=

Revised: 21 settembre 2004 **12h : 5min**

A.A.2003/2004

Indice

La prima volta di =

Il segno uguale compare la prima volta in un libro di Robert Recorde pubblicato nel 1557.
Recorde studiò ed insegnò matematica ad Oxford e a Cambridge e scrisse libri di aritmetica geometria ed astronomia

The Arte

as their workes doe extende) to distincte it onely into twoo partes. Whereof the firste is, *when one nomber is equalle unto one other*. And the seconde is, *when one nomber is compared as equalle unto .2. other nombers*.

Alwaies willyng you to remẽber, that you reduce your nombers, to their leaste denominations, and smalleste formes, before you procede any farther.

And again, if your *equation* be soche, that the greateste denomination *Cosike*, be ioined to any parte of a compounde nomber, you shall tourne it so, that the nomber of the greateste signe alone, maie stande as equalle to the reste.

And this is all that neadeth to be taughte, concernyng this woorke.

Howbeit, for easie alteratiõ of *equations*. I will propounde a fewe exãples, bicause the extraction of their rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to avoide the tediouse repetition of these woordes: is equalle to: I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: ═══, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers.

1. 14.ze. + .15.φ ═══ 71.φ.
2. 20.ze. — .18.φ ═══ .102.φ.
3. 26.ʒ. + 10ze ═══ 9.ʒ. — 10ze + 213.φ.
4. 19.ze + 192.φ ═══ 10ʒ. + 108φ — 19ze
5. 18.ze + 24.φ. ═══ 8.ʒ. + 2.ze.
6. 34ʒ — 12ze ═══ 40ze + 480φ — 9.ʒ.

Egli introdusse il segno di uguale con queste parole

To avoide the tediouse repetition of these woordes: is equalle to: I will settle as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or gemowe [twin] lines of one lengthe: =, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle.

Robert Recorde, The Whetstone of Witte (1557).

L’importanza dei simboli: l’età di Diofanto

L’introduzione di un trattamento simbolico introduce notevoli semplificazioni nella risoluzione di problemi.

Un esempio

(da Antologia Palatina - Metrodoro di Bisanzio, Grammatico ed Aritmetico 500 D.C.)

Ecco la tomba che racchiude Diofanto; una meraviglia da contemplare!

Con artificio aritmetico la pietra insegna la sua età: Dio gli concesse di rimanere fanciullo un sesto della sua vita, dopo un altro dodicesimo le sue guance germogliarono; dopo un settimo egli accese la fiaccola del matrimonio; e dopo cinque anni gli nacque un figlio.

Ma questi, giovane e disgraziato e pur tanto amato, aveva appena raggiunto la metà dell'età cui doveva arrivare suo padre, quando morì.

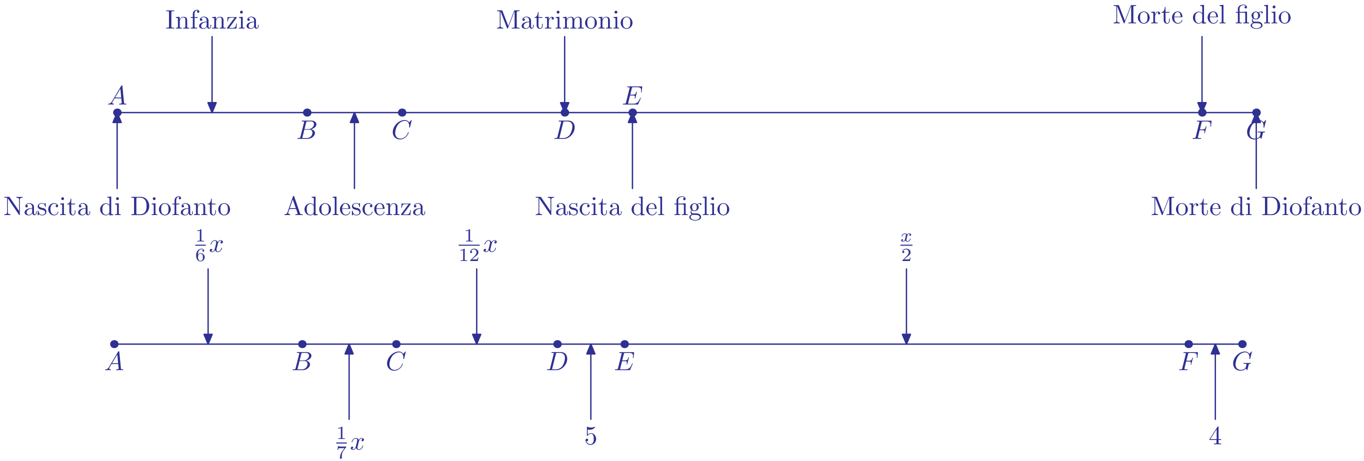
Quattro anni ancora mitigando il proprio dolore con l'occuparsi della scienza dei numeri, attese Diofanto prima di raggiungere il termine della sua esistenza.

Quindi Diofanto

- Trascorse $\frac{1}{6}$ della sua vita nell'infanzia
- Dopo ancora $\frac{1}{12}$ della sua vita la sua barba crebbe folta
- Si sposò dopo che fu trascorso ancora $\frac{1}{7}$ della sua vita
- E 5 anni dopo ebbe un figlio
- Il figlio visse la metà degli anni del padre e morì 4 anni prima di lui

Quanto visse Diofanto? E quando si sposò? E quando nacque suo figlio? E quando morì?

Per risolvere il problema possiamo aiutarci con un disegno.



Con notazioni moderne, posto x l'età a cui Diofanto morì possiamo scrivere che

$$x = \frac{1}{6}x + \frac{1}{7}x + \frac{1}{12}x + 5 + \frac{x}{2} + 4$$

e risolvendo come d'uso:

$$x = \frac{1}{6}x + \frac{1}{7}x + \frac{1}{12}x + 5 + \frac{x}{2} + 4$$

da cui

$$x = \frac{9}{12}x + \frac{1}{7}x + 9$$

e

$$\frac{3}{12}x - \frac{1}{7}x = 9$$

$$\frac{9}{84}x = 9 \qquad , \qquad x = 84$$

Un Problema Egizio

Il papiro di Rhind (1700 a. C.), noto anche come papiro Ahmes dal nome dell'autore, è conservato al British Museum di Londra.

