

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling. verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

# La fenomenologia dei linguaggi in matematica



**Un elemento costitutivo del pensiero, fattore determinante nel processo di apprendimento, poiché è mediante il linguaggio che “percepriamo” e gestiamo un concetto**

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling. verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

# Linguaggi più comunemente utilizzati nell'ambito matematico

**Linguaggio iconico**

**Linguaggio simbolico**

**Linguaggio algebrico**

**Linguaggio grafico (grafici nel  
piano cartesiano)**

**Linguaggio verbale**

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling. verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

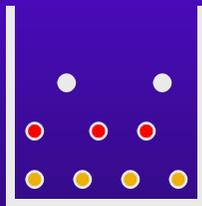
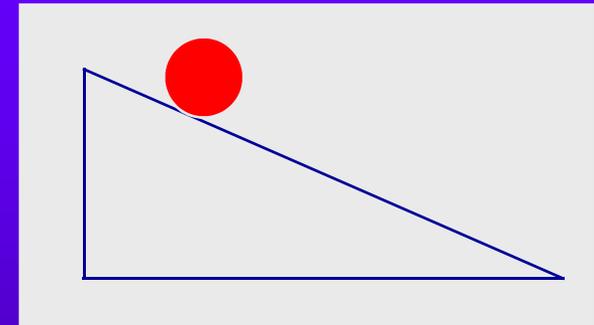
Esempi

# Linguaggio iconico

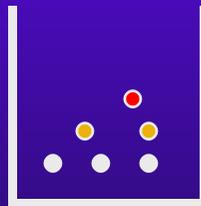
**Il linguaggio iconico è una rappresentazione, più o meno schematica, della realtà: esso si avvale di disegni (icone) per raffigurare la realtà presentata nel problema.**

Problemi di  
probabilità

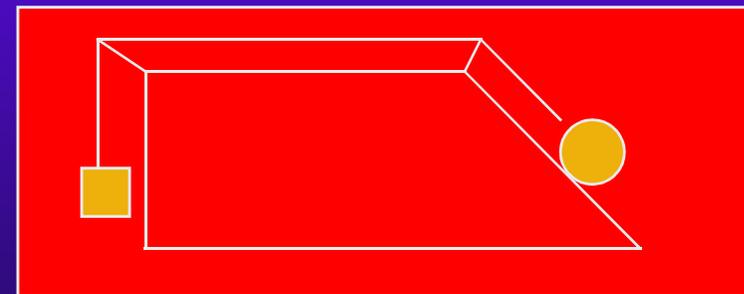
Problemi di  
modellizzazione



$U_1$



$U_2$



# Linguaggi simbolici

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling. verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

## Questione lessicale

Duval, Janvier, et al

*Il simbolo è il segno che  
appartiene ad un sistema  
di convenzioni di  
rappresentazione*

Piaget

*Quella funzione  
attraverso la quale il  
pensiero diventa segno. Il  
simbolo contiene ancora  
qualche traccia della realtà  
rappresentata*

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling. verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

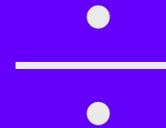
Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

$$\int_a^b f(t) dt$$



Simbolo matematico (o scrittura simbolica)

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling. verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

$$\int_a^b f(t) dt$$

$$\div$$

Simbolo matematico (o scrittura simbolica)

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling. verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

$$\int_a^b f(t) dt$$

$$\div$$

Simbolo matematico (o scrittura simbolica)

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling. verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

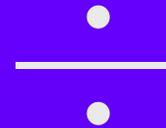
Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

$$\int_a^b f(t) dt$$



Simbolo matematico (o scrittura simbolica)

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling. verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

$$\int_a^b f(t) dt$$
$$\div$$

Simbolo matematico (o scrittura simbolica)

Area 'sottesa' dal grafico di  $f$  nell'intervallo  $[a,b]$  attraverso il riferimento di

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling. verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

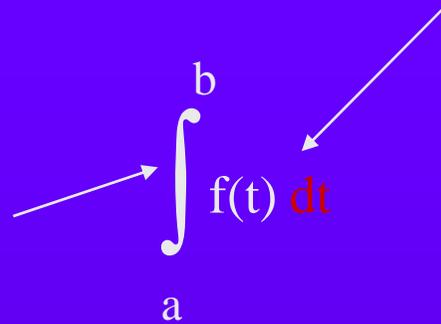
Funz. trasf.

