$

e

$$1 - \frac{1}{e} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!} =$$

$$= 1 - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots$$

Si ricava

$$1-\frac{1}{e}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\dots}}}}$$

$$\dots\cfrac{n}{n+\cfrac{n+1}{n+1+\dots}}$$

ed anche

$$\frac{e}{e-1}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{3}{3+\dots}}}}$$

$$\dots\cfrac{n}{n+\cfrac{n+1}{n+1+\dots}}$$

ed infine poichè

$$\frac{e}{e-1} = 1 + \frac{1}{e-1}$$

si ottiene

$$\frac{1}{e-1} = \cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{3}{3+\dots}}}}$$

$$\dots\cfrac{n}{n+\cfrac{n+1}{n+1+\dots}}$$

374. Hoc modo innumerabiles inveniri poterunt fractiones continuae in infinitum progredientes, quarum valor verus exhiberi queat. Cum enim ex supra traditis infinitae series, quarum summae constent, ad hoc negotium accommodari queant, unaquaeque transformari poterit in fractionem continuam, cuius adeo valor summae illius seriei est aequalis. Exempla, quae iam hic sunt allata, sufficiunt ad hunc usum ostendendum. Verumtamen optandum esset, ut methodus

Per dirla con Eulero

374. Hoc modo innumerabiles inveniri poterunt frac-
374. In questo modo si sono potute trovare innumerevoli frazioni continue
tiones continuae in infinitum progredientes, quarum
che si spingono all'infinito,delle quali possiamo mostrare
valor verus exhiberi queat. Cum enim ex supra tradi-
il valore vero. Infatti dal momento che le serie infinite che
tis infinitae series, quarum summae constent, ad hoc
abbiamo precedentemente trattato, delle quali si conosce la somma,
negotium accommodari queant, unaquaeque transfor-
possono essere utilizzate a questo fine, ciascuna di esse potrà essere
mari poterit in fractionem continuam, cuius adeo valor
trasformata in una frazione continua,il cui valore è precisamente uguale a
summae illius seriei est aequalis. Exempla, quae iam
alla somma di quella serie. Gli esempi che abbiamo già fin qui portato, sono
hic sunt allata, sufficiunt ad hunc usum ostenden-
sufficienti ad illustrare questa applicazione. Purtuttavia è auspicabile che
dum. Verumtamen optandum esset, ut methodus

detegeretur, cuius beneficio, si proposito fuerit fractio continua quaecunque, eius valor immediate inveniri posset. Quanquam enim fractio continua transmutari potest in seriem infinitam, cuius summa per methodos cognitas investigari queat, tamen plerumque istae series tantopere fiunt intricatae, ut earum summa, etiamsi sit satis simplex, vix ac ne vix quidem obtineri possit.

detegeretur, cuius beneficio, si proposito fuerit fractio
si trovi un metodo, per mezzo del quale, se è assegnata una frazione continua
continua quaecunque, eius valor immediate inveniri
qualunque, si possa trovare immediatamente il suo valore.
posset. Quanquam enim fractio continua transmutari
Sebbene infatti ogni frazione continua si possa trasformare in una serie
potest in seriem infinitam, cuius summa per metho-
infinita la cui somma possa essere studiata con metodi noti, tuttavia la
dos cognitas investigari queat, tamen plerumque is-
maggior parte di queste serie diventano estremamente complicate, così che
tae series tantopere fiunt intricatae, ut earum summa,
la loro somma, nonostante sia abbastanza semplice, solo con fatica e a volte
etiamsi sit satis simplex, vix ac ne vix quidem obtineri
neppure con fatica si può trovare.
possit.

