

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling. verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

La fenomenologia dei linguaggi in matematica



Un elemento costitutivo del pensiero, fattore determinante nel processo di apprendimento, poiché è mediante il linguaggio che “percepriamo” e gestiamo un concetto

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling. verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

Linguaggi più comunemente utilizzati nell'ambito matematico

Linguaggio iconico

Linguaggio simbolico

Linguaggio algebrico

**Linguaggio grafico (grafici nel
piano cartesiano)**

Linguaggio verbale

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling. verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

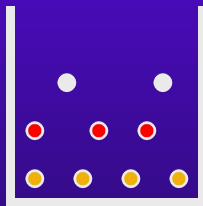
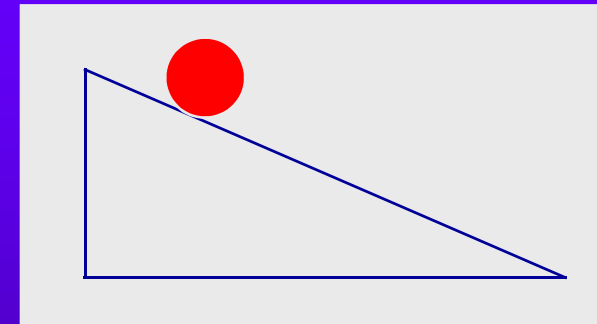
Esempi

Linguaggio iconico

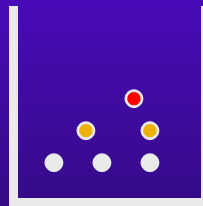
Il linguaggio iconico è una rappresentazione, più o meno schematica, della realtà: esso si avvale di disegni (icone) per raffigurare la realtà presentata nel problema.

Problemi di
probabilità

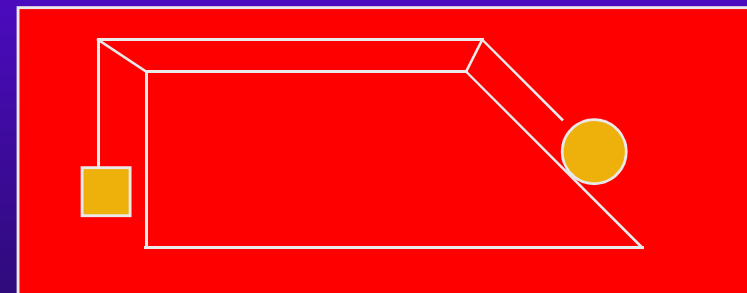
Problemi di
modellizzazione



U_1



U_2



Linguaggi simbolici

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling. verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

Questione lessicale

Duval, Janvier, et al

*Il simbolo è il segno che
appartiene ad un sistema
di convenzioni di
rappresentazione*

Piaget

*Quella funzione
attraverso la quale il
pensiero diventa segno. Il
simbolo contiene ancora
qualche traccia della realtà
rappresentata*

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling. verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

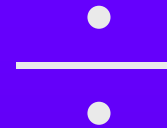
Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

$$\int_a^b f(t) dt$$



Simbolo matematico (o scrittura simbolica)

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling. verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

$$\int_a^b f(t) dt$$

$$\div$$

Simbolo matematico (o scrittura simbolica)

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling. verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

$$\int_a^b f(t) dt$$

$$\div$$

Simbolo matematico (o scrittura simbolica)

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling. verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

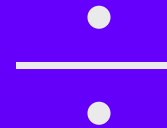
Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

$$\int_a^b f(t) dt$$



Simbolo matematico (o scrittura simbolica)

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling. verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

Linguaggi simbolici

The diagram illustrates two mathematical symbols. On the left is the integral symbol \int , with a red 'dt' to its right. A red arrow points from the text 'Area sottesa' to the integral symbol. Another red arrow points from the text 'scrittura simbolica' to the 'dt' term. On the right is the division symbol \div .