Ling. graf.

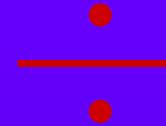
Trian. Frege

Esempi

## Linguaggi simbolici

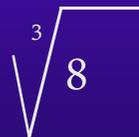


The diagram shows the definite integral symbol  $\int_a^b f(t) dt$ . Two white arrows point to the upper limit 'b' and the differential 'dt'.



Simbolo matematico (o scrittura simbolica)

Area 'sottesa' dal grafico di  $f$  nell'intervallo  $[a,b]$  attraverso il riferimento di



The cubic root symbol  $\sqrt[3]{8}$ .



The summation symbol  $\sum_{k=1}^n K$ .

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling. verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

## Linguaggio Simbolico vs Linguaggio Iconico

*Linguaggio Iconico*

**Non ha bisogno di particolari convenzioni, perché esprime in modo sufficientemente esplicito la realtà**

*Linguaggio Simbolico*

**I simboli hanno bisogno di sistemi di convenzioni per esprimere ciò che rappresentano.**

**2+3 aggiungere, 4-1 sottrarre ecc...**

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

Linguaggio simbolico

## Linguaggio Verbale

interno

**Parole, espressioni usate nel  
dialogo con sé stessi**

- Pianificazione del lavoro
- Controllo del lavoro svolto
- Riflessione (su concetti e metodi utilizzati, su possibili alternative, ecc...)

esterno

**Orale e scritto**

- Comunicazione ad altri
- “Stabilizzazione” del pensiero e (nella forma scritta) creazione di un ambiente esterno (il testo scritto) su cui riflettere

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Triang. Frege

Esempi

$$2X^2 + 6X - 3 = 0$$

interno

•Ok. È un'equazione di secondo grado.

•Posso usare ad esempio la formula risolutiva: meno b più o meno radice di b al quadrato meno quattro ac, fratto 2a

•Ah... b è pari...allora posso usare la formula ridotta...quella con b mezzi...

•Il delta come viene? Se è negativo...non ci sono soluzioni reali

Pianificazione del lavoro

“Stabilizzazione” del pensiero e (nella forma scritta) creazione di un ambiente esterno (il testo scritto) su cui riflettere

Riflessione (su concetti e metodi utilizzati, su possibili alternative, ecc...)

esterno

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 6}}{2}$$

La radice non è una radice perfetta...Posso portare fuori qualcosa?...no...

Ok. Le soluzioni sono

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{15}}{2}$$

- Fenom.
- Ling.
- L. Iconico
- L. Simbolici
- Sim. vs. Ico
- Ling verbale
- Ling algebrico
- Funz. L. alg.
- Funz. stenogr.
- Funz. sin/gen.
- Funz. trasf.
- Ling. graf.
- Trian. Frege
- Esempi

Vygotskji

Spazio visivo interno

“Spazio” metaforico che si crea nella mente di ciascun individuo e all’interno del quale avvengono i diversi processi cognitivi

