

Assiomi Modelli e Geometrie

Cogne 2-4 Giugno 2005

O. Caligaris

CAPITOLO 1

Introduzione

In matematica ogni affermazione deve essere dedotta da fatti di cui è stata in precedenza accertata la verità, accade quindi talvolta che, nel tentativo di giustificare ogni cosa si proceda all'indietro facendo riferimento a fatti sempre più elementari fino ad accorgersi che è utile stabilire una volta per tutte un ambiente di riferimento in cui siano chiare alcune affermazioni che si assumono vere senza giustificazioni a proposito di entità che sono accettate senza nessuna definizione.

Il procedimento che abbiamo appena descritto in modo un po' ingenuo è comunque alla base dell'esigenza di stabilire un quadro certo, che in termini un po' più precisi, chiamiamo sistema assiomatico.

Un sistema assiomatico consiste di entità non definite: le primitive, e di affermazioni che ne regolano i rapporti e che si assumono vere senza alcuna giustificazione: gli assiomi; tutto il resto deve discendere, a stretto rigore di logica, da assiomi e primitive.

In Matematica si trovano facilmente esempi importanti di teorie assiomatiche, come

- La teoria degli insiemi
- I sistemi numerici
- Le geometrie

anche se spesso non si pone l'accento su questa loro caratteristica.

A proposito della teoria degli insiemi, argomento probabilmente molto popolare, va detto che si tratta del sistema assiomatico più complicato tra quelli citati, al punto che di solito ci si accontenta, in ambito non specialistico, della teoria ingenua degli insiemi, più facilmente comprensibile, intuitiva, ma con il non trascurabile difetto di essere contraddittoria, come è mostrato dal paradosso di Russel.

I sistemi numerici, d'altro canto, sono di solito accettati senza discussione, si ritiene di conoscere il significato di numero e delle operazioni tra numeri, ma non è difficile accorgersi di aver fondato le proprie convinzioni sulla sabbia non appena ci si costringa a definire cosa sia un numero od una operazione.

Quanto alle geometrie può già sembrare strano il plurale; (ma di Geometria non ce n'è una sola?).

La Geometria con la G maiuscola, per quella che è la nostra formazione culturale, è la teoria che con un po' più di precisione si dovrebbe chiamare Geometria Euclidea: la geometria cioè che si fonda sui libri degli elementi

di Euclide.

Euclide fonda le sue argomentazioni su un certo numero di primitive: punto, retta, piano e su un certo numero di assiomi.

Egli stabilisce con precisione quattro assiomi, ma è molto più cauto nell'introdurre, e di fatto non introduce chiaramente, un quinto assioma che ha aperto in tempi successivi grandi discussioni ed ha originato sviluppi di grande rilievo.

Esistono semplici esempi di sistemi assiomatici e partiremo da questi per illustrare cosa sia un sistema assiomatico; vedremo poi un sistema assiomatico più complesso: quello che definisce i numeri naturali, per giungere alla discussione degli assiomi di Euclide e all'illustrazione di possibili sistemi assiomatici alternativi.

Vedremo infine come si possono costruire modelli soddisfacenti gli assiomi della Geometria Ellittica e della Geometria Iperbolica e ne studieremo qualche proprietà.

CAPITOLO 2

Geometrie Finite

Semplici esempi di sistema assiomatico sono forniti dalla teoria delle geometrie finite. Possiamo, come primo esempio, considerare una geometria molto elementare.

1. La Geometria dei Tre Punti

La geometria dei Tre Punti ha come primitive:

- le rette
- i punti

ed è governata dai seguenti assiomi:

- (1) Esistono esattamente 3 punti
- (2) Per ogni coppia di punti distinti passa una ed una sola retta
- (3) Non tutti i punti sono sulla stessa retta
- (4) Ogni coppia di rette ha almeno un punto in comune

Nella Geometria dei Tre Punti si possono dimostrare i seguenti teoremi.

TEOREMA 1. Due rette distinte si incontrano esattamente in un punto

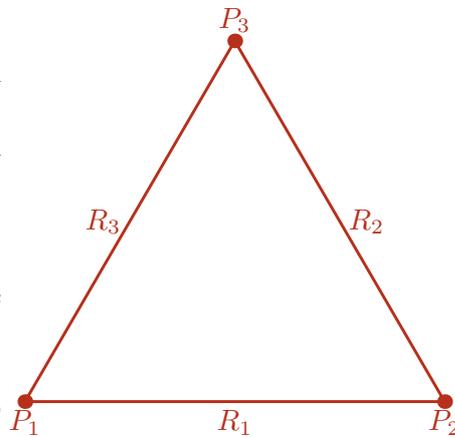
DIMOSTRAZIONE. Per l'Assioma 4 ogni coppia di rette ha almeno un punto in comune

Se viceversa due rette distinte passassero per due punti distinti si violerebbe l'assioma 2 \square

TEOREMA 2. Nella Geometria dei Tre Punti esistono esattamente tre rette.