Frazioni Continue ed equazioni di secondo grado

$$x^2 + ax - b = 0 \tag{1}$$

$$x(x + a) = b \tag{2}$$

$$x = \frac{b}{a + x} \quad \textit{oppure} \quad x = -a + \frac{b}{x} \tag{3}$$

Ciascuna delle 3 dà luogo ad una frazione continua

$$x = \frac{b}{a+x}$$

genera

$$\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\dots}}}$$

$$\dots\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\dots}}$$

(4) $$x = -a + \frac{b}{x}$$

genera

$$-a + \cfrac{b}{-a + \cfrac{b}{-a + \dots \cfrac{b}{-a + \dots}}}$$

Ciascuna delle due frazioni continue si può studiare come limite di una successione definita per ricorrenza.

Consideriamo ad esempio

$$x = \frac{b}{a + x}$$

Da

$$x = \frac{b}{a+x}$$

ricaviamo

$$c_1 = \frac{b}{a}$$

$$c_2 = \frac{b}{a+\frac{b}{a}} = \frac{b}{a+c_1}$$

$$c_3 = \frac{b}{a+\frac{b}{a+\frac{b}{a}}}$$

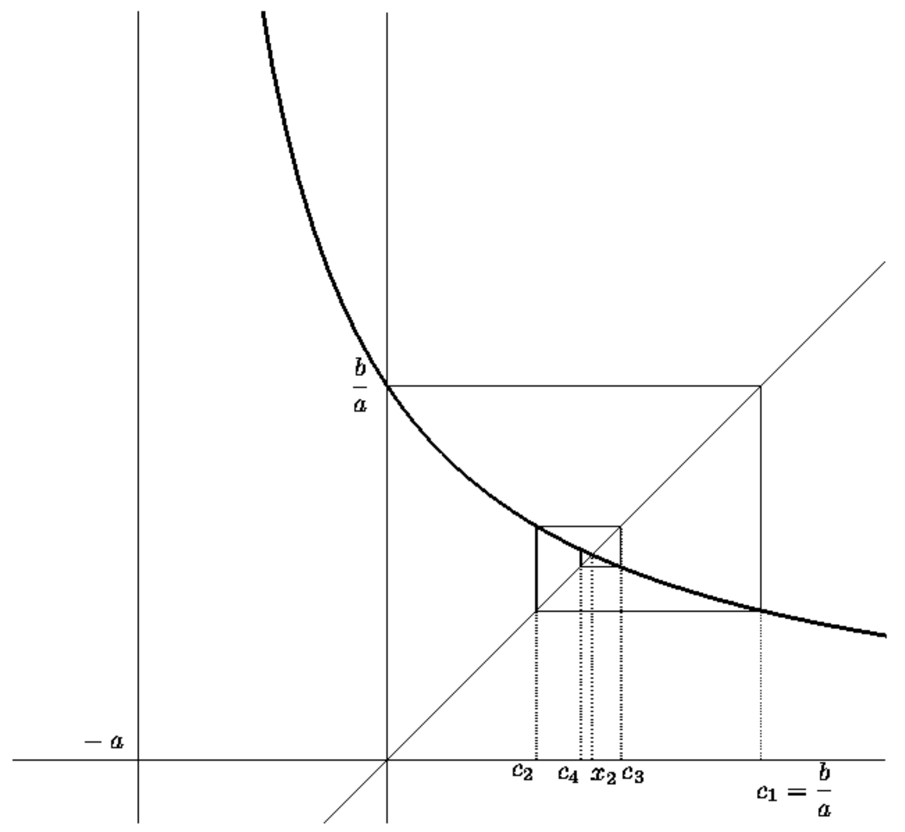
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ed in generale

$$
(5) \quad \begin{cases} c_1 = \dfrac{b}{a} \\[2ex] c_{n+1} = \dfrac{b}{a + c_n} \end{cases}
$$