Simbolo matematico (o scrittura simbolica)

Area 'sottesa' dal grafico di f nell'intervallo $[a,b]$ attraverso il riferimento di

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling. verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

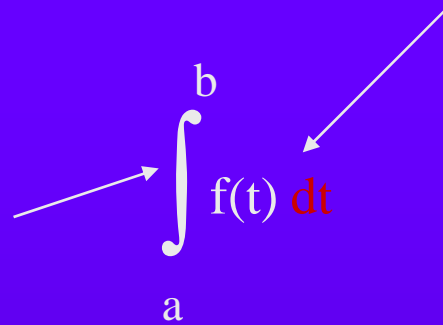
Funz. trasf.

Ling. graf.

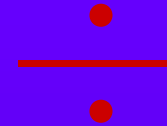
Trian. Frege

Esempi

Linguaggi simbolici



The diagram shows the definite integral symbol $\int_a^b f(t) dt$. Two white arrows point to the upper limit 'b' and the differential 'dt'.



Simbolo matematico (o scrittura simbolica)

Area 'sottesa' dal grafico di f nell'intervallo $[a,b]$ attraverso il riferimento di

$$\sqrt[3]{8}$$

$$\sum_{k=1}^n K$$

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling. verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

Linguaggio Simbolico vs Linguaggio Iconico

Linguaggio Iconico

Non ha bisogno di particolari convenzioni, perché esprime in modo sufficientemente esplicito la realtà

Linguaggio Simbolico

I simboli hanno bisogno di sistemi di convenzioni per esprimere ciò che rappresentano.

2+3 aggiungere, 4-1 sottrarre ecc...

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

Linguaggio simbolico

Linguaggio Verbale

interno

**Parole, espressioni usate nel
dialogo con sé stessi**

- Pianificazione del lavoro
- Controllo del lavoro svolto
- Riflessione (su concetti e metodi utilizzati, su possibili alternative, ecc...)

esterno

Orale e scritto

- Comunicazione ad altri
- “Stabilizzazione” del pensiero e (nella forma scritta) creazione di un ambiente esterno (il testo scritto) su cui riflettere

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Triang. Frege

Esempi

$$2X^2 + 6X - 3 = 0$$

interno

- Ok. È un'equazione di secondo grado.
- Posso usare ad esempio la formula risolutiva: meno b più o meno radice di b al quadrato meno quattro ac, fratto 2a
- Ah... b è pari...allora posso usare la formula ridotta...quella con b mezzi...
- Il delta come viene? Se è negativo...non ci sono soluzioni reali

Pianificazione del lavoro

“Stabilizzazione” del pensiero e (nella forma scritta) creazione di un ambiente esterno (il testo scritto) su cui riflettere

Riflessione (su concetti e metodi utilizzati, su possibili alternative, ecc...)

esterno

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 6}}{2}$$

La radice non è una radice perfetta...Posso portare fuori qualcosa?...no...

Ok. Le soluzioni sono

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{15}}{2}$$

- Fenom.
- Ling.
- L. Iconico
- L. Simbolici
- Sim. vs. Ico
- Ling verbale
- Ling algebrico
- Funz. L. alg.
- Funz. stenogr.
- Funz. sin/gen.
- Funz. trasf.
- Ling. graf.
- Trian. Frege
- Esempi

Vygotskji

Spazio visivo interno

“Spazio” metaforico che si crea nella mente di ciascun individuo e all’interno del quale avvengono i diversi processi cognitivi