Chiave che apre tale spazio

PAROLA

Immaginazione della situazione problematica

interno

esterno

intuizione

intenzione

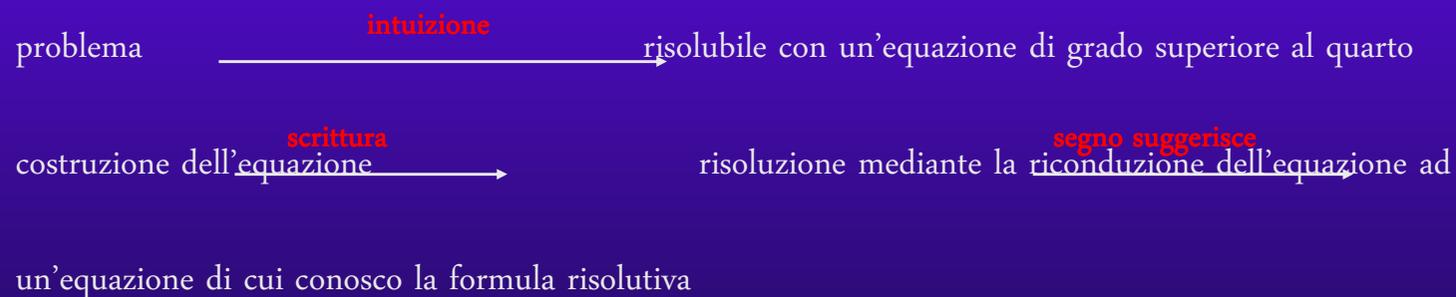


# Dinamica

## Primo ciclo

- Nascita di un'intuizione
- Stesura dell'intuizione
- Il “segno prodotto” suggerisce (attraverso la traccia scritta, o l'eco ricevuto durante il dialogo con altri) un'idea che torna indietro, e che non è l'equivalente dell'intuizione avuta

Es:



Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

# Problema

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Triang. Frege

Esempi

Trovare i punti di intersezione della curva  $y = x - 1$  e l'asse delle ascisse.

problema  $\xrightarrow{\text{intuizione}}$  risolvibile con un sistema di due equazioni  $\xrightarrow{\text{scrittura}}$  costruzione del sistema

metodo di sostituzione  $\xrightarrow{\text{segno suggerisce}}$   $\xrightarrow{\text{scrittura}}$

equazione di quarto grado  $\xrightarrow{\text{segno suggerisce}}$  equazione riducibile al prodotto di binomi di

secondo grado

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

$$x^4 - 1 = 0$$

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$$

Ecc...

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

Linguaggio simbolico non verbale

## Linguaggio algebrico

Scuola italiana e francese (Drouhard)

Un qualunque sistema  
di segni che si ottenga  
per estensione  
coerente del sistema di  
segni dell'Aritmetica

Scuola anglosassone

Linguaggio dell'Algebra  
elementare: uso di lettere e  
regole di calcolo che  
consentono il cosiddetto  
“calcolo letterale”

$$3+5=8$$

Scrittura 'prototipo' di tipo algebrico

$$a+b=c$$

$$T(a+b)=T(a)+T(b)$$

Estensioni coerenti della prima scrittura

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

**Funz. L. alg.**

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

## Funzioni del Linguaggio Algebrico

- Funzione stenografica
- Funzione di sintesi/generalizzazione
- Funzione di trasformazione

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

**Funz. stenogr.**

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

## Funzione stenografica

Metodo di abbreviazione del linguaggio verbale

### Es. 1

= ha la funzione di stenografare la parola “uguale”

+ ha la funzione di stenografare la parola “sommare”

### Es. 2

$g(x)=f(1/x)$  si presta a due distinte interpretazioni stenografiche corrette:

1^a interpretazione:  $g(x)=f(1/x)$ , “g calcolata in x è equivalente ad f calcolata in  $1/x$ ”

o per meglio dire: “g(x) è il valore della funzione f calcolata in  $1/x$ ”

2^a interpretazione:  $g(x)=f(1/x)$ , “g è la composizione delle funzioni f ed h, dove  $h(x)=1/x$ ”

$$x \xrightarrow{h} 1/x \xrightarrow{f} f(1/x)$$

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

## Funzione sintesi/generalizzazione

Sintetizza in una formula una “legge”, una “regolarità”,  
ecc...

**Es.:**  $A = \frac{b \cdot h}{2}$

Stenografica: “area uguale base per altezza  
diviso due”

Sintetizza in una formula la “legge” per trovare l’area di  
un triangolo qualunque

**Es.:** Generalizzazione

$$(2+3) \cdot 5 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5$$

Scritta in generale la proprietà diventa

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Da un singolo caso ad un processo di generalizzazione

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

**Funz. trasf.**

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

## Funzione trasformazione

- Messa in simboli algebrici del problema
- Sospensione del significato dei simboli
- Trasformazione dell'espressione algebrica mediante una opportuna applicazione delle regole sintattiche del linguaggio
- Interpretazione dell'espressione algebrica ottenuta
- Produzione di una nuova conoscenza

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

**Funz. trasf.**

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

**Esempio.** Siano dati 2 recipienti contenenti rispettivamente, acqua di massa  $m_1$  e temperatura  $T_1$ , acqua di massa  $m_2$  e temperatura  $T_2$ . Cosa accade della temperatura finale quando si mescola il contenuto dei due recipienti?