DIMOSTRAZIONE. Poichè, per l'Assioma 1, ci sono esattamente 3 punti e poichè, per l'Assioma 2, ogni coppia di punti individua una sola retta, esistono al più 3 rette, d'altro canto, per l'Assioma 3, non tutti e tre i punti possono giacere su una sola retta e quindi le rette sono almeno 3. \square

Si può costruire un modello per la Geometria dei Tre Punti mediante un triangolo i cui vertici P_1, P_2, P_3 rappresentano i tre punti della geometria mentre i lati R_1, R_2, R_3 rappresentano le rette. È interessante osservare che nelle argomentazioni precedenti le primitive punto e retta possono essere scambiate creando così una geometria duale in cui in ogni affermazione i ruoli di punto e retta sono scambiati.



2. La geometria di Fano

Un secondo interessante esempio è la Geometria di Fano. Si tratta di un ambiente di cui almeno a prima vista non si intravedono applicazioni, che tuttavia si rivela sorprendente.

Le primitive della geometria di Fano sono;

- le rette
- i punti

mentre gli assiomi sono;

- (1) Esiste almeno una retta
- (2) Ogni retta passa esattamente per tre punti
- (3) Non tutti i punti sono sulla stessa retta
- (4) Per ogni coppia di punti distinti passa una ed una sola retta
- (5) Ogni coppia di rette ha almeno un punto in comune

Nella Geometria di Fano si possono dimostrare i seguenti teoremi.

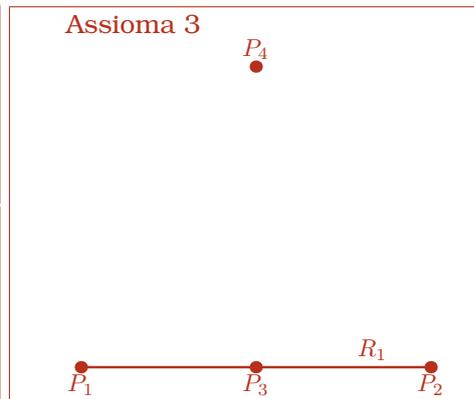
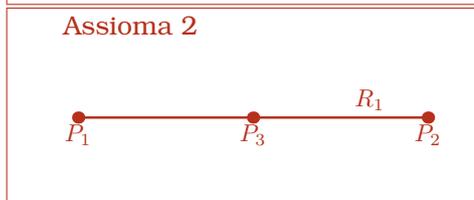
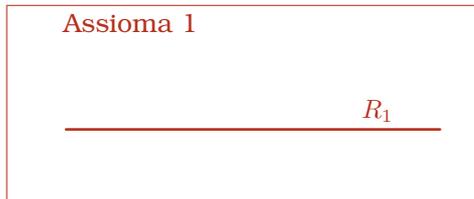
TEOREMA 3. *Ogni coppia di rette ha esattamente un punto in comune.*

DIMOSTRAZIONE. Per l'Assioma 5 ogni coppia di rette ha almeno un punto in comune.

Inoltre se esistesse una coppia di rette con due punti distinti in comune si violerebbe l'assioma 4 che asserisce che per ogni coppia di punti passa una sola retta. \square

TEOREMA 4. *Nella Geometria di Fano ci sono esattamente 7 punti e 7 rette.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti per l'Assioma 1 esiste almeno una retta R_1 , che per l'Assioma 2 passa esattamente per 3 punti P_1, P_2, P_3 .

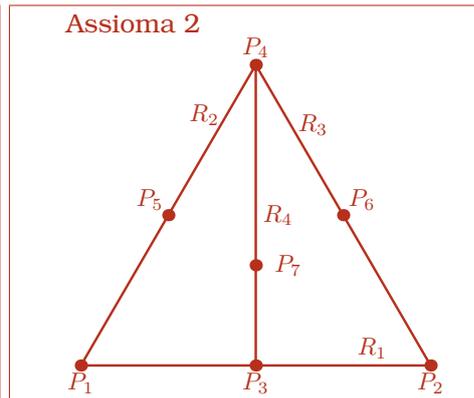
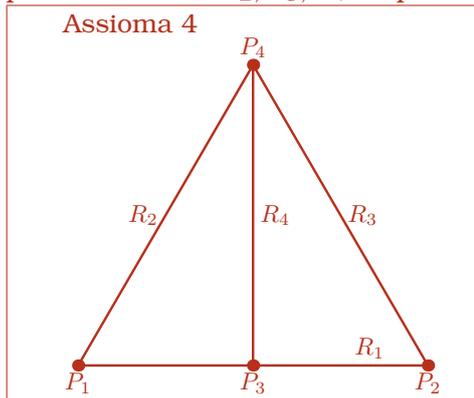


Poichè per l'Assioma 3 non tutti i punti sono sulla stessa retta, deve esistere almeno un quarto punto P_4 .