Chiave che apre tale spazio

PAROLA

intuizione

interno

esterno

intenzione

Immaginazione della
situazione
problematica

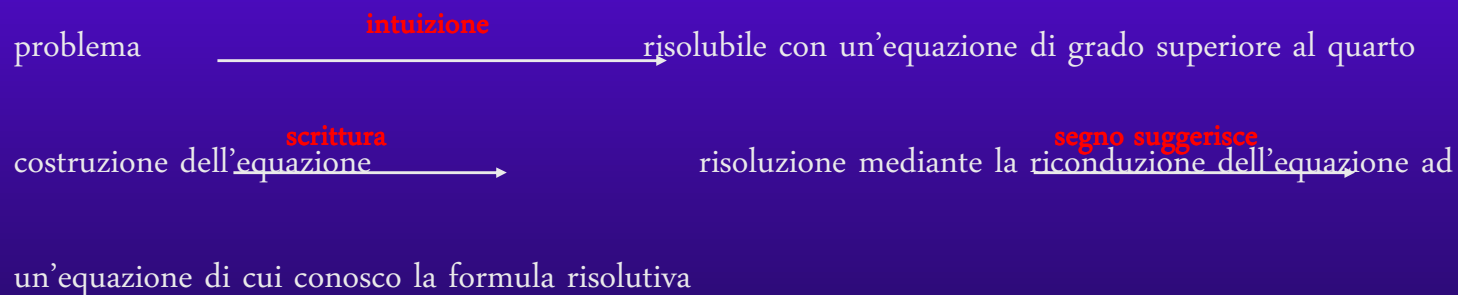


Dinamica

Primo ciclo

- Nascita di un'intuizione
- Stesura dell'intuizione
- Il “segno prodotto” suggerisce (attraverso la traccia scritta, o l'eco ricevuto durante il dialogo con altri) un'idea che torna indietro, e che non è l'equivalente dell'intuizione avuta

Es:



Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

Problema

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

Trovare i punti di intersezione della curva $y = x - 1$ e l'asse delle ascisse.

problema $\xrightarrow{\text{intuizione}}$ risolvibile con un sistema di due equazioni $\xrightarrow{\text{scrittura}}$ costruzione del sistema

metodo di sostituzione $\xrightarrow{\text{segno suggerisce}}$ $\xrightarrow{\text{scrittura}}$

equazione di quarto grado $\xrightarrow{\text{segno suggerisce}}$ equazione riducibile al prodotto di binomi di

secondo grado

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

$$x^4 - 1 = 0$$

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$$

Ecc...

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

Linguaggio simbolico non verbale

Linguaggio algebrico

Scuola italiana e francese (Drouhard)

Un qualunque sistema
di segni che si ottenga
per estensione
coerente del sistema di
segni dell'Aritmetica

Scuola anglosassone

Linguaggio dell'Algebra
elementare: uso di lettere e
regole di calcolo che
consentono il cosiddetto
“calcolo letterale”

$$3+5=8$$

Scrittura 'prototipo' di tipo algebrico

$$a+b=c$$

$$T(a+b)=T(a)+T(b)$$

Estensioni coerenti della prima scrittura

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

Funzioni del Linguaggio Algebrico

- Funzione stenografica
- Funzione di sintesi/generalizzazione
- Funzione di trasformazione

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

Funzione stenografica

Metodo di abbreviazione del linguaggio verbale

Es. 1

= ha la funzione di stenografare la parola “uguale”

+ ha la funzione di stenografare la parola “sommare”

Es. 2

$g(x)=f(1/x)$ si presta a due distinte interpretazioni stenografiche corrette:

1^a interpretazione: $g(x)=f(1/x)$, “g calcolata in x è equivalente ad f calcolata in $1/x$ ”

o per meglio dire: “g(x) è il valore della funzione f calcolata in $1/x$ ”

2^a interpretazione: $g(x)=f(1/x)$, “g è la composizione delle funzioni f ed h, dove $h(x)=1/x$ ”

$$x \xrightarrow{h} 1/x \xrightarrow{f} f(1/x)$$

- Fenom.
- Ling.
- L. Iconico
- L. Simbolici
- Sim. vs. Ico
- Ling verbale
- Ling algebrico
- Funz. L. alg.
- Funz. stenogr.
- Funz. sin/gen.
- Funz. trasf.
- Ling. graf.
- Trian. Frege
- Esempi

Funzione sintesi/generalizzazione

Sintetizza in una formula una “legge”, una “regolarità”, ecc...

Es.: $A = \frac{b \cdot h}{2}$

↗ Stenografica: “area uguale base per altezza diviso due”

↘ Sintetizza in una formula la “legge” per trovare l’area di un triangolo qualunque

Es.: Generalizzazione

$$(2+3) \cdot 5 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5$$

Scritta in generale la proprietà diventa

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Da un singolo caso ad un processo di generalizzazione

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

Funzione trasformazione

- Messa in simboli algebrici del problema
- Sospensione del significato dei simboli
- Trasformazione dell'espressione algebrica mediante una opportuna applicazione delle regole sintattiche del linguaggio
- Interpretazione dell'espressione algebrica ottenuta
- Produzione di una nuova conoscenza

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

Esempio. Siano dati 2 recipienti contenenti rispettivamente, acqua di massa m_1 e temperatura T_1 , acqua di massa m_2 e temperatura T_2 . Cosa accade della temperatura finale quando si mescola il contenuto dei due recipienti?