1. Traduzione in espressione algebrica del “Principio di conservazione della quantità di calore”

$$m_1 T_1 + m_2 T_2 = (m_1 + m_2) T_f$$

2. Sospensione del significato dei simboli, e applicazione delle regole “sintattiche” del linguaggio (in questo caso: “dividendo ambo i membri dell’uguaglianza per una stessa quantità diversa da zero, permane l’uguaglianza”), che permettono di giungere a

$$T_f = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{(m_1 + m_2)} \quad (1)$$

3. Interpretazione di tale formula mediante riassunzione del significato dei simboli, che permette di rispondere: “la temperatura finale è pari a...”

La formula (1) suggerisce che:

a)  $T_f$  è la media pesata delle temperature

Generazione di una nuova conoscenza

Operando un'ulteriore trasformazione algebrica si può ottenere

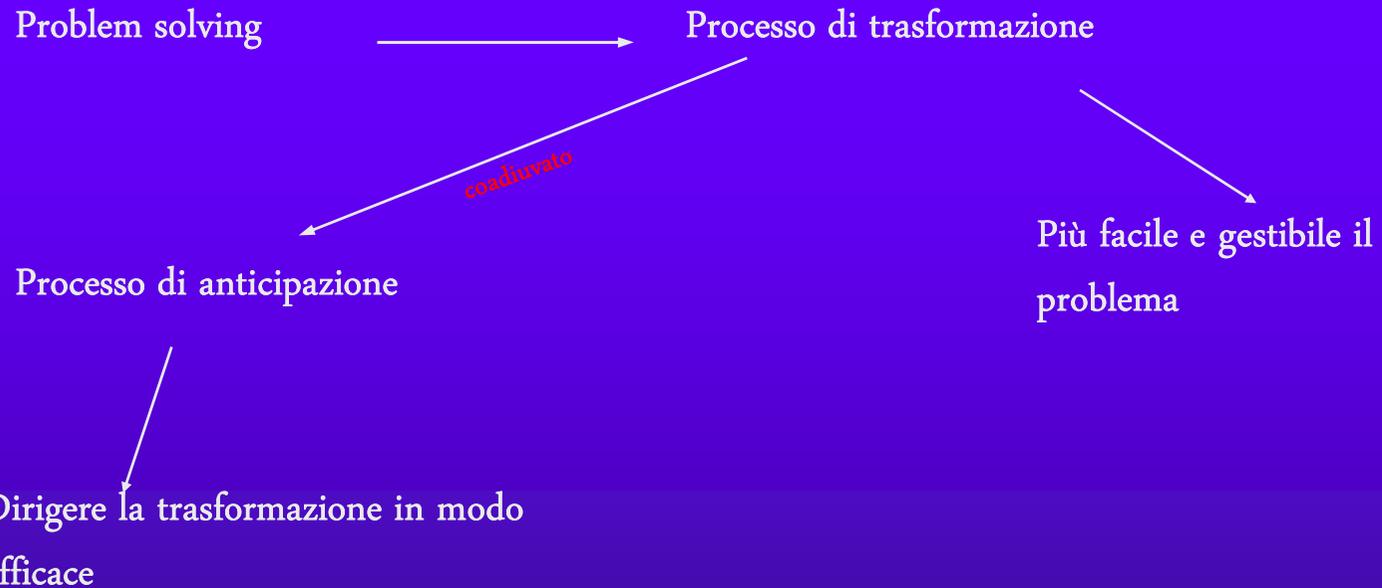
b) 
$$\frac{T_f - T_2}{T_f - T_1} = \frac{m_1}{m_2}$$

Nuova conoscenza fisica: “nel caso di due quantità di una stessa sostanza, il rapporto tra le variazioni di temperatura è uguale al rapporto tra le masse

$$T_f = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{(m_1 + m_2)} \quad (1)$$

- Fenom.
- Ling.
- L. Iconico
- L. Simbolici
- Sim. vs. Ico
- Ling verbale
- Ling algebrico
- Funz. L. alg.
- Funz. stenogr.
- Funz. sin/gen.
- Funz. trasf.**
- Ling. graf.
- Trian. Frege
- Esempi

## Processo di anticipazione funzionale nella gestione del formalismo algebrico



Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

**Funz. trasf.**

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

Processo di anticipazione funzionale nella gestione del formalismo algebrico

**Esempio:** semplificare la seguente frazione algebrica

$$\frac{a(a-b)+c(a-b)}{a+c}$$

Il processo di anticipazione è quello che permette al risolutore di scegliere la “via del raccoglimento” piuttosto che quella dello “svolgimento dei calcoli”.