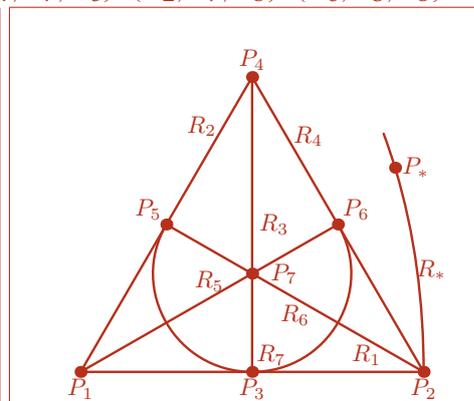
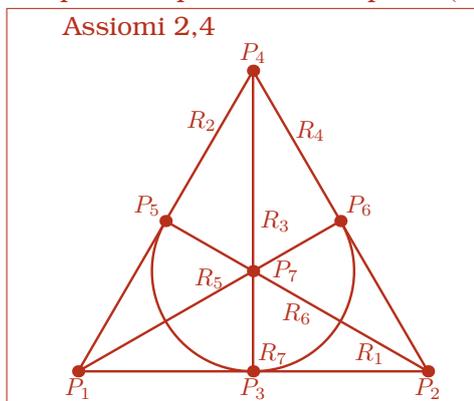
Per l'Assioma 4 per ognuna delle coppie di punti

$$(P_1, P_4), (P_2, P_4), (P_3, P_4)$$

passa una retta R_2, R_3, R_4 , rispettivamente,



Per l'Assioma 2 devono esistere i punti P_5, P_6, P_7 sulle rette R_2, R_3, R_4 , e, se teniamo conto anche dell' Assioma 4, devono esistere le rette R_5, R_6, R_7 che passano per le terne di punti $(P_1, P_7, P_6), (P_2, P_7, P_5), (P_6, P_3, P_5)$,



Se poi esistesse un ulteriore punto P_* , per l'Assioma 4 dovrebbe esistere una retta R_* che passa per P_* e per P_1 ; per l'Assioma 5 R_* dovrebbe incontrare la retta che passa per i punti P_3, P_4, P_7 senza passare per alcuno di essi a causa dell'Assioma 4.

Pertanto la retta per i punti P_3, P_4, P_7 dovrebbe contenere un ulteriore punto in contrasto con l'Assioma 2.

Se infine ci fosse un'ulteriore retta dovrebbero esserci altri due punti e come prima si giunge ad una contraddizione. \square

Come già detto, la Geometria di Fano appare come totalmente astratta, quasi soltanto un gioco, va invece detto che le geometrie finite costituiscono un fertile terreno di studi e possono essere adattate a rappresentare situazioni applicative.

Se riscriviamo gli assiomi della geometria di Fano sostituendo alla parola Punto il termine Utente e alla parola Retta il termine Switch e interpretiamo l'affermazione la retta passa per il Punto come lo Switch collega l'Utente otteniamo la descrizione di una rete di comunicazione tra computer (Utenti) gestita da nodi (Switch).

(Nel caso visto possiamo parlare di 7 Computer e 7 Switch capaci di collegare 3 computer ciascuno.

Gli assiomi diventano, in questo nuovo ambiente,

- (1) Esiste almeno uno Switch
- (2) Ogni Switch collega esattamente tre Utenti
- (3) Non tutti gli Utenti sono collegati allo stesso Switch
- (4) Ogni coppia di Utenti distinti è collegata ad uno ed un solo Switch
- (5) Ogni coppia di Switch ha almeno un Utente in comune

CAPITOLO 3

I numeri Naturali

Un altro notevole esempio di sistema assiomatico è dato dalla definizione dei numeri naturali.

Leopold Kronecker diceva che i numeri naturali ci sono stati dati da Dio mentre tutto il resto della matematica è opera dell'uomo.

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.
Leopold Kronecker 1823-1891

Tuttavia nel 1889 Peano pubblicò un trattato scritto in latino dal titolo *Arithmetices principia, nova methodo exposita* in cui definì assiomaticamente i numeri naturali usando come primitive i concetti di:

- 1
- Successivo
- =

e come assiomi:

- (A1) $1 \in \mathbb{N}$
- (A2) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = n$
- (A3) $n, m \in \mathbb{N}, n = m \Rightarrow m = n$
- (A4) $n, m, p \in \mathbb{N}, n = m, m = p \Rightarrow n = p$
- (A5) $n \in \mathbb{N}, n = m \Rightarrow m \in \mathbb{N}$
- (A6) $\forall n \in \mathbb{N} \exists! n' \in \mathbb{N}$ che è il successivo di n
- (A7) $\forall n \in \mathbb{N}, n' \neq 1$
- (A8) $n, m \in \mathbb{N}, n' = m' \Rightarrow n = m$
- (A9) se $K \subset \mathbb{N}, 1 \in K$ e $k \in K \Rightarrow k' \in K$, allora $K = \mathbb{N}$.