Studiamo il comportamento di c_n al variare di a e b

$a > 0,\ b > 0$



Utilizziamo il grafico di

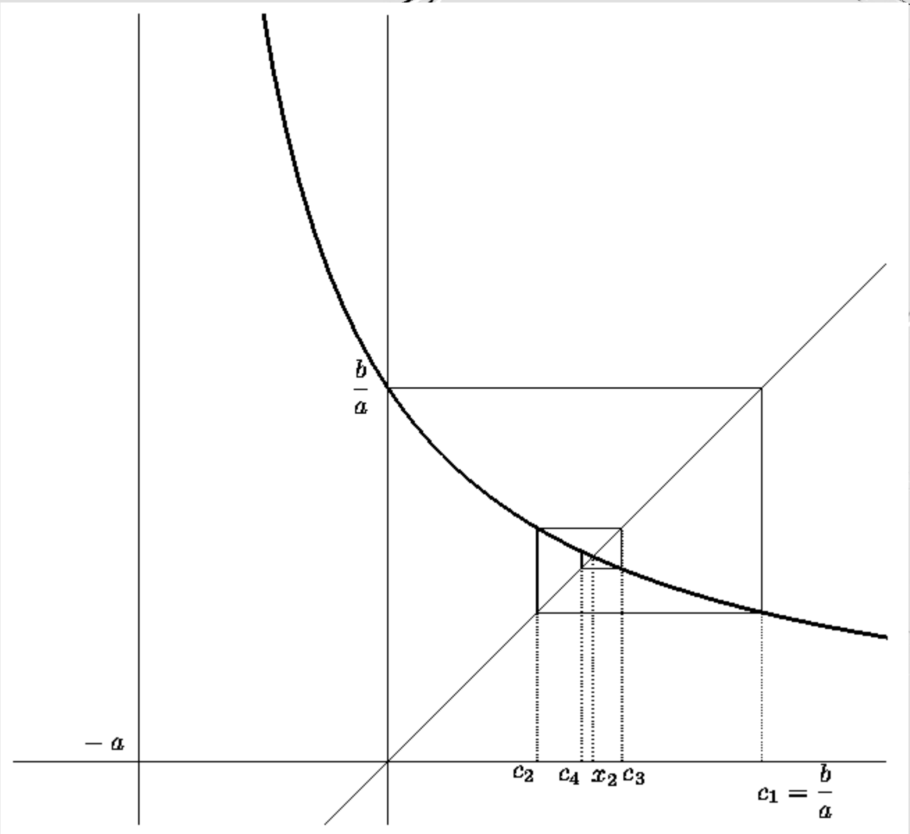
$$\boxed{\frac{b}{a+x}}$$

c_n ***oscilla attorno a***

$$\boxed{-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}}$$

soluzione positiva di

$$\boxed{x^2+ax-b=0}$$



La successione dei termini pari

$$\boxed{p_n = c_{2n}}$$

è crescente. La successione dei termini dispari

$$\boxed{d_n = c_{2n-1}}$$

è decrescente.

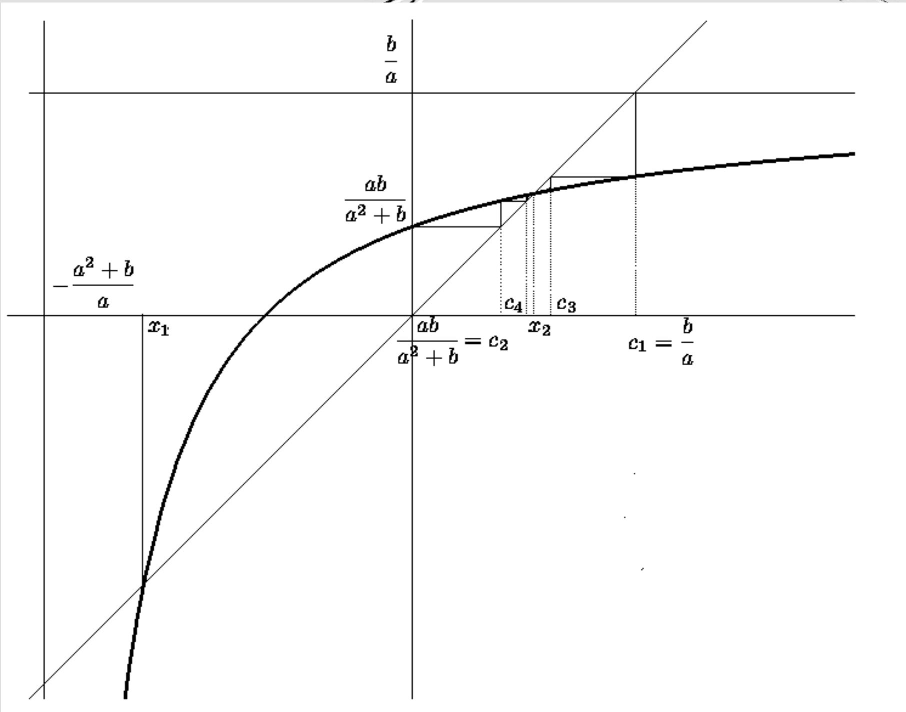
$$c_{2n+1} = \frac{b}{a + c_{2n}} = \frac{b}{a + \frac{b}{a + c_{2n-1}}} =$$