Il problema 25 in esso riportato dice:

Una quantità sommata con la sua metà diventa 16.

Soluzione Moderna:

$$x + \frac{1}{2}x = 16$$

$$\frac{3}{2}x = 16$$

$$3x = 32$$

$$x = \frac{32}{3} = 10 + \frac{2}{3}$$

Soluzione Egizia:

Conta con 2. Allora

$$\left(1+\frac{1}{2}\right) \text{ di } 2 \text{ è } 3.$$

Quante volte 3 deve essere moltiplicato per dare 16, lo stesso numero di volte deve essere moltiplicato 2 per dare il numero esatto.

Allora dividi 16 con 3. Fa $5+\frac{1}{3}$.

Ora moltiplica $5+\frac{1}{3}$ per 2. Fa $10+\frac{2}{3}$.

Hai fatto come occorre:

la quantità è $10+\frac{2}{3}$;

la sua metà $5+\frac{1}{3}$;

la loro somma 16.

Metodo della Falsa Posizione

Invece di indicare l'incognita con x, si lavora con un numero (2 nel nostro caso).

Se operando su di esso, come vuole l'enunciato, si perviene proprio al risultato richiesto (16), allora il problema è risolto.

Altrimenti si trova il rapporto

$$\frac{\text{risultato richiesto} \quad (16)}{\text{risultato ottenuto} \quad [(1+\frac{1}{2})2 = 3]} = \frac{16}{3}$$

Tale rapporto è lo stesso tra il numero cercato e quello posto.

Il numero cercato è uguale al prodotto del rapporto per il numero posto

$$(\frac{16}{3}2 = \frac{32}{3} = 10 + \frac{2}{3})$$

Il procedimento è legato alla proporzionalità diretta tra i numeri di partenza e i risultati ottenuti

$$x : 2 = 16 : 3$$

L'incognita appare esplicitamente per la prima volta in Diofanto che la chiama aritmos, cioè numero incognito, e lo indica con il simbolo ξ,

Un Problema Babilonese

Problema (da una tavoletta Babilonese).

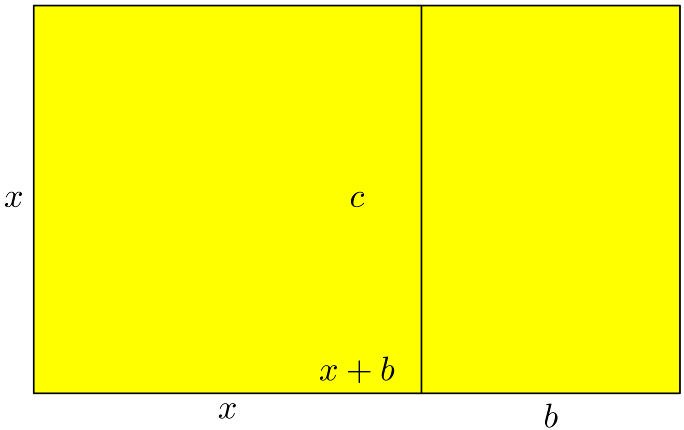
La lunghezza di un rettangolo eccede la sua larghezza di 7. La sua area è 60.

Trovare la lunghezza e la larghezza del rettangolo.

La soluzione babilonese può essere tradotta come segue:

- Dimezza 7 quantità di cui la lunghezza eccede la larghezza; Il risultato è 3.5
- Moltiplica 3.5 per 3.5 Il risultato è 12.25
- Aggiungi 60 a 12.25 Il risultato è 72.25
- Trova la radice quadrata di 72.25 Il risultato è 8.5
- Considera 8.5 ed 8.5, Sottrai 3.5 all'uno ed aggiungilo all'altro.
- 12 è la lunghezza 5 è la larghezza.

Illustriamo la situazione con qualche immagine



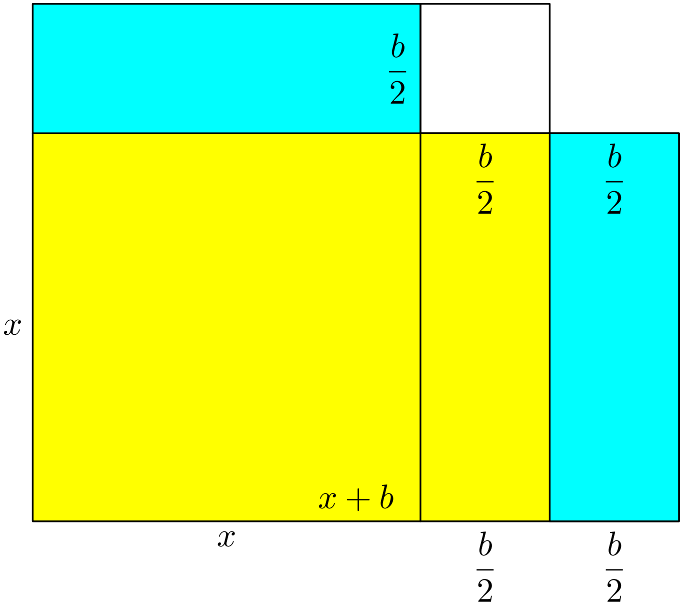
Sia

$$\mathbf{c}$$

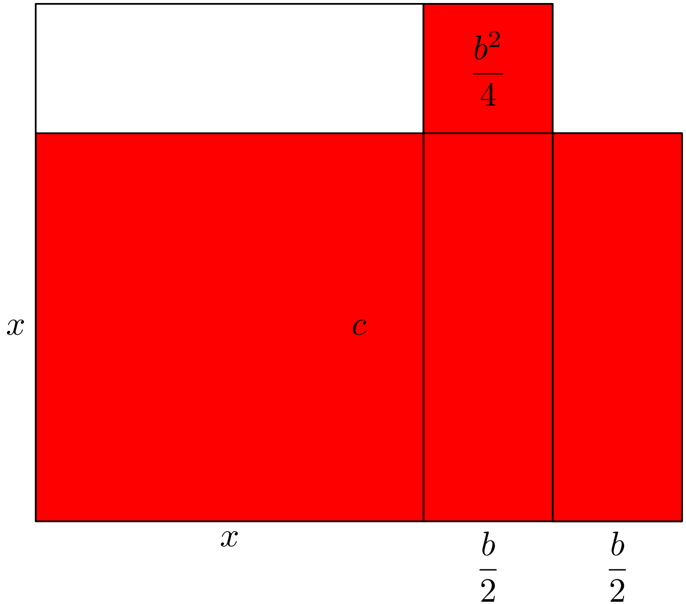
l'area del rettangolo i cui lati sono

$$\mathbf{x} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{x} + \mathbf{b}) = \mathbf{c}$$