Successivamente nel 1891 nel suo *Formulario Matematico* modificò il suo sistema usando come primitive i concetti di

- 1
- Successivo

e come assiomi

- (A1) $1 \in \mathbb{N}$
- (A2) $\forall n \in \mathbb{N} \exists! n' \in \mathbb{N}$ che è il successivo di n
- (A3) $\forall n \in \mathbb{N}, n' \neq 1$
- (A4) $n, m \in \mathbb{N}, n' = m' \Rightarrow n = m$

- (A5) se $K \subset \mathbb{N}$, $1 \in K$ e $k \in K \Rightarrow k' \in K$, allora $K = \mathbb{N}$.

ed infine, sempre nel Formulario Matematico, nel 1898 sostituì 1 con 0.

L'intera teoria dei numeri naturali si può costruire partendo da queste 5 affermazioni.

Si può, ad esempio, cominciare dimostrando che

TEOREMA 5. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n' \neq n$.

Successivamente si può definire l'addizione facendo uso del principio di induzione:

DEFINIZIONE 1. Siano $n, m \in \mathbb{N}$, definiamo

- (1) $n + 1 = n'$
- (2) $n + m' = (n + m)'$ se $n + m$ è definito.

e dimostrare le proprietà ad essa collegate:

TEOREMA 6. Siano $n, m, p \in \mathbb{N}$, si ha

- (1) $m + n \in \mathbb{N}$ (chiusura di \mathbb{N} rispetto a +)
- (2) $m + (n + p) = (m + n) + p$ (proprietà associativa di +)
- (3) $m + n = n + m$ (proprietà commutativa di +)
- (4) $m + p = n + p \Rightarrow m = n$ (cancellazione degli addendi)

Nella stessa maniera si procede per il prodotto:

DEFINIZIONE 2. Siano $m, n \in \mathbb{N}$, definiamo

- (1) $n \cdot 1 = n$
- (2) $n \cdot m' = n \cdot m + n$ se $n \cdot m$ è definito.

e le sue proprietà

TEOREMA 7. Siano $m, n, p \in \mathbb{N}$, valgono i seguenti fatti:

- (1) $m \cdot n \in \mathbb{N}$ (chiusura di \mathbb{N} rispetto a \cdot)
- (2) $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$ (proprietà associativa di \cdot)
- (3) $m \cdot n = n \cdot m$ (proprietà commutativa di \cdot)
- (4) $m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n$ (cancellazione dei fattori).

TEOREMA 8. Siano $m, n, p \in \mathbb{N}$, allora $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$ (proprietà distributiva).

Si può continuare con la relazione d'ordine

DEFINIZIONE 3. Siano $m, n \in \mathbb{N}$, diciamo che $m < n$ se esiste $p \in \mathbb{N}$, $m + p = n$.

Inoltre $m > n$ se $n < m$.

provando poi la legge di tricotomia e le regole che legano ordine addizione e prodotto.

LEMMA 1. Valgono i seguenti fatti

- (1) $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $m \neq m + p$
- (2) $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $m = n'$

-
- (3) $\forall m \in \mathbb{N}, m \geq 1$.

TEOREMA 9. $\forall m, n \in \mathbb{N}$ vale uno ed un solo dei seguenti fatti:

$$m < n, \quad m = n, \quad m > n \quad (\text{legge di tricotomia})$$

TEOREMA 10. Siano $m, n, p \in \mathbb{N}$, allora

(1) $m < n \Rightarrow m + p < n + p$

(2) $m < n \Rightarrow m \cdot p < n \cdot p$.

Si può proseguire definendo gli interi, i razionali, i reali, i complessi e tutto il seguito.

CAPITOLO 4

La geometria Euclidea

Nei suoi Elementi Euclide pone le basi della geometria utilizzando sostanzialmente un sistema assiomatico le cui primitive sono: punto, retta e piano ed un insieme di 5 assiomi i primi 4 dei quali recitano:

- (1) È possibile condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.
- (2) È possibile prolungare illimitatamente una retta finita in linea retta.
- (3) È possibile descrivere un cerchio con qualsiasi centro e distanza (raggio) qualsiasi.
- (4) Tutti gli angoli retti sono uguali fra loro

Sul quinto assioma:

- (5) Se (in un piano) una retta,intersecando due altre rette, forma con esse, da una medesima parte, angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, allora queste due rette indefinitamente prolungate finiscono con l'incontrarsi dalla parte detta.

Il quinto postulato non convinceva molto Euclide, tant'è che che egli evitò di usarlo fintanto che gli fu possibile dimostrando 28 proposizioni senza farne alcun uso.

I commentatori di Euclide furono, fin dai primi tempi, concordi nel non ritenere sufficientemente evidente il quinto assioma spesso tentarono semplicemente di sostituirne l'enunciato verbale, altre volte cercarono di fornirne una dimostrazione.

Proclo Diadoco, un matematico vissuto tra il 410 ed il 485. riferisce degli studi a proposito del 5^o assioma riportando il lavoro di numerosi matematici quali Gemino Posidonio Tolomeo; di quest'ultimo critica l'opera e propone a sua volta una dimostrazione che si fonda sull'assunzione che la distanza tra due rette parallele sia costante.