1. Traduzione in espressione algebrica del “Principio di conservazione della quantità di calore”

$$m_1 T_1 + m_2 T_2 = (m_1 + m_2) T_f$$

2. Sospensione del significato dei simboli, e applicazione delle regole “sintattiche” del linguaggio (in questo caso: “dividendo ambo i membri dell’uguaglianza per una stessa quantità diversa da zero, permane l’uguaglianza”), che permettono di giungere a

$$T_f = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{(m_1 + m_2)} \quad (1)$$

3. Interpretazione di tale formula mediante riassunzione del significato dei simboli, che permette di rispondere: “la temperatura finale è pari a...”

La formula (1) suggerisce che:

a) T_f è la media pesata delle temperature

Generazione di una nuova conoscenza

Operando un'ulteriore trasformazione algebrica si può ottenere

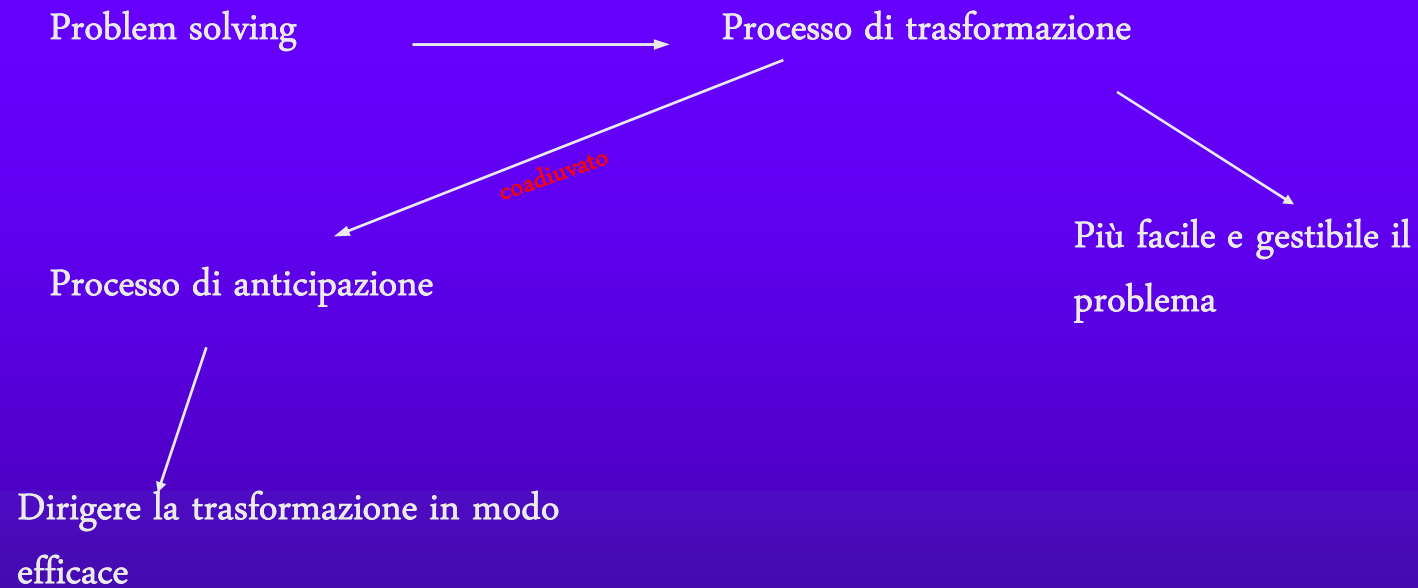
b)
$$\frac{T_f - T_2}{T_f - T_1} = \frac{m_1}{m_2}$$

Nuova conoscenza fisica: “nel caso di due quantità di una stessa sostanza, il rapporto tra le variazioni di temperatura è uguale al rapporto tra le masse

$$T_f = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{(m_1 + m_2)} \quad (1)$$