**Anticipazione**

vs

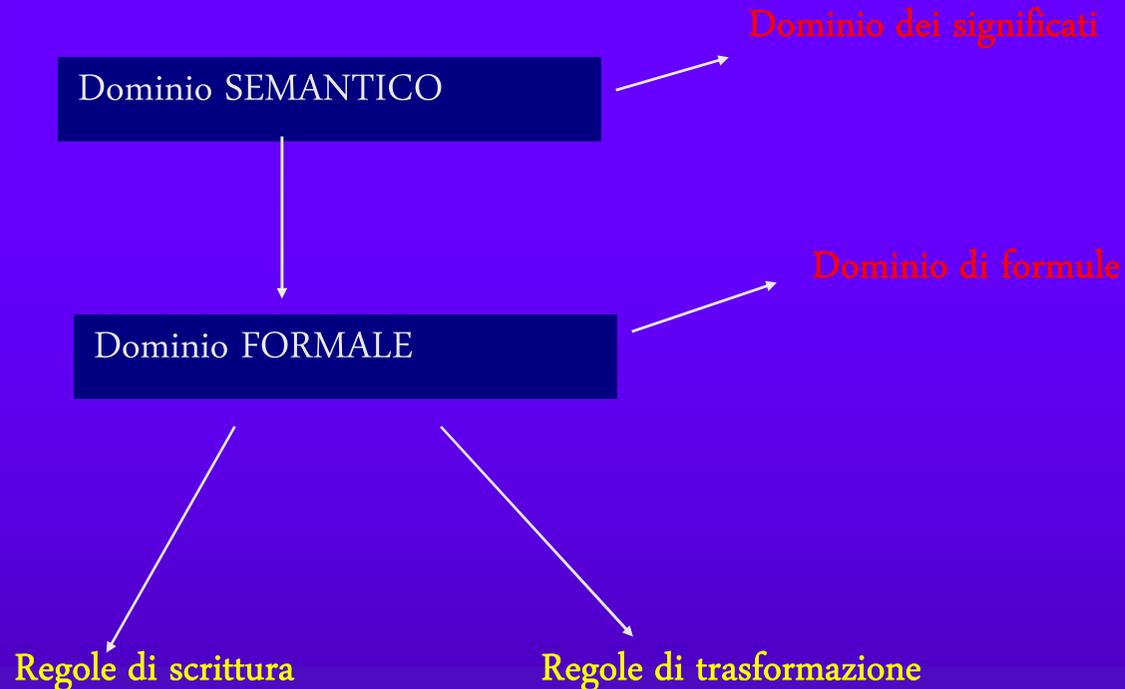
**Svolgimento dei calcoli**

Prevedere che raccogliendo si otterrebbe un fattore  $a+c$

$$\frac{a^2ab+ac-bc}{a+c}$$

- Fenom.
- Ling.
- L. Iconico
- L. Simbolici
- Sim. vs. Ico
- Ling verbale
- Ling algebrico
- Funz. L. alg.
- Funz. stenogr.
- Funz. sin/gen.
- Funz. trasf.**
- Ling. graf.
- Trian. Frege
- Esempi

## L'ambito SEM e l'ambito FORM



Il ruolo del dominio semantico è quello di rappresentare un mezzo attraverso il quale capire come utilizzare in modo intelligente il dominio formale

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

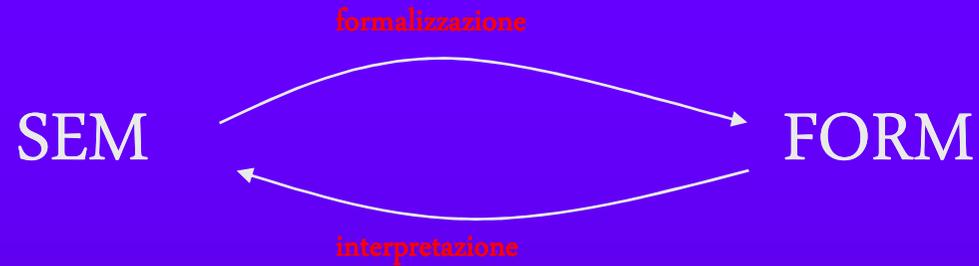
**Funz. trasf.**

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

L'ambito SEM e l'ambito FORM



## Esempio

Siano dati due numeri dispari

formalizzazione

→  $2q+1, 2q'+1$

$(2q+1) + (2q'+1) = 2s$

interpretazione

La somma di due numeri dispari  
è un numero pari

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

**Esempi**

Dimostrare che il numero  $(p-1)(q-1)/8$  è pari<sup>2</sup>, se p e q sono primi e dispari