Proclo propone anche una versione alternativa, ad essa equivalente del medesimo 5^o postulato nella forma che, in un altrettanto famoso commento, John Playfair (1748-1819) propose in sostituzione dell'originale e che è usualmente indicato come Assioma di Playfair, che fu pubblicato in un commento agli Elementi del 1795.

Data una retta ed un punto non sulla retta, è possibile tracciare una ed una sola retta parallela alla retta assegnata e passante per il punto dato

Tra gli Arabi il quinto postulato venne talvolta accettato come ad esempio da Al-Nirizi (attorno all'800) altre volte si tentò di dimostrarlo, come fecero Ibn-Al-Haitham noto in occidente come Alhezen (965-1039), Nasir-Eddin (1201-1274), Omar Khayyam (1050-1122).

Nel periodo Rinascimentale cui si registrano gli studi di F. Comandino (1509-1575) di C.Clavio (1537-1612), P.A.Cataldi (1548-1626), G.A.Borelli (1608-1679), Giordano Vitale (1633-1711) fino ad arrivare a J. Wallis (1616-1703) che nel 1663 dimostrò che il 5^o assioma è equivalente al seguente:

Dato un triangolo esiste un triangolo ad esso simile di grandezza arbitraria.

affermazione che riteneva comunemente accettata e a John Playfair (1748-1819).

A partire dall'opera di Gerolamo Saccheri (1667-1733), proseguendo con Lambert (1728-1777), János Bolyai (1802-1860) e Lobachewsky (1792-1856) iniziò la consapevolezza che una diversa geometria poteva essere costruita modificando il 5^o assioma

Anche se è chiaro che non ne fu consapevole, possiamo accreditare proprio a Saccheri di aver dimostrato i primi teoremi di Geometria non Euclidea.

1. Gli Assiomi di Euclide

Euclide, per la sua Geometria, fa uso delle seguenti definizioni iniziali che, in realtà, sono i concetti primitivi da lui ammessi

- (1) Un punto è ciò che non ha parti.
- (2) Una linea è una lunghezza senza larghezza.
- (3) Gli estremi di una linea sono punti.
- (4) Una retta è una linea che giace ugualmente rispetto ai punti su di essa.
- (5) Una superficie è ciò che ha lunghezza e larghezza.
- (6) Gli estremi di una superficie sono linee.
- (7) Una superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle rette su di essa.

C'è chi pensa che Euclide non fosse consapevole dell'impossibilità di definire i concetti di partenza; altri ritengono che ben avesse presente il problema; egli avrebbe tuttavia cercato di giustificare con argomentazioni

intuitive tali definizioni in modo da convincere i suoi lettori della loro applicabilità nonostante che sapesse della loro irrilevanza dal punto di vista logico.

Successivamente Euclide definisce

- (1) Un angolo piano è l'inclusione reciproca di due linee in un piano le quali si incontrino e non giacciono in linea retta.
- (2) Quando le linee che comprendono l'angolo sono rette, l'angolo è detto rettilineo.
- (3) Quando una retta innalzata a partire da un'altra retta forma con essa angoli adiacenti e uguali fra loro, ciascuno dei due angoli è retto, e la retta si dice perpendicolare a quella su cui si è innalzata.
- (4) Dicesi ottuso l'angolo maggiore di un angolo retto.
- (5) Dicesi acuto l'angolo minore di un angolo retto.
- (6) Dicesi termine ciò che è estremo di qualche cosa.
- (7) Dicesi figura ciò che è compreso da uno o più termini.
- (8) Dicesi cerchio una figura piana delimitata da un'unica linea tale che tutte le rette che terminano su di essa a partire da un medesimo punto fra quelli interni alla figura siano uguali fra loro.
- (9) Quel punto si chiama centro del cerchio.
- (10) Dicesi diametro del cerchio una retta condotta per il centro e terminata da ambedue le parti dalla circonferenza del cerchio, la quale retta taglia anche il centro a metà.
- (11) Dicesi semicerchio la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata, e centro del semicerchio è quello stesso che è anche centro del cerchio.
- (12) Dicesi rettilinee le figure delimitate da rette, vale a dire: figure trilatera quelle comprese da tre rette, quelle quadrilatera comprese da quattro rette e multilatera quelle comprese da più di quattro rette.
- (13) Dicesi triangolo equilatero la figura trilatera che ha i tre lati uguali, isoscele quella che ha due lati uguali e scaleno quello che ha i tre lati disuguali.
- (14) Dicesi triangolo rettangolo la figura trilatera che ha un angolo retto, triangolo ottusangolo quella che ha un angolo ottuso e acutangolo quello che ha i tre angoli acuti.
- (15) Dicesi quadrato la figura quadrilatera che ha i lati uguali e gli angoli retti.
- (16) Si dicono parallele rette giacenti nello stesso piano che, prolungate illimitatamente in entrambe le direzioni, non si incontrino fra loro da nessuna delle due parti.

Quindi enuncia i cinque assiomi:

- (1) E' possibile condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.