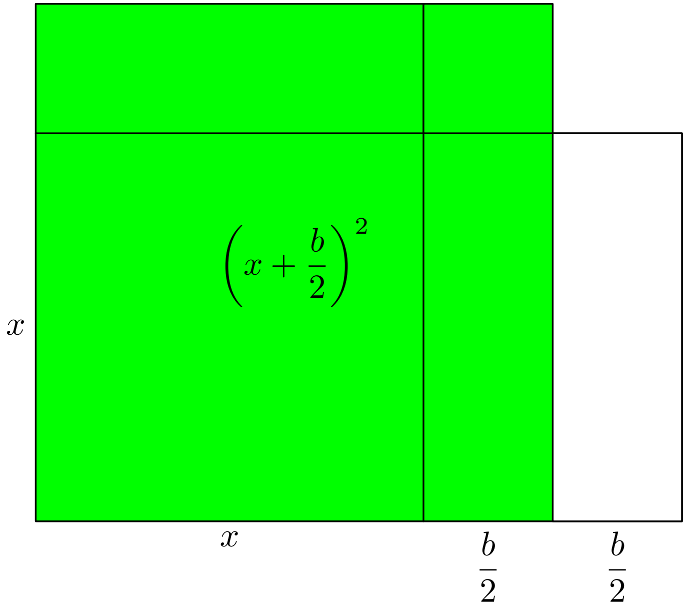


I rettangoli azzurri hanno la stessa area.



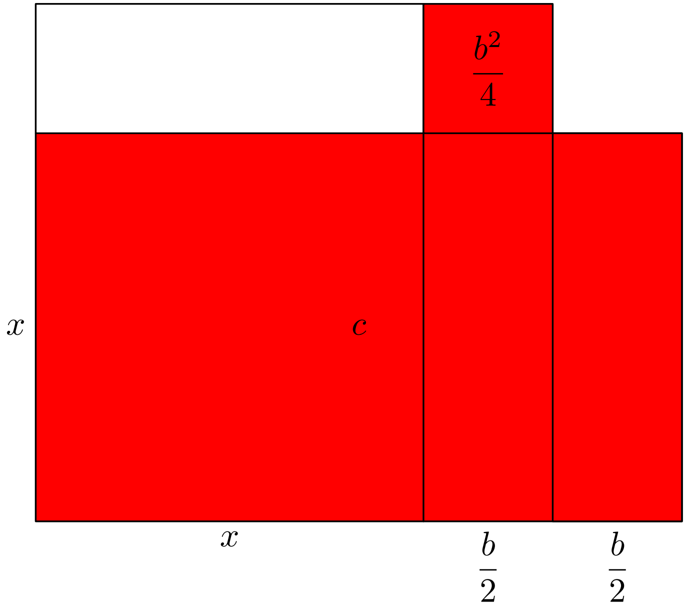
L'area colorata in rosso è

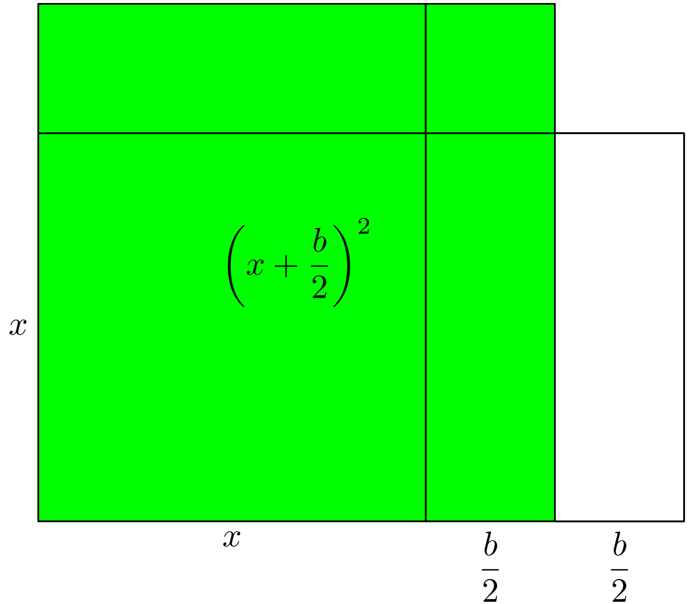
$$\frac{b^2}{4} + c$$



L'area colorata in verde è

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$$





$$\frac{b^2}{4}+c$$

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$$

Quindi

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} + c$$

e quindi

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + c}$$

Il Metodo di Al Khwarizmi

Anche il matematico arabo Al Khwarizmi propose attorno all'800 D.C. un metodo per risolvere equazioni di 2^o grado

Egli propose il problema come segue

Un quadrato e 10 radici sono uguali a 39.

La questione è : Qual'è il quadrato che combinato con 10 delle sue radici darà una somma di 39?

Il modo di risolvere questo tipo di equazioni è prendere la metà delle radici. Ora le radici nel problema precedente sono 10. Perciò prendi 5, che moltiplicato per se stesso dà 25, quantità cui deve essere aggiunto 39 ottenendo 64.

Avendo estratto la radice si ottiene 8 sottraendo dal quale 5 si ricava 3. Il numero 3 pertanto è una radice del quadrato cercato che di per sè stesso è 9.