Parte "pubblica"

$$\frac{(p-1)(q-1)^2}{8} = 2k \iff p, q \text{ primi (dispari)}$$

Formalizzazione mediante il linguaggio algebrico

Parte "privata" (penso)

eq. a 3 incognite difficile da risolvere

$\Leftarrow$  se p e q sono primi dispari allora allora  $(q^2-1)$   
 è pari in quanto q è dispari  $\longrightarrow q^2$  è dispari  $\longrightarrow (q^2-1)$   
 è pari.

Idem per p-1

p dispari  $\longrightarrow$  p-1 pari  $\longrightarrow$  (p-1)  $(q^2-1)$  è pari

ma  $\longrightarrow$  devo scegliere un'altra strada

$\longleftarrow$  ma chi ci assicura che  
 sia ancora pari?

$$\frac{(p-1)(q-1)^2}{8}$$

Se p, q dispari

$$p = 2k+1 \text{ e}$$

$$q = 2k'+1$$

Passaggio da SEM a FORM E e SEM è servito per migliorare FORM

$$\longrightarrow (p-1)(q^2-1) = (2k+1-1)(4k'^2+4k'+1-1) =$$

$$8(k)(k'+k') \longrightarrow \frac{(p-1)(q-1)^2}{8} = \frac{8(k)(k'+k')^2}{8} =$$

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

Dimostrare che il numero  $(p-1)(q-1)/8$  è pari<sup>2</sup>, se p e q sono primi e dispari

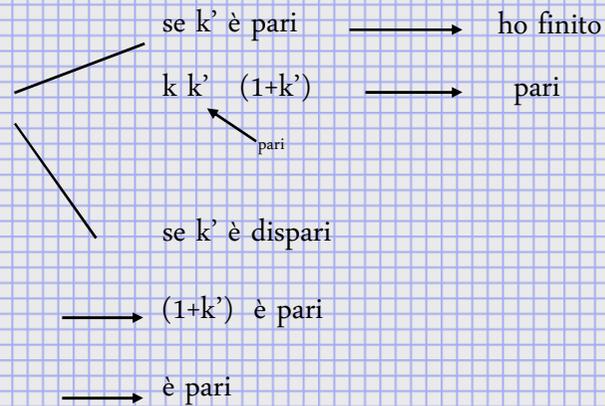
Parte "pubblica"

$$= k k' (1+k')$$

Non si rende conto di aver raggiunto la soluzione finché non torna nell'ambito SEM

Parte "privata" (penso)

e qui come faccio??



Ho usato solo il fatto che siano dispari ma non primi

Non riesco ad esprimerlo

- Fenom.
- Ling.
- L. Iconico
- L. Simbolici
- Sim. vs. Ico
- Ling verbale
- Ling algebrico
- Funz. L. alg.
- Funz. stenogr.
- Funz. sin/gen.
- Funz. trasf.
- Ling. graf.
- Triang. Frege
- Esempi**

Una bomba viene lasciata cadere da un elicottero fermo sopra il bersaglio. Dopo 20 secondi dal momento in cui inizia la caduta della bomba si sente sull'elicottero il rumore del suo scoppio a terra. Determinare l'altezza a cui si trova l'elicottero rispetto al bersaglio (velocità suono: 340 m/s)