-
- (2) È possibile prolungare illimitatamente una retta finita in linea retta.
 - (3) È possibile descrivere un cerchio con qualsiasi centro e distanza (raggio) qualsiasi.
 - (4) Tutti gli angoli retti sono uguali fra loro.
 - (5) Se, in un piano, una retta, intersecando due altre rette, forma con esse, da una medesima parte, angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, allora queste due rette, se indefinitamente prolungate, finiscono con l'incontrarsi dalla parte detta.

Ed infine elenca un certo numero di concetti che riferisce al senso comune

- (1) Cose uguali a un'altra sono uguali tra loro.
- (2) Se a cose uguali si aggiungono cose uguali, allora si ottengono cose uguali.
- (3) Se a cose uguali si tolgono cose uguali, allora si ottengono cose uguali.
- (4) Cose che possono essere portate a sovrapporsi l'una con l'altra sono uguali tra loro.
- (5) Il tutto è maggiore della parte.

In tempi più recenti sono stati elaborati altri sistemi assiomatici per la geometria Euclidea tra i quali meritano un posto di rilievo quelli di Hilbert e di Birkhoff. il cui impianto riportiamo di seguito.

2. Il Sistema assiomatico di Hilbert

Nel suo libro [Foundations of Geometry](#) David Hilbert stabilisce un sistema assiomatico per la geometria in cui le primitive sono:

- (1) Punti
- (2) Rette
- (3) Piani
- (4) Giace, contiene
- (5) Tra
- (6) Congruente

e gli assiomi sono:

- Assiomi di incidenza

- (1) Per ogni coppia di punti distinti A, B esiste una retta che li contiene entrambi.
- (2) Per ogni coppia di punti distinti A, B non esiste più di una retta che li contiene entrambi.
- (3) Esistono almeno due punti su una retta. Esistono almeno tre punti che non giacciono su una retta
- (4) Per ogni terna di punti A, B, C che non giacciono sulla stessa retta esiste un piano α che li contiene tutti e tre. Per ogni piano esiste un punto che vi giace

-
- (5) Per ogni terna di punti A, B, C che non giacciono sulla stessa retta non esiste più di un piano che li contiene tutti e tre.
 - (6) Se due punti A, B di una retta α giacciono in un piano α allora ogni punto di α giace sul piano α .
 - (7) Se due piani α, β hanno un punto A in comune allora hanno almeno un altro punto B in comune
 - (8) Esistono almeno quattro punti che non giacciono in un piano.
- Assiomi di Ordine
 - (1) Se un punto B giace tra un punto A e un punto C allora i punti A, B, C sono tre punti distinti di una retta, e B giace a sua volta tra C ed A .
 - (2) per ogni coppia di punti A, C , esiste almeno un punto B sulla retta AC tale che C giace tra A e B .
 - (3) Per ogni terna di punti su una retta ne esiste uno solo che giace tra gli altri due.
 - (4) Siano A, B, C tre punti che non giacciono sulla stessa retta e sia α una retta nel piano ABC che non contiene nessuno dei tre punti A, B, C . Se la retta passa per un punto del segmento AB , passa anche per un punto del segmento AC , oppure per un punto del segmento BC .
 - Assiomi di Congruenza
 - (1) Se A, B sono due punti su una retta α , ed A' è un punto sulla stessa o su un'altra retta α' allora è sempre possibile trovare un punto B' da una certa parte assegnata della retta α' tale che AB e $A'B'$ siano congruenti.
 - (2) Se un segmento $A'B'$ ed un segmento $A''B''$ sono congruenti allo stesso segmento AB , allora i segmenti $A'B'$ ed $A''B''$ sono congruenti l'uno all'altro.
 - (3) Siano AB e BC due segmenti su una retta α , che, abbiano in comune il solo punto B . Inoltre, sulla stessa retta o su un'altra retta α' , siano $A'B'$ e $B'C'$ due segmenti che abbiano in comune il solo punto B' . Se $AB = A'B'$ e $BC = B'C'$, allora $AC = A'C'$.
 - (4) Se $\angle ABC$ è un angolo e se $B'C'$ è una semiretta, allora esiste esattamente una semiretta $B'A'$ da ciascuna parte della $B'C'$ tale che $\angle A'B'C' = \angle ABC$. Inoltre ogni angolo è congruente a sè stesso.
 - (5) (SAS) Se per due triangoli $\triangle ABC$ ed $\triangle A'B'C'$ valgono le congruenze $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e $\angle BAC = \angle B'A'C'$, allora la congruenza $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ è verificata.
 - Assioma delle Parallele
 - (1) Se α è una retta ed A è un punto su di essa allora esiste al più una retta nel piano che contiene α ed A che passa per A e non interseca α .

- Assiomi di Continuità

- (1) (Assioma di Archimede) Se AB e CD sono segmenti, allora esiste un numero n tale che n copie di CD costruite con contiguità da A lungo la semiretta AB oltrepasserà il punto B .
- (2) (Completezza della retta) Non esiste una estensione di una retta con il suo ordine e le sue relazioni di congruenza che conservi le relazioni esistenti tra gli elementi originali così come le proprietà fondamentali dell'ordine e della congruenza.