Il problema si può enunciare in termini moderni come segue:

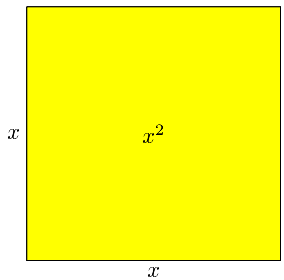
Trovare x tale che

$$x^2 + 10x = 39$$

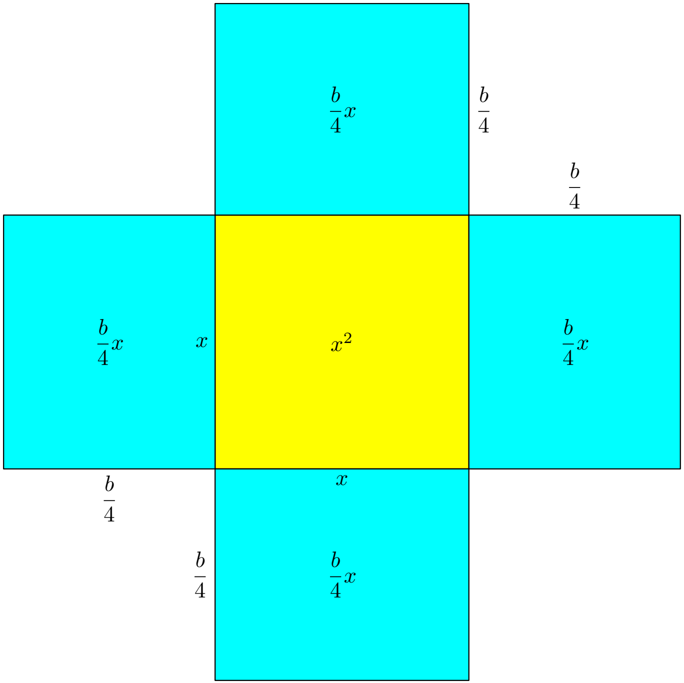
In generale

$$x^2 + bx = c \qquad b, c > 0$$

Al Kwarizmi fornisce una dimostrazione geometrica che è illustrata dalle seguenti figure.



Il quadrato ha lato x ed area x^2.



I rettangoli Azzurri hanno lati

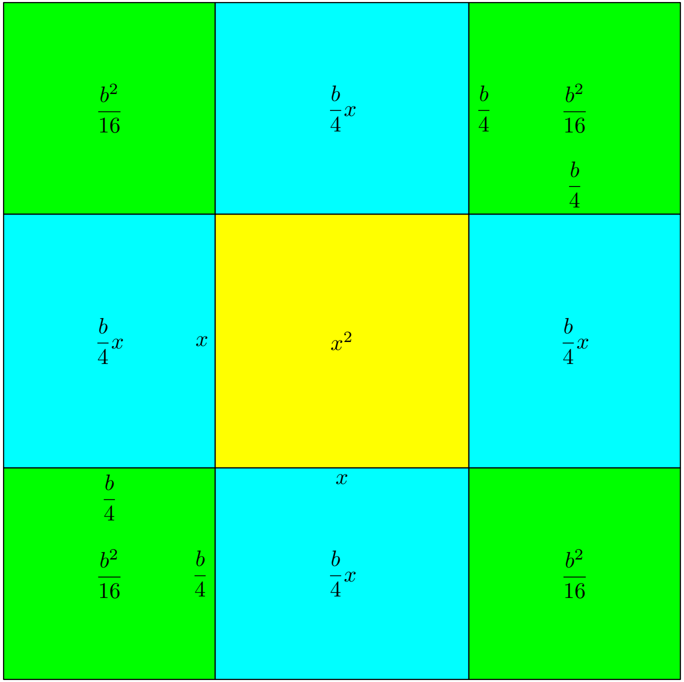
$$x \quad \text{e} \quad \frac{b}{4}$$

e quindi area

$$\frac{b}{4}x$$

Le aree colorate (Gialle e Azzurre) valgono in totale

$$x^2 + 10x = x^2 + bx = c$$



I rettangoli Verdi hanno area

$$4 * \frac{b^2}{16} = \frac{b^2}{4}$$

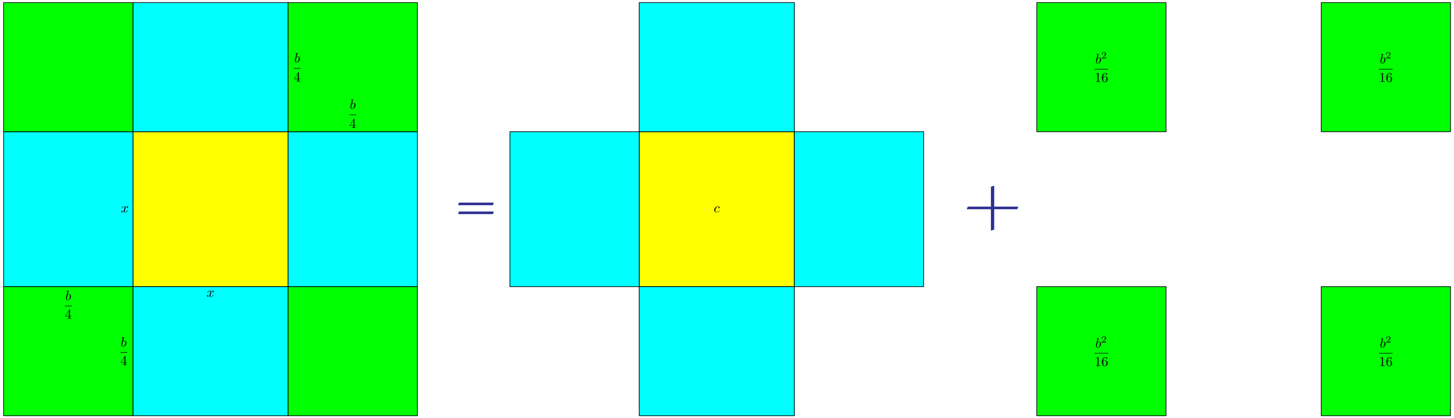
Il quadrato grande ha area

$$\left(x + \frac{b}{4} + \frac{b}{4}\right)^2 =$$

$$= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Ne deduciamo

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{b^2}{4}$$



$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{b^2}{4}$$

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{c+\frac{b^2}{4}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2+4c}}{2}$$

La diversità di uguale

Una relazione di uguaglianza è una *Relazione Binaria*

che risulti

- Riflessiva
- Simmetrica
- Transitiva

Diciamo che è assegnata una relazione binaria $\mathcal{R}$ se siamo in grado di stabilire se l'affermazione

$$a\mathcal{R}b$$

è vera o falsa.