$$= \frac{b(a + c_{2n-1})}{ac_{2n-1} + a^2 + b}$$

e

$$c_{2n} = \frac{b}{a + c_{2n-1}} = \frac{b}{a + \frac{b}{a + c_{2(n-1)}}} =$$

$$= \frac{b(a + c_{2(n-1)})}{ac_{2(n-1)} + a^2 + b}$$



Per studiare

$$\boxed{d_n = c_{2n-1}}$$

Utilizziamo il grafico di

$$\boxed{\frac{b(a+x)}{ax + a^2 + b}}$$

$$f(0) < \frac{b}{a} \quad , \quad c_1 = f(0) = \frac{b}{a} \quad , \quad c_2 = f(c_1) = \frac{ab}{a^2+b}$$

$f(x) = x$ ***se e solo se*** $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$

Infatti

$$f(0) = \frac{ab}{a^2 + b} < \frac{b}{a}$$

mentre

$$f(x) = x$$

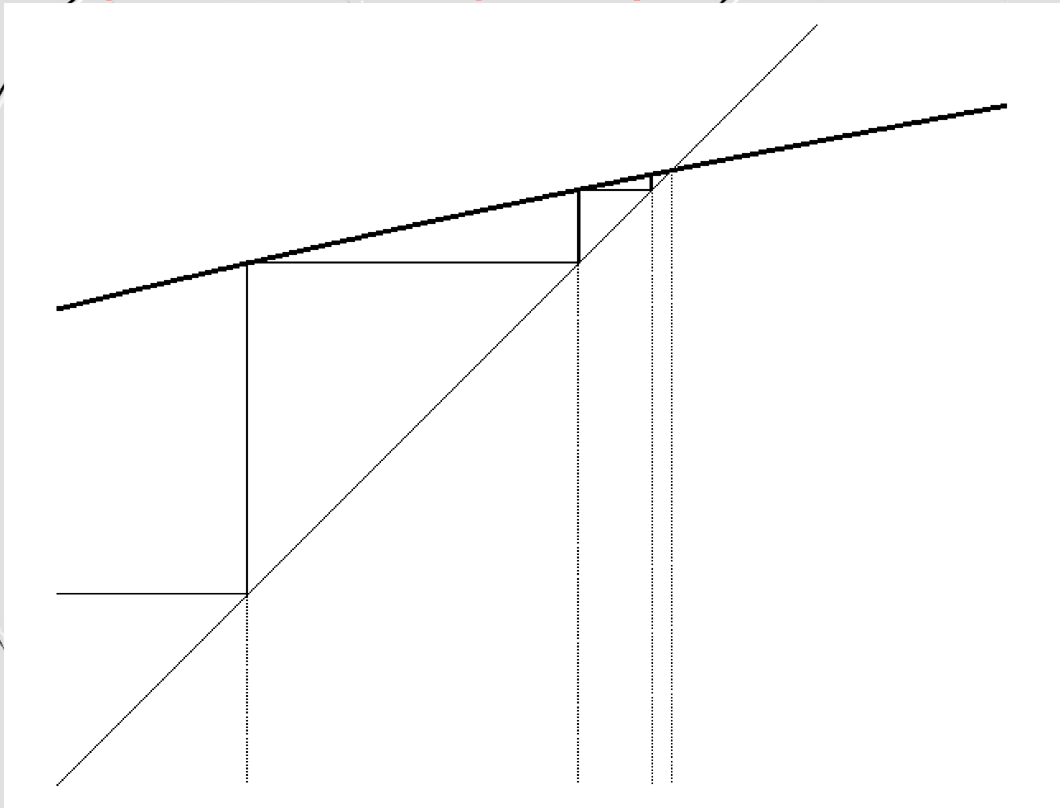
se e solo se

$$x^2 + ax - b = 0$$

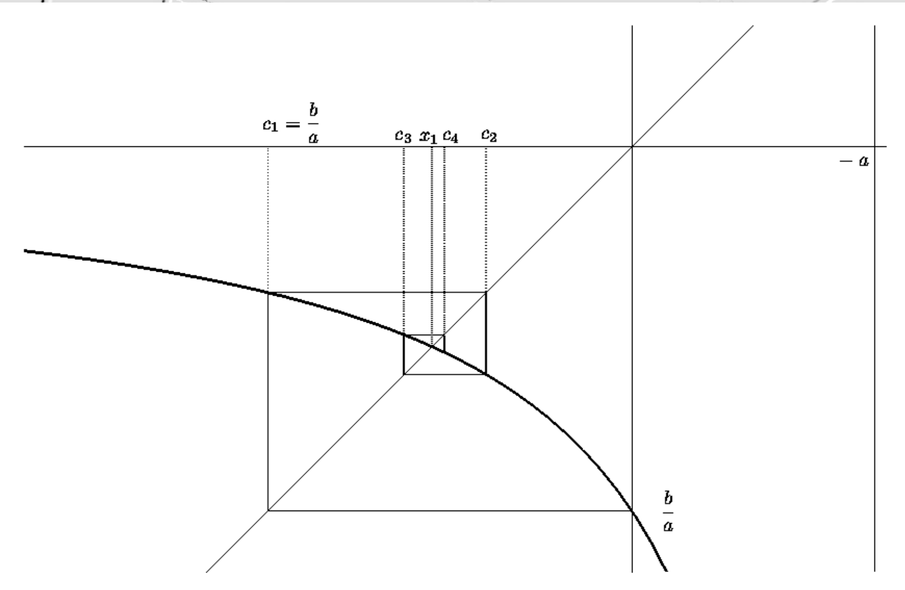
se e solo se

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$$

La convergenza della successione è molto rapida, come si vede dall'ingrandimento del grafico precedente.



$a < 0, b > 0$



La successione oscilla come nel caso precedente tuttavia, in questo caso, la frazione continua converge alla radice negativa dell'equazione $x^2 + ax - b = 0$