3. Il Sistema assiomatico di Birkhoff

G.Birkhoff in *A Set of Postulates for Plane Geometry (Based on Scale and Protractors)* pubblicato su *Annals of Mathematics*, nel 1932 definisce un sistema assiomatico per la geometria piana.

Il sistema assiomatico di Birkhoff usa come concetti primitivi.

- (1) Punto
- (2) Retta - Un insieme di punti
- (3) Distanza - La distanza tra due punti A e B della retta è un numero reale non negativo $d(A, B)$ tale che $d(A, B) = d(B, A)$
- (4) Angolo Un angolo è formato da tre punti ordinati A, O, B $A \neq O$, $B \neq O$; la misura $\mu(\angle AOB)$ dell'angolo $\angle AOB$ è un numero reale $\text{mod } 2\pi$

Comprende le seguenti definizioni

- (1) Tra -
Se A, B, C sono punti distinti, diciamo che B è tra i punti A e C (e scriviamo $A*B*C$) se e solo se $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$.
- (2) Segmento di retta -
I punti A e C insieme con tutti i punti B tra A e C formano il segmento di retta AC
- (3) Semiretta Estremo -
La semiretta m' di estremo O è definita da due punti O, A , ($A \neq O$) su una retta come l'insieme di tutti i punti A' di m tali che O non è tra A e A' .
- (4) Parallela -
Se due rette distinte non hanno nessun punto in comune esse sono parallele. Una retta è sempre parallela a sè stessa.
- (5) Angolo Piatto, Angolo Retto, Perpendicolare -
Due semirette m, n passanti per O si dice che formano un angolo piatto se $\mu(\angle mOn) = \pi$ Due semirette m, n passanti per O si dice che formano un angolo retto se $\mu(\angle mOn) = \pi/2$ nel qual caso si dice che m è perpendicolare ad n .
- (6) Triangoli; Vertici; Triangoli Degeneri -

Se A, B, C sono tre punti distinti i tre segmenti AB, BC, CA si dice che formano un triangolo di lati AB, BC, CA e vertici A, B, C . Se A, B e C sono allineati allora il triangolo ABC si dice degenerare.

(7) Simile; Congruente

Si dice che due figure geometriche sono simili se esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti delle due figure tale che tutte le corrispondenti distanze sono in proporzione ed i corrispondenti angoli hanno eguale misura (tranne, eventualmente, per il loro segno). Due figure geometriche sono congruenti se sono simili con una costante di proporzionalità $k = 1$.

Infine accetta i seguenti assiomi

(1) Assioma di misura sulla retta-

I punti $A, B \dots$ di una retta possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i numeri reali in modo che $|x_B - x_A| = d(A, B)$ per tutti i punti A e B .

(2) Assioma Punto-Retta -

Per due punti distinti P e Q passa una ed una sola retta.

(3) Assioma di misura degli Angoli-

Le semirette (o raggi) l, m, n, \dots , per un punto O possono essere messe in corrispondenza biunivoca con i numeri reali $\alpha_l, \alpha_m, \alpha_n \pmod{2\pi}$ in modo che se A and B sono due punti (distinti da O) di l ed m , rispettivamente, la differenza $\alpha_m - \alpha_l \pmod{2\pi}$ dei numeri associati alle rette l ed m è $\mu(\angle AOB)$.

(4) Assioma di Similarità.

Se in due triangoli $\triangle ABC$ ed $\triangle A'B'C'$ e per qualche costante $k > 0$, $d(A', B') = kd(A, B)$, $d(A', C') = kd(A, C)$, e $\mu(\angle B'A'C') = \mu(\pm\angle BAC)$, allora è anche $d(B', C') = kd(B, C)$, $\mu(\angle C'B'A') = \pm\mu(\angle CBA)$, e $\mu(\angle A'C'B') = \pm\mu(\angle ACB)$.

Concludiamo osservando che questo ultimo modello è quello usualmente adottato quando si studia la geometria analitica e l'analisi classica delle funzioni.

CAPITOLO 5

Le Geometrie non Euclidee

È quindi evidente a questo punto che possiamo provare a costruire un sistema assiomatico in tutto simile a quello della geometria Euclidea, tranne che per l'assioma delle parallele, che nella forma di Playfair, afferma:

Data una retta ed un punto esterno ad essa, è possibile tracciare una ed una sola retta passante per il punto e parallela alla retta data.

Possiamo sostituire l'assioma di Playfair con uno dei due seguenti:

Data una retta ed un punto esterno ad essa, è possibile tracciare più di una retta passante per il punto e parallela alla retta data.

Data una retta ed un punto esterno ad essa, non è possibile tracciare nessuna retta passante per il punto e parallela alla retta data.

Il primo dei due assiomi dà luogo alla Geometria Iperbolica mentre il secondo alla Geometria Ellittica.

Un sistema assiomatico purchè consistente, cioè privo di contraddizioni, completo, cioè in grado di fornire gli strumenti per dimostrare tutti i teoremi ed indipendente, cioè tale che nessun assioma può essere dedotto dagli altri, fornisce un chiaro sistema di riferimento in cui si può sviluppare la teoria da esso implicata.