Diciamo che la relazione è riflessiva se

$$a\mathcal{R}a$$

Diciamo che la relazione è simmetrica se

$$a\mathcal{R}b \quad\Longrightarrow\quad b\mathcal{R}a$$

Diciamo che la relazione è transitiva se

$$a\mathcal{R}b \quad \text{e} \quad b\mathcal{R}c \quad\Longrightarrow\quad b\mathcal{R}c$$

Nella pratica tuttavia il concetto di uguaglianza è spesso non chiaro

L'uso di scrivere argomentazioni del tipo

$$a^3 - ab^2 = a(a^2 - b^2) = a(a+b)(a-b)$$

anche se corrette, inducono sistematicamente a deviare dall'avere presente il fatto che $=$ è una relazione binaria.

= in Geometria

Nella Geometria Euclidea, due figure sono uguali se possono essere sovrapposte mediante

- Traslazioni
- Rotazioni
- Simmetrie

È interessante rileggere ciò che Euclide scrive a proposito dell'uguaglianza.

Communes animi conceptiones.

(1) Quae eidem aequalia sunt, etiam inter se aequalia sunt.

(2) Et, si aequalibus aequalia adduntur, tota aequalia sunt.

(3) Et, si ab aequalibus aequalia subtrahuntur, reliqua sunt aequalia.

(4) Et quae inter se congruunt, aequalia sunt.

(5) Et totum parte maius est.

Sostanzialmente affida al buon senso il concetto di uguaglianza anche se è evidente il significato di relazione binaria.

Uguaglianza di numeri

Quando due numeri sono uguali?

Prima ancora occorre rispondere alla domanda:

Che cosa sono i numeri?

Possiamo distinguere

- Naturali
- Interi
- Razionali
- Reali

I numeri Naturali

Servono per contare

Si possono definire usando soltanto due concetti elementari

$$1$$

e

Successivo

mediante

Gli assiomi di Peano

- (A1) $1 \in \mathbb{N}$
- (A2) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists! n' \in \mathbb{N}$ che è il successivo di n
- (A3) $\forall n \in \mathbb{N},\ n' \neq 1$
- (A4) $n, m \in \mathbb{N},\ n' = m' \Rightarrow n = m$
- (A5) se $K \subset \mathbb{N}$, $1 \in K$ e $k \in K \Rightarrow k' \in K$, allora $K = \mathbb{N}$.

Per i numeri naturali l'uguaglianza è un concetto primitivo

Leopold Kronecker diceva che i numeri naturali ci sono stati dati da Dio

mentre tutto il resto della matematica è opera dell'uomo.

Una sorta di definizione di uguale è contenuta in (A4)

I numeri Interi

Chiamiamo insieme dei numeri interi l'insieme

$$\mathbb{Z} = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Negli interi l'uguaglianza si definisce mediante la:

Se $a, b \in \mathbb{Z}$, $a = (m, n)$ e $b = (p, q)$, diciamo che

$$a = b \quad \Leftrightarrow \quad m + q = n + p.$$

I numeri Razionali

Chiamiamo insieme dei numeri razionali l'insieme

$$\mathbb{Q} = \{(m, n) : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

Nei razionali l'uguaglianza si definisce mediante la:

Siano $a, b \in \mathbb{Q}$, $a = (m, n)$, $b = (p, q)$, diciamo che

$$a = b \quad \Leftrightarrow \quad m \cdot q = n \cdot p$$

I numeri Reali

Si indica con $\mathbb{R}$

Se ne può costruire un modello in diverse maniere.

La retta Reale

Il più elementare modello dei numeri reali identifica l'insieme dei numeri reali con una retta euclidea e i numeri reali con i punti della retta.

In questo caso l'uguaglianza di due numeri reali è da intendersi definita dalla coincidenza dei corrispondenti punti.

Le Sezioni di Dedekind

Chiamiamo sezione di Dedekind un sottoinsieme $\mathbf{D} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbf{D} \neq \emptyset$, $\mathbf{D} \neq \mathbb{Q}$, tale che $\forall \mathbf{p} \in \mathbf{D}$

$$\{\mathbf{q} \in \mathbb{Q} : \mathbf{q} < \mathbf{p}\} \subset \mathbf{D}$$

ed $\exists \mathbf{r} \in \mathbf{D}, \mathbf{r} > \mathbf{p}$.

Chiameremo $\mathbb{R}$ l'insieme di tutte le sezioni di Dedekind.

Diciamo che due numeri reali sono uguali se le corrispondenti sezioni sono uguali e questo rende necessario assicurarsi che due diverse sezioni non individuino lo stesso numero reale.

La costruzione di Cantor

Richiede la conoscenza della teoria dei limiti per le successioni.

Identifica un numero reale mediante la classi di equivalenza di successioni di Cauchy

Allineamenti decimali infiniti

Identifica un numero reale mediante un allineamento infinito di cifre

(ad esempio decimali $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0$)

In tal caso due numeri reali sono uguali se la sequenza di cifre è la stessa avendo però cura di identificare la sequenza

$$0.99999999999999 \ldots 999999999 \ldots 99999999 \ldots\ldots$$

con

$$1, 0000000000000 \ldots\ldots\ldots 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 000000$$

A Proposito di Cantor

Cantor dimostrò che l'insieme dei numeri reali non è numerabile con il seguente argomento:

Sia

$$\mathfrak{U} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \in (0,1)\}$$

Se $\mathfrak{U}$ fosse numerabile potremmo mettere tutti i numeri contenuti in $\mathfrak{U}$ in corrispondenza con i numeri naturali e quindi potremmo scriverli in successione.