Parte "pubblica"

$$v = \frac{s}{t} \quad \begin{array}{l} \text{spazio} \\ \text{tempo} \end{array}$$

$$v_{\text{suono}} = 340 \text{ m/sec}$$

$$\text{tempo} = 20 \text{ sec}$$

$$s = v \cdot t = 340 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \cdot 20 \text{ sec} = 6800 \text{ m} = 6,8 \text{ km}$$

$$s(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

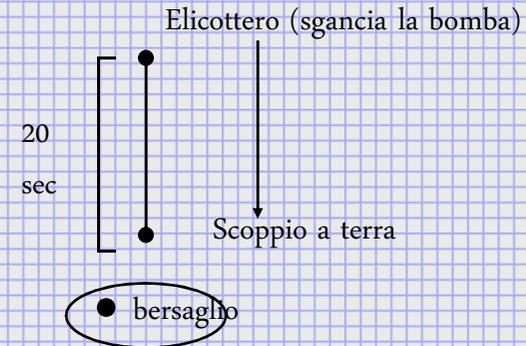
Legge di caduta dei gravi

$$s(t) = v \cdot t$$

legge del suono

Ora indicato con  $\bar{t}$  il tempo di "discesa" e con  $t$  quello di "risalita" sapendo che  $\bar{t} + t = 20$  posso impostare un sistema che dovrebbe portare alla soluzione

Parte "privata" (penso)



NO c'è qualcosa che non va!!!

L'elicottero ha  $v = 0$

Il suono ha  $v = 340 \text{ m/s}$

Al tempo  $\bar{t}$  la bomba arriva a terra dopo di che "parte" il suono che viaggia a 340 m/s arrivando dopo 20 sec dall'inizio della caduta dopo aver percorso 6,8 km il suono dopo un tempo  $t$  il suono arriva sull'elicottero  $\bar{t} + t = 20$  sec

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

# Linguaggio dei grafici

Linguaggio simbolico

Prime tracce in Egitto

XIV secolo, introdotto da D'Oresme

Fondamentale importanza



Cartesio

Newton

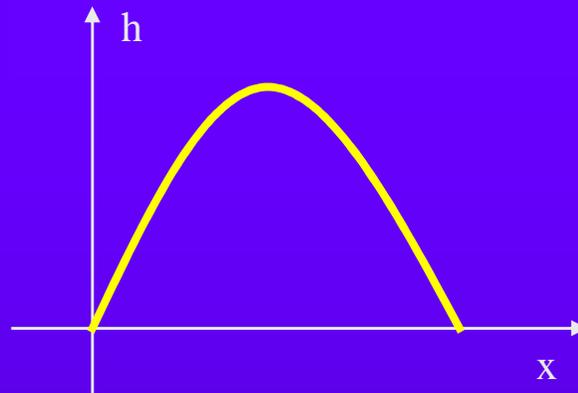
## Linguaggio dei grafici vs Linguaggio iconico

**Tradurre una relazione  
matematica, fisica. Nessuna  
valenza descrittiva della realtà  
visibile**

**Rappresentare la realtà visibile  
di un fenomeno**

- Fenom.
- Ling.
- L. Iconico
- L. Simbolici
- Sim. vs. Ico
- Ling verbale
- Ling algebrico
- Funz. L. alg.
- Funz. stenogr.
- Funz. sin/gen.
- Funz. trasf.
- Ling. graf.
- Trian. Frege
- Esempi

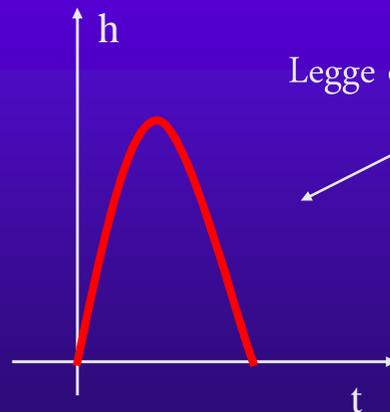
**Esempio1:** moto parabolico di un proiettile



Ruolo iconico



**Esempio2:** supponiamo di lanciare una palla verso l'alto e di porre sul grafico precedente al posto di x la variabile t (tempo)



Legge oraria:  $h(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$



Rappresentazione iconica



Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Triang. Frege

Esempi

# Il triangolo di Frege

Uno dei principali problemi



Interpretazione di un'espressione simbolica



- I **termini** costanti e/o variabili o loro combinazioni per mezzo dei simboli di operazioni che sono utilizzati per designare gli elementi extralinguistici (matematici e non matematici) che sono coinvolti nell'attività matematica (5, 3+2, a, a+b,...)