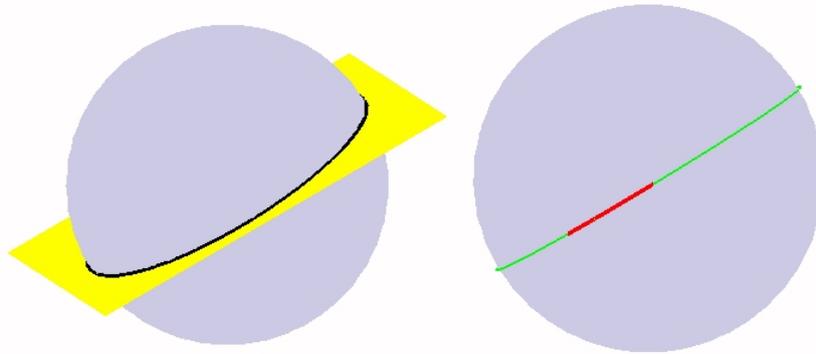
Ogni ragionamento però è più complicato ed astratto se non si dispone di un modello del sistema che consenta di visualizzare enunciati e procedimenti ed inoltre la costruzione di un modello giustifica la consistenza del sistema assiomatico introdotto.

Per la Geometria Euclidea siamo abituati ad usare a questo scopo un piano in cui è facile rappresentare un punto, una retta o disegnare due rette perpendicolari o parallele anche se spesso una rappresentazione poco attenta può indurre in errore.

Nel piano il postulato delle parallele di Euclide è di per sè evidente e, per contro, non è facile immaginare, nel piano, la possibilità di tracciare più parallele per un punto ad una retta data, o l'impossibilità di tracciarne; è più che mai, quindi, interessante dotarsi di un modello per studiare le diverse geometrie che nascono dalla negazione dell'assioma di Playfair.

1. La Geometria Ellittica

Un semplice modello per la geometria ellittica è costituito dalla superficie sferica; i punti della superficie sono i punti della geometria ed i cerchi massimi cioè le circonferenze ottenute intersecando la sfera con piani

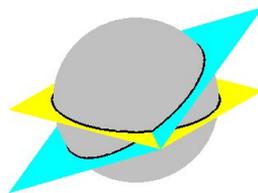


passanti per l'equatore, sono le rette della geometria,

La prolungabilità di una retta è assicurata dal fatto che un cerchio massimo può essere percorso quante volte si vuole.

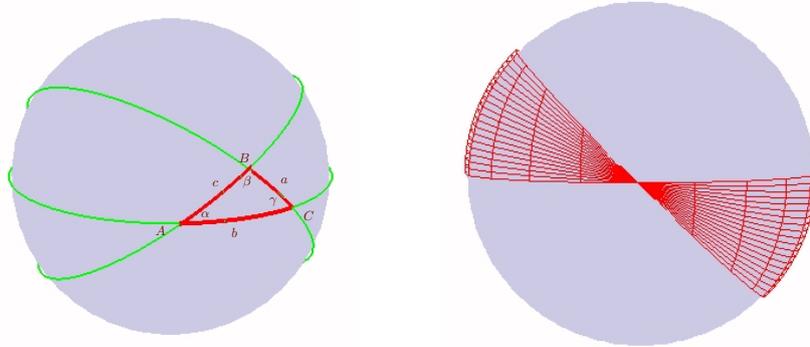
Un segmento è un arco di cerchio massimo e la sua lunghezza si misura in radianti mediante la misura dell'angolo al centro da esso sotteso sul cerchio massimo cui appartiene.

L'angolo tra due rette (cerchi massimi) si misura mediante l'angolo formato dai due piani cui appartengono i cerchi massimi che contengono i suoi lati.



È evidente che, data una retta della geometria, e cioè un cerchio massimo, qualunque altra retta della geometria e cioè qualunque altro cerchio massimo interseca la retta data e quindi non esistono rette parallele ad essa.

Un triangolo è delimitato da tre segmenti, cioè da tre archi di cerchio massimo, e si può vedere che la somma dei suoi angoli interni è superiore a 2π .



Questo fatto è facilmente dimostrabile; ne riportiamo la dimostrazione per illustrare come si può operare nell'ambito della geometria ellittica.

Allo scopo ci occorrono qualche definizione e qualche risultato.

DEFINIZIONE 4. È evidente che due piani dividono la superficie sferica in 4 parti a 2 a 2 uguali tra loro; chiamiamo lunetta ciascuna di queste quattro parti; ogni lunetta definisce un angolo sulla superficie sferica. Indicheremo come lunette opposte quelle uguali tra loro.

LEMMA 2. L'area di una lunetta è pari a $2\alpha R^2$ dove α è l'angolo da essa definito.

DIMOSTRAZIONE. L'affermazione discende immediatamente dal fatto che, detto α l'angolo definito dalla lunetta e detta A la sua area, si ha