Gli elementi di $\mathfrak{U}$ saranno allineamenti di cifre del tipo:

$$u_1 = 0, c_1^1\, c_2^1\, c_3^1\, c_4^1 \cdots\cdots c_n^1 \cdots$$
$$u_2 = 0, c_1^2\, c_2^2\, c_3^2\, c_4^2 \cdots\cdots c_n^2 \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_1 = 0, c_1^k\, c_2^k\, c_3^k\, c_4^k \cdots\cdots c_n^k \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Se $u = 0, d_1\, d_2\, d_3 \cdots\cdots d_n \cdots$ e se

$$d_1 \neq c_1^1\,,\ d_2 \neq c_2^2\,,\ d_3 \neq c_3^3\,,\ \cdots\cdots\,,\ d_k \neq c_k^k$$
$$d_k \neq 9$$

avremmo $u \in (0, 1)$ ma $u \neq u_k$ per ogni k

I Numeri Floating Point

Quando si usa una macchina per eseguire calcoli i numeri sono rappresentati usando lo standard

IEEE 754

di solito identificato con la locuzione

Floating Point Numbers

Ogni numero reale è rappresentato in singola precisione mediante

- un segno (1 bit)

$$+ \quad -$$

- un esponente (8 bits=1 byte) compreso in

$$[-127, 127]$$

- una mantissa (23 bits) compresa in

$$[0, 8388607]$$

Un tale sistema causa inconvenienti quando si opera con numeri che differiscono per troppi ordini di grandezza.

$$(1 + 10^{20}) - 10^{20} = 0$$
$$1 + (10^{20} - 10^{20}) = 1$$

Una definizione assiomatica dei reali

Possiamo inquadrare la definizione del sistema numerico in maniera assiomatica.

In altre parole definiamo l'insieme dei numeri reali attraverso le proprietà che esso deve soddisfare.

Gli assiomi per definire $\mathbb{R}$ sono i seguenti

Sono assegnati i numeri reali, $\mathbb{R}$, se:

- è assegnato un insieme $\mathbb{R}$
- sono assegnate due leggi, che chiamiamo somma e prodotto ciascuna delle quali associa ad ogni coppia $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un elemento di $\mathbb{R}$ che indicheremo con $x + y$ ed $x \cdot y$
- è assegnata in $\mathbb{R}$ una relazione di equivalenza che indicheremo con il simbolo $=$ (rispetto alla quale esistono in $\mathbb{R}$ almeno due elementi distinti)
- è assegnata in $\mathbb{R}$ una relazione d'ordine che indicheremo con $<$

Valgono le seguenti proprietà per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$:

(1) $x + y = y + x$

(proprietà commutativa dell'addizione)

(2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

(proprietà associativa dell'addizione)

(3) esiste $\theta \in \mathbb{R}$ tale che $x + \theta = x$, per ogni $x \in \mathbb{R}$

(esistenza di un elemento neutro rispetto all'addizione)

- *l'elemento neutro rispetto alla somma è unico in* $\mathbb{R}$
  infatti se z, z' *sono due elementi neutri rispetto alla somma si ha*

$$z = z + z' = z' + z = z'$$

- **sarà indicato d'ora innanzi con** 0

(4) $xy = yx$

(proprietà commutativa della moltiplicazione)

(5) $(xy)z = x(yz)$

(proprietà associativa della moltiplicazione)

(6) esiste $\zeta \in \mathbb{R}$ tale che $x\zeta = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

(esistenza di un elemento neutro rispetto alla moltiplicazione)

- *l'elemento neutro rispetto al prodotto è unico in* $\mathbb{R}$

  Se $\mathbf{u}, \mathbf{u}'$ *sono due elementi neutri rispetto al prodotto siha*

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}\mathbf{u}' = \mathbf{u}'$$

- **sarà indicato d'ora innanzi con 1**

(7) $x(y+z) = xy + xz$
(proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione)

(8) è vera una ed una sola delle seguenti affermazioni

$$x < y \qquad , \qquad x = y \qquad , \qquad y < x$$

(legge di tricotomia)

(9) se $x < y$ allora $x + z < y + z$
(invarianza dell'ordine rispetto all'addizione)

(10) se $x < y$ e $0 < z$ allora $xz < yz$
(invarianza dell'ordine rispetto alla moltiplicazione per elementi positivi)

(11) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $x' \in \mathbb{R}$ tale che $x' + x = 0$

(esistenza dell'inverso rispetto all'addizione)

- *per ogni $x \in \mathbb{R}$ l'inverso di x rispetto alla somma è unico, infatti siano x', x'' tali che $x' + x = x'' + x = 0$ allora si ha $x' + x + x' = x'' + x + x'$ e ne segue che $x' = x''$*
- **verrà indicato solitamente con $-x$**

(12) per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esiste $x'' \in \mathbb{R}$ tale che $x''x = 1$

(esistenza dell'inverso rispetto alla moltiplicazione)

- *per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ l'inverso di x rispetto al prodotto è unico Siano x', x'' tali che $x'x = x''x = 1$ si ha $x'xx' = x''xx'$ e ne segue $x' = x''$*
- **verrà indicato solitamente con $1/x$ o con x^{-1}**

(13) Per ogni $\boldsymbol{A}, \mathbf{B} \subset \mathbb{R}$, $\boldsymbol{A}, \mathbf{B} \neq \emptyset$ tali che

$$a \leq b \quad \forall a \in A\,,\ \forall b \in B$$

esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$(1) \qquad a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

(esistenza di un elemento separatore).

Si possono provare alcune proprietà dei numeri reali.

(1) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \;\; x + z = y + z \iff x = y$ (legge di cancellazione rispetto alla somma)

(2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\,,\; z \neq 0\,,\; xz = yz \iff x = y$ (legge di cancellazione rispetto al prodotto)

(3) $x0 = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(4) $(-(-x)) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(5) $(-x) + (-y) = -(x + y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(6) $(-x)y = -xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(7) $(-x)(-y) = xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(8) $xy = 0$ se e solo se $(x = 0)$ or $(y = 0)$

(9) $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

(10) $x > 0$ implica $-x < 0$

(11) $xx > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

(12) $1 \neq 0$

(13) $1 > 0$

(14) $x > 0$ implica $x^{-1} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

All'interno di $\mathbb{R}$ si definisce $\mathbb{N}$ come il più piccolo insieme induttivo e da $\mathbf{N}$ si costruiscono poi $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

Un nuovo modo di intendere =

Siano x ed y due numeri reali e supponiamo di poter verificare che x ed y differiscono per meno di qualunque errore sia fissato.