Fenom.
Ling.
L. Iconico
L. Simbolici
Sim. vs. Ico
Ling verbale
Ling algebrico
Funz. L. alg.
Funz. stenogr.
Funz. sin/gen.
Funz. trasf.
Ling. graf.
Trian. Frege
Esempi

Processo di anticipazione funzionale nella gestione del formalismo algebrico



Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

Processo di anticipazione funzionale nella gestione del formalismo algebrico

Esempio: semplificare la seguente frazione algebrica

$$\frac{a(a-b)+c(a-b)}{a+c}$$

Il processo di anticipazione è quello che permette al risolutore di scegliere la “via del raccoglimento” piuttosto che quella dello “svolgimento dei calcoli”.

Anticipazione

vs

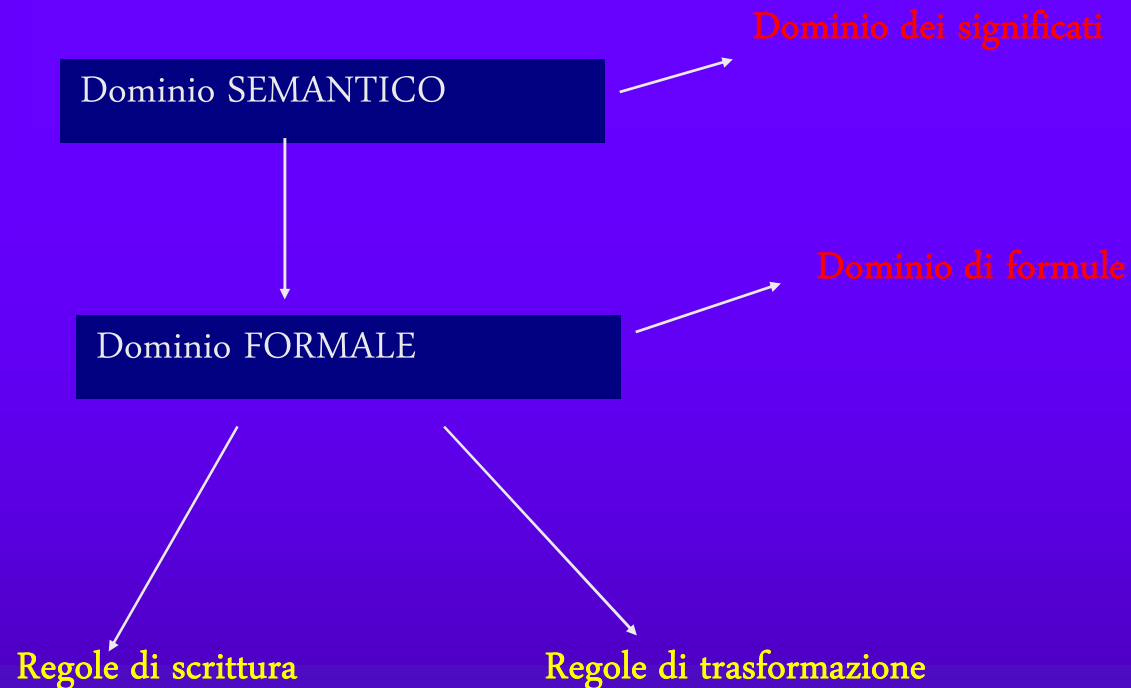
Svolgimento dei calcoli

Prevedere che raccogliendo si otterrebbe un fattore $a+c$

$$\frac{a^2ab+ac-bc}{a+c}$$

Fenom.
Ling.
L. Iconico
L. Simbolici
Sim. vs. Ico
Ling verbale
Ling algebrico
Funz. L. alg.
Funz. stenogr.
Funz. sin/gen.
Funz. trasf.
Ling. graf.
Trian. Frege
Esempi

L'ambito SEM e l'ambito FORM



Il ruolo del dominio semantico è quello di rappresentare un mezzo attraverso il quale capire come utilizzare in modo intelligente il dominio formale