- Le **proposizioni** o le **funzioni proposizionali** costruite mediante l'uso dei termini e dei predicati

$5+3=8$  è una proposizione

$X-2 > 0$  è una funzione proposizionale

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

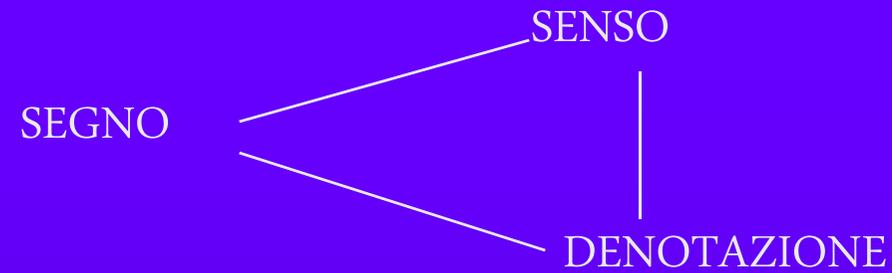
Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

Il triangolo di Frege

# Frege (1892)



**DENOTAZIONE** di un'espressione  $\longrightarrow$  è "l'oggetto" cui l'espressione si riferisce

**SENSO** di un'espressione  $\longrightarrow$  è "il modo" con cui l'oggetto ci è dato

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Triang. Frege

Esempi

**Esempio 1:**  $y = 4x + 2$

e  $y = 2(2x + 1)$

Hanno senso diverso perché esprimono due regole distinte per ottenere  $y$  a partire da  $x$ , ma denotano la stessa funzione, cioè lo stesso insieme di coppie ordinate

**Esempio 2:**  $x^2 - 1 \stackrel{?}{=} 0$

- Il **SENSO** è dato da “considero  $x$ , lo elevo al quadrato, sottraggo 1, ed eguaglio a 0”
- La sua **DENOTAZIONE** è data da “l’espressione  $X^2 - 1 = 0$  denota i numeri  $+1$  e  $-1$ .”

Non esiste una corrispondenza “uno a uno” tra senso e denotazione.

Difficoltà di afferrare l’invarianza della denotazione rispetto ai cambiamenti di senso

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

Il triangolo di Frege

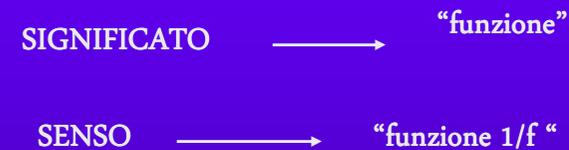
### Esempio 3: $g(x)=f(1/x)$

- $g(x) = 1/x$  il simbolo  $f(1/x)$



**Incapacità di gestire la generalità della funzione f e quindi ricerca di una concretizzazione di tale espressione**

- $g(x) = 1/f(x)$  il simbolo  $f(1/x)$



**Presenza di una concezione: reinterpretazione del concetto di reciproco. Predominanza del simbolo  $1/x$  con significato di reciproco, sul simbolo che designerebbe "funzione", ovvero  $f(1/x)$  come reciproco della funzione f e quindi  $1/f(x)$**

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Triang. Frege

Esempi

## Il triangolo di Frege

- $g(x) = f(1)/f(x)$  il simbolo  $f(1/x)$



Sorta di "proprietà distributiva". Presenza di una concezione che vede la rielaborazione di tale proprietà

- $g(x) = f(x) \cdot 1/x$  il simbolo  $f(1/x)$



Come se la scrittura  $f(1/x)$  sottintendesse tra i due simboli  $f$  ed  $1/x$  un segno di moltiplicazione.

Fenom.

Ling.

L. Iconico

L. Simbolici

Sim. vs. Ico

Ling verbale

Ling algebrico

Funz. L. alg.

Funz. stenogr.

Funz. sin/gen.

Funz. trasf.

Ling. graf.

Trian. Frege

Esempi

## SCOPO

Importanza della varietà e delle proprietà  
dei linguaggi utilizzati in matematica

## RIFLETTERE

Due diversi ambienti in cui il  
linguaggio si muove

SEMANTICO

FORMALE

## OSTACOLI COGNITIVI

Poca conoscenza delle  
suddette cose

$$X^2 + 1 = 0 \Rightarrow X^2 = -1 \Rightarrow X = \pm 1 \text{ oppure } X = \pm -1$$