Possiamo dire che x ed y sono uguali?

La risposta è si;

Per rendersene ragione è necessario cercare di formalizzare un po' meglio quanto abbiamo affermato.

Innanzi tutto: come calcolare la distanza tra due numeri.

Possiamo ricorrere alla rappresentazione di $\mathbb{R}$ per mezzo di una retta euclidea

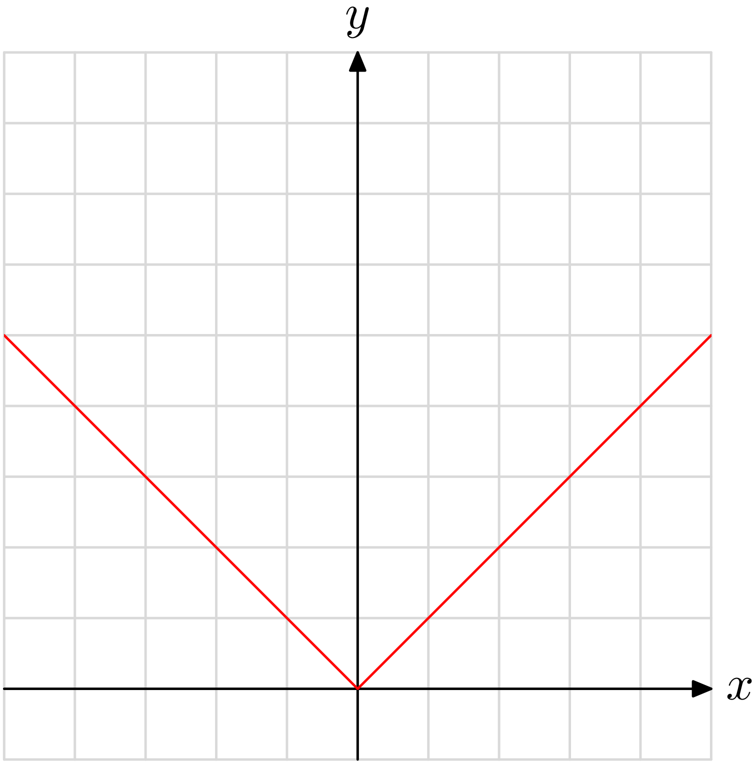
la distanza di x da y è $y - x$ se $x < y$ cioè se $y - x > 0$

mentre è $x - y$ se $y < x$ cioè se $y - x < 0$

Per esprimere la distanza quindi è naturale definire la quantità

$$\begin{cases} y - x & y - x > 0 \\ -(y - x) & y - x < 0 \end{cases}$$

Si chiama $|y - x|$



Cioè

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$|x| \geq 0$$

Pertanto possiamo riformulare la domanda come segue

Siano x ed y due numeri reali tali che

per ogni $\epsilon > 0$

$|y - x| < \epsilon$

Allora $x = y$

Infatti

Se $|y - x| \neq 0$ potremmo scegliere $\epsilon = |y - x|/2$ e otterremo

$$|y - x| < |y - x|/2$$

da cui

$$1 < 1/2$$

il che è assurdo.

Quando può servire uno simile criterio di uguaglianza?

Torniamo all'affermazione cui abbiamo accennato parlando di allineamenti decimali.

$$0.9999...99...9999..9.. = 1,000...0....00..$$

Dobbiamo innanzi tutto precisare le notazioni:

Cosa si intende per

$$0.9999999999...99999...9999.....$$

Evidentemente

$$0.9 = \frac{9}{10}$$

$$0.99 = \frac{9}{10} + \frac{9}{100}$$

$$0.999 = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000}$$

$$0.\underbrace{999\ldots9}_{n\text{volte}} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots\ldots + \frac{9}{10^n}$$

Se definiamo

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=1} a_k = a_1 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} a_k = \sum_{k=1}^{k=n} a_k + a_{n+1} \end{cases}$$

Possiamo scrivere

$$0.\underbrace{999\ldots9}_{n\text{volte}} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{9}{10^k}$$

e quindi

$$0.9999999999\ldots99999\ldots9999\ldots\ldots = \sum_{k=1}^{k=+\infty} \frac{9}{10^k}$$

Ma sommare infiniti numeri non è naturale

Occorre definire cosa si intende

Per affermare che

$$0.9999999999\ldots99999\ldots9999\ldots\ldots = \sum_{k=1}^{k=+\infty} \frac{9}{10^k} = 1$$

possiamo osservare che

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{9}{10^k} < 1$$

e

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{9}{10^k}$$

cresce al crescere di n per cui

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{9}{10^k} < \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{9}{10^k} < 1$$

e

$$1 - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{9}{10^k} < \frac{1}{10^n}$$

per ogni n

Allora per ogni $\epsilon > 0$

$$1 - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{9}{10^k} < \epsilon$$

purchè n sia sufficientemente grande.

Formalmente si scrive

$$1 = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{9}{10^k} = \sum_{k=1}^{k=+\infty} \frac{9}{10^k}$$

Uguaglianza tra funzioni

Si dice che è data una funzione se è assegnato un sottoinsieme $\mathbf{D}$ di $\mathbb{R}$ ed una legge di corrispondenza f che ad ogni $x \in \mathbf{D}$ associa $f(x) \in \mathbb{R}$

Scriviamo

$$f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$$

$$D \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$$

Una funzione è identificata dal suo grafico cio‘e dal sottoinsieme del prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definito da

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in D, y = f(x)\}$$

Si può dire che due funzioni sono uguali in molti modi diversi.