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

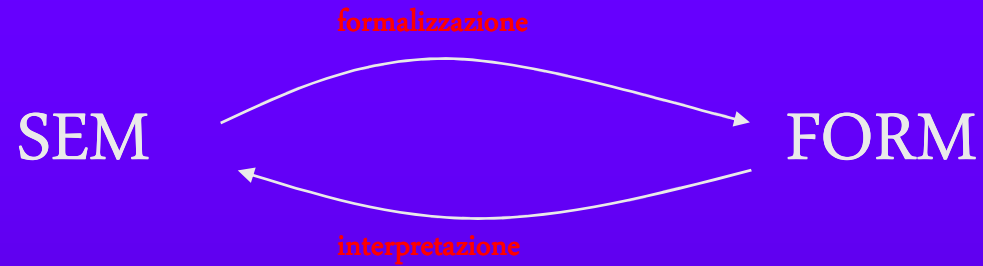
Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

L'ambito SEM e l'ambito FORM



Esempio

Siano dati due numeri dispari

formalizzazione

→ $2q+1, 2q'+1$

$(2q+1) + (2q'+1) = 2s$

interpretazione

La somma di due numeri dispari
è un numero pari

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

Dimostrare che il numero $(p-1)(q-1)/8$ è pari², se p e q sono primi e dispari

Parte "pubblica"

$$\frac{(p-1)(q-1)^2}{8} = 2k \iff p, q \text{ primi (dispari)}$$

Formalizzazione mediante il linguaggio algebrico

Parte "privata" (penso)

eq. a 3 incognite difficile da risolvere

\Leftarrow) se p e q sono primi dispari allora allora (q^2-1)
 è pari in quanto q è dispari $\longrightarrow q^2$ è dispari $\longrightarrow (q^2-1)$
 è pari.

Idem per p-1

p dispari \longrightarrow p-1 pari \longrightarrow (p-1) (q^2-1) è pari
 ma \longrightarrow devo scegliere un'altra strada

ma chi ci assicura che sia ancora pari?

$$\frac{(p-1)(q-1)^2}{8}$$

Se p, q dispari

$$p = 2k+1 \text{ e}$$

$$q = 2k'+1$$

Passaggio da SEM a FORM E e SEM è servito per migliorare FORM

$$\longrightarrow (p-1)(q^2-1) = (2k+1-1)(4k'^2+4k'+1-1) =$$

$$8(k)(k'+k') \longrightarrow \frac{(p-1)(q-1)^2}{8} = \frac{8(k)(k'+k')^2}{8} =$$

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Triang. Frege

Esempi

Dimostrare che il numero $(p-1)(q-1)/8$ è pari², se p e q sono primi e dispari

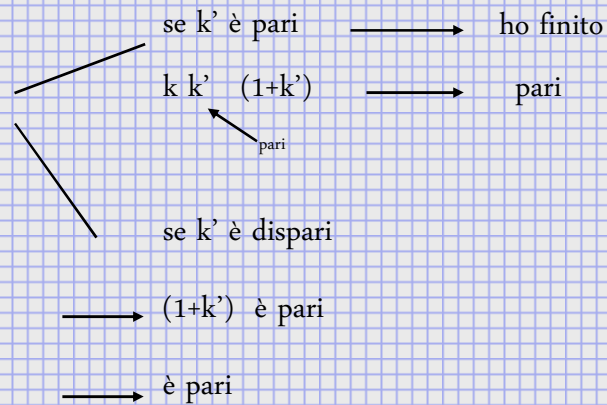
Parte "pubblica"

$$= k k' (1+k')$$

Non si rende conto di aver raggiunto la soluzione finché non torna nell'ambito SEM

Parte "privata" (penso)

e qui come faccio??