$a < 0, b < 0$

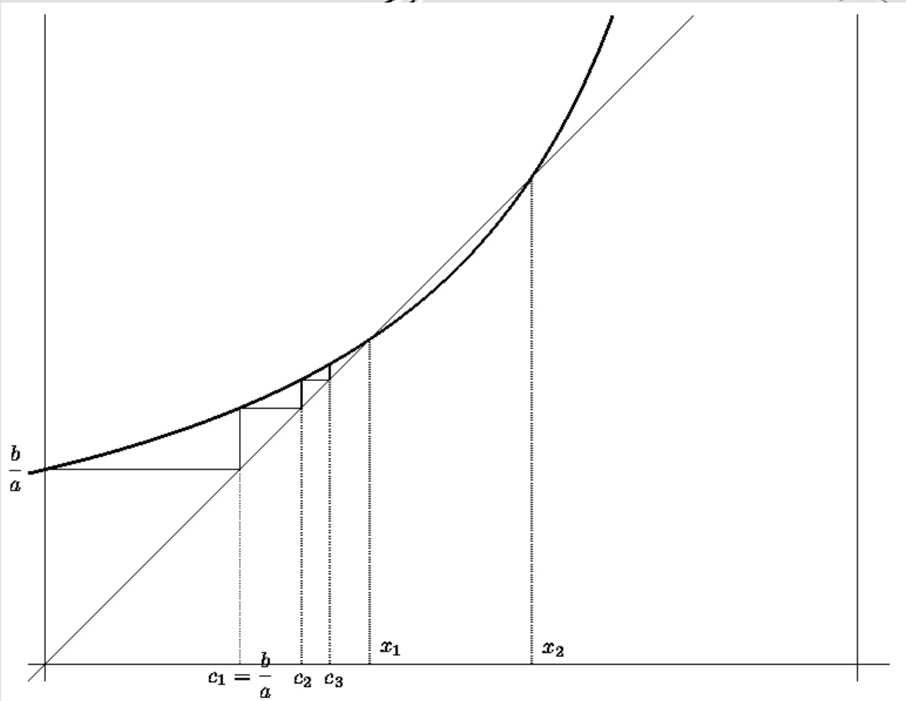
L'equazione

$$x^2 + ax - b = 0$$

può non avere soluzioni reali; Tuttavia, se

$$\Delta = \frac{a^2}{4} + b \geq 0$$

possiamo studiare la successione con l'ausilio del seguente grafico



$$c_1 = \frac{b}{a} < x_1 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$$

Per $a = 2$, $b = 1$, avremo

$$x^2 + 2x - 1$$

Per $a = 2$, $b = 1$, avremo

$$x^2 + 2x - 1$$

le cui radici sono

$$-1 \pm \sqrt{1+1} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Procedendo come indicato in precedenza

$$x(x+2)=1$$

Procedendo come indicato in precedenza

$$x(x+2)=1$$

$$x=\frac{1}{x+2}$$

Procedendo come indicato in precedenza

$$x(x+2)=1$$

$$x=\frac{1}{x+2}$$

e si può esprimere la soluzione positiva dell'equazione come frazione continua

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}}$$

$$\dots\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}$$

converge a $-1+\sqrt{2}$ **soluzione positiva dell'equazione**

Possiamo pertanto scrivere che

$$-1+\sqrt{2} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}}}}$$

ovvero

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}$$

$$\dots \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}$$

ed ottenere le seguenti approssimazioni

ed ottenere le seguenti approssimazioni

$$1 + \frac{1}{2} = 1.5$$

ed ottenere le seguenti approssimazioni

$$1+\frac{1}{2}=1.5$$

$$1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=1+\frac{2}{5}=\frac{7}{5}=1.4$$

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=\frac{17}{12}=1.41\overline{6}$$

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=\frac{17}{12}=1.41\overline{6}$$

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}=\frac{41}{29}=1.4137931$$

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}} = \frac{99}{70} = 1.41428571$$

Per $a = 1$, $b = 1$ **otteniamo l'equazione**

$$x^2 + x - 1$$

Per $a = 1$, $b = 1$ **otteniamo l'equazione**

$$x^2 + x - 1$$

le cui radici sono

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Procedendo come indicato in precedenza

$$x(x+1) = 1$$

Procedendo come indicato in precedenza

$$x(x+1) = 1$$

$$x = \frac{1}{x+1}$$

Procedendo come indicato in precedenza

$$x(x+1) = 1$$

$$x = \frac{1}{x+1}$$

e si può esprimere la soluzione positiva dell'equazione come frazione continua

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}$$

$$\dots\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}$$

converge alla soluzione positiva dell'equazione cioè al valore

converge alla soluzione positiva dell'equazione cioè al valore

$$\tau = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

converge alla soluzione positiva dell'equazione cioè al valore

$$\tau = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

che individua la

Sezione Aurea