Uguaglianza Puntuale

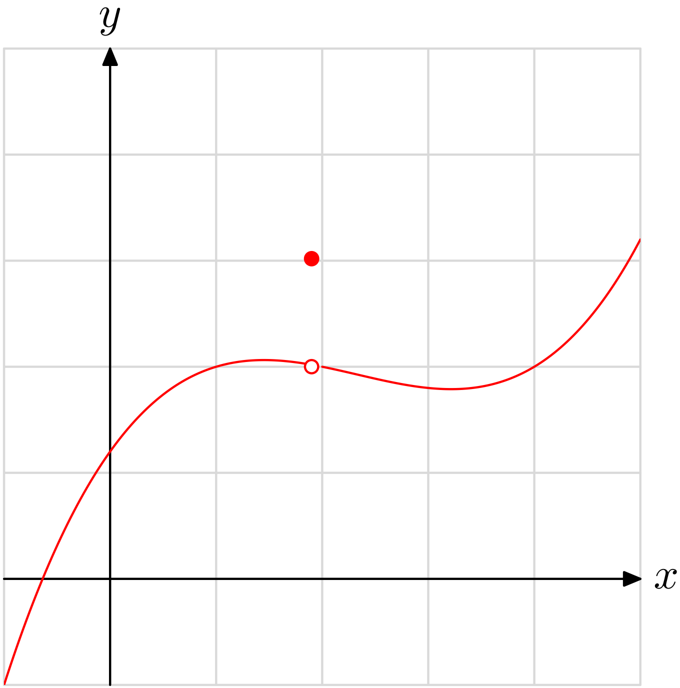
$$f = g$$

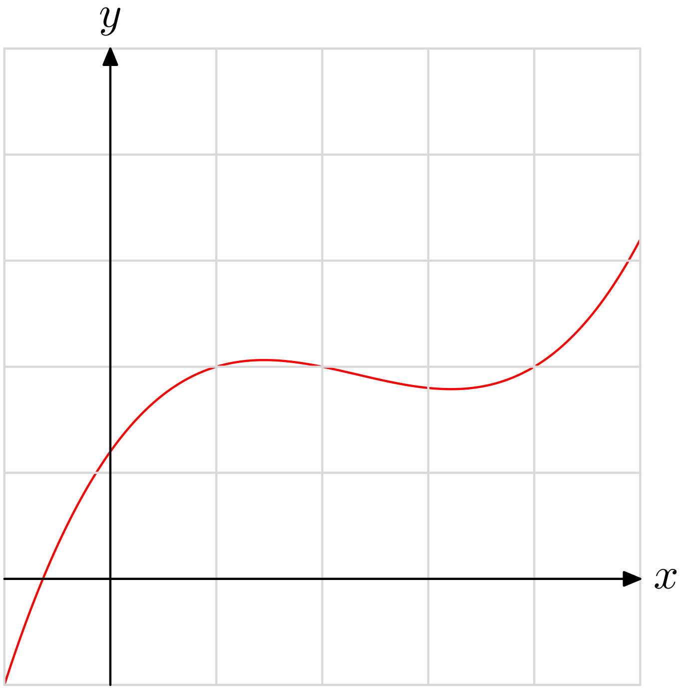
$$f(x) = g(x)$$

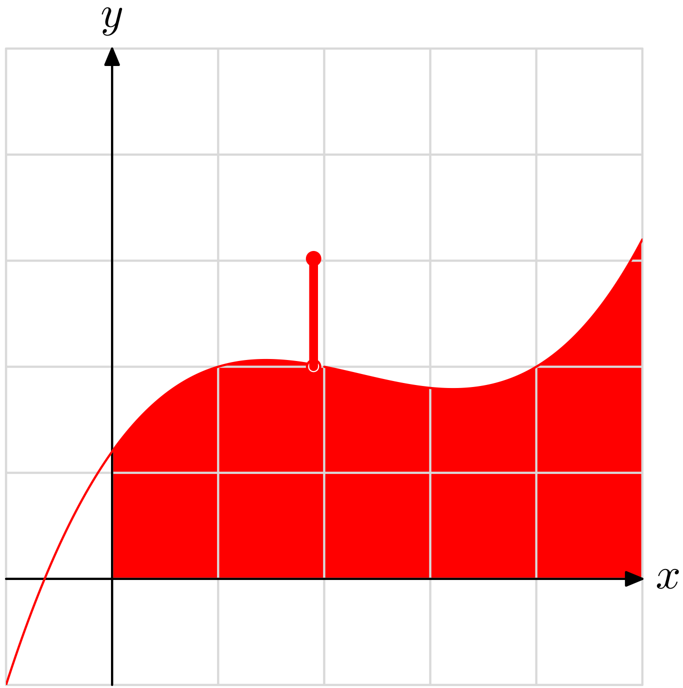
Uguaglianza in media

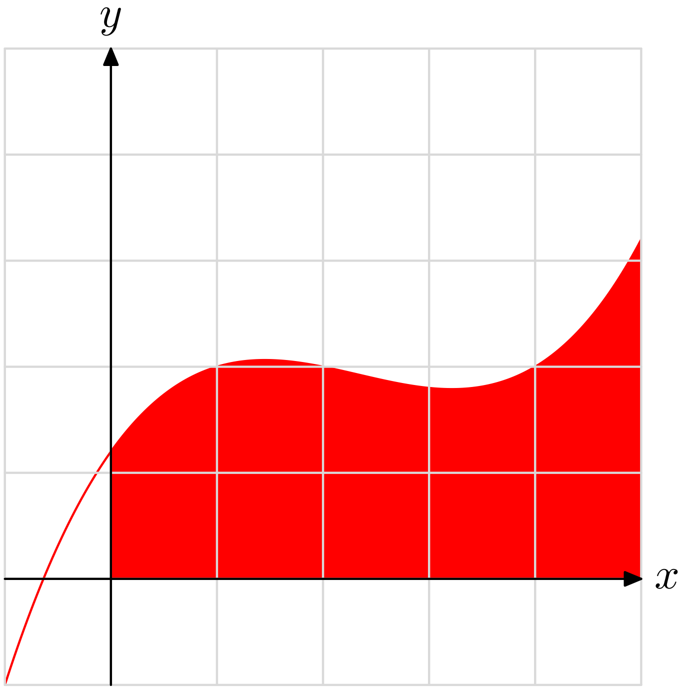
$$f = g$$

l'area sottesa dal grafico di f è uguale all'area sottesa dal grafico di g


y
x


y
x


y
x


y
x

Indice analitico