Ho usato solo il fatto che siano dispari ma non primi

Non riesco ad esprimerlo

- Fenom.
- Ling.
- L. Iconico
- L. Simbolici
- Sim. vs. Ico
- Ling verbale
- Ling algebrico
- Funz. L. alg.
- Funz. stenogr.
- Funz. sin/gen.
- Funz. trasf.
- Ling. graf.
- Triang. Frege
- Esempi**

Una bomba viene lasciata cadere da un elicottero fermo sopra il bersaglio. Dopo 20 secondi dal momento in cui inizia la caduta della bomba si sente sull'elicottero il rumore del suo scoppio a terra. Determinare l'altezza a cui si trova l'elicottero rispetto al bersaglio (velocità suono: 340 m/s)

Parte "pubblica"

$$v = \frac{s}{t} \quad \begin{array}{l} \text{spazio} \\ \text{tempo} \end{array}$$

$$v_{\text{suono}} = 340 \text{ m/sec}$$

$$\text{tempo} = 20 \text{ sec}$$

$$s = v \cdot t = 340 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \cdot 20 \text{ sec} = 6800 \text{ m} = 6,8 \text{ km}$$

$$s(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

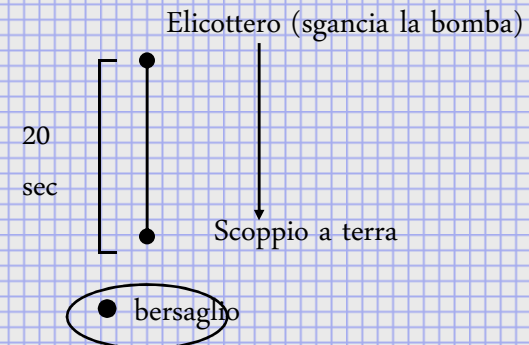
Legge di caduta dei gravi

$$s(t) = v \cdot t$$

legge del suono

Ora indicato con \bar{t} il tempo di "discesa" e con t quello di "risalita" sapendo che $\bar{t} + t = 20$ posso impostare un sistema che dovrebbe portare alla soluzione

Parte "privata" (penso)



NO c'è qualcosa che non va!!!

L'elicottero ha $v = 0$

Il suono ha $v = 340 \text{ m/s}$

Al tempo \bar{t} la bomba arriva a terra dopo di che "parte" il suono che viaggia a 340 m/s arrivando dopo 20 sec dall'inizio della caduta dopo aver percorso 6,8 km il suono dopo un tempo t il suono arriva sull'elicottero $\bar{t} + t = 20$ sec

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

Linguaggio dei grafici

Linguaggio simbolico

Prime tracce in Egitto

XIV secolo, introdotto da D'Oresme

Fondamentale importanza



Cartesio

Newton

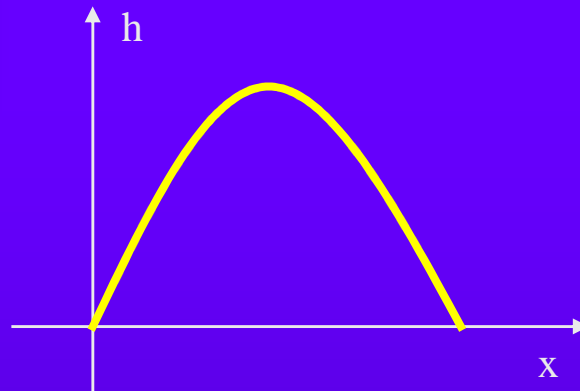
Linguaggio dei grafici vs Linguaggio iconico

**Tradurre una relazione
matematica, fisica. Nessuna
valenza descrittiva della realtà
visibile**

**Rappresentare la realtà visibile
di un fenomeno**

- Fenom.
- Ling.
- L. Iconico
- L. Simbolici
- Sim. vs. Ico
- Ling verbale
- Ling algebrico
- Funz. L. alg.
- Funz. stenogr.
- Funz. sin/gen.
- Funz. trasf.
- Ling. graf.
- Trian. Frege
- Esempi

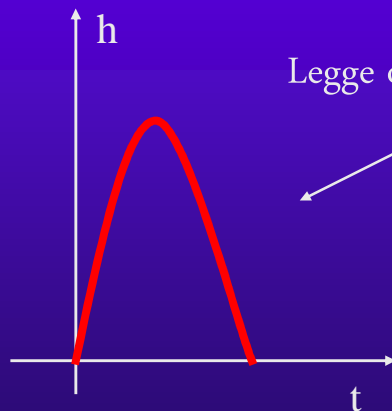
Esempio1: moto parabolico di un proiettile



Ruolo iconico



Esempio2: supponiamo di lanciare una palla verso l'alto e di porre sul grafico precedente al posto di x la variabile t (tempo)



Legge oraria: $h(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$



Rappresentazione iconica



Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

Il triangolo di Frege

Uno dei principali problemi



Interpretazione di un'espressione simbolica



- I **termini** costanti e/o variabili o loro combinazioni per mezzo dei simboli di operazioni che sono utilizzati per designare gli elementi extralinguistici (matematici e non matematici) che sono coinvolti nell'attività matematica (5, $3+2$, a, $a+b$,...)

- Le **proposizioni** o le **funzioni proposizionali** costruite mediante l'uso dei termini e dei predicati

$5+3=8$ è una proposizione

$X-2 > 0$ è una funzione proposizionale

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

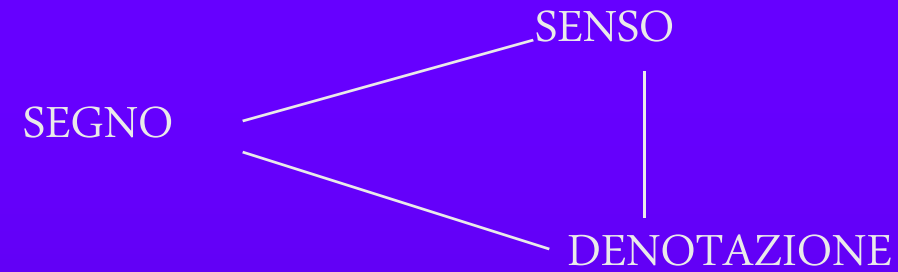
Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

Il triangolo di Frege

Frege (1892)



DENOTAZIONE di un'espressione \longrightarrow è "l'oggetto" cui l'espressione si riferisce

SENSO di un'espressione \longrightarrow è "il modo" con cui l'oggetto ci è dato

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Triang. Frege

Esempi

Esempio 1: $y = 4x + 2$

e $y = 2(2x + 1)$

Hanno senso diverso perché esprimono due regole distinte per ottenere y a partire da x , ma denotano la stessa funzione, cioè lo stesso insieme di coppie ordinate

Esempio 2: $x^2 - 1 \stackrel{?}{=} 0$

- Il **SENSO** è dato da “considero x , lo elevo al quadrato, sottraggo 1, ed eguaglio a 0”
- La sua **DENOTAZIONE** è data da “l’espressione $X^2 - 1 = 0$ denota i numeri +1 e -1.”

Non esiste una corrispondenza “uno a uno” tra senso e denotazione.

Difficoltà di afferrare l’invarianza della denotazione rispetto ai cambiamenti di senso

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

Il triangolo di Frege

Esempio 3: $g(x)=f(1/x)$

- $g(x) = 1/x$ il simbolo $f(1/x)$



Incapacità di gestire la generalità della funzione f e quindi ricerca di una concretizzazione di tale espressione

- $g(x) = 1/f(x)$ il simbolo $f(1/x)$



Presenza di una concezione: reinterpretazione del concetto di reciproco. Predominanza del simbolo $1/x$ con significato di reciproco, sul simbolo che designerebbe "funzione", ovvero $f(1/x)$ come reciproco della funzione f e quindi $1/f(x)$

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

Il triangolo di Frege

- $g(x) = f(1)/f(x)$ il simbolo $f(1/x)$



Sorta di "proprietà distributiva". Presenza di una concezione che vede la rielaborazione di tale proprietà

- $g(x) = f(x) \cdot 1/x$ il simbolo $f(1/x)$



Come se la scrittura $f(1/x)$ sottintendesse tra i due simboli f ed $1/x$ un segno di moltiplicazione.

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

SCOPO

Importanza della varietà e delle proprietà
dei linguaggi utilizzati in matematica

RIFLETTERE

Due diversi ambienti in cui il
linguaggio si muove

SEMANTICO

FORMALE

OSTACOLI COGNITIVI

Poca conoscenza delle
suddette cose

$$X^2 + 1 = 0 \Rightarrow X^2 = -1 \Rightarrow X = \pm 1 \text{ oppure } X = \pm -1$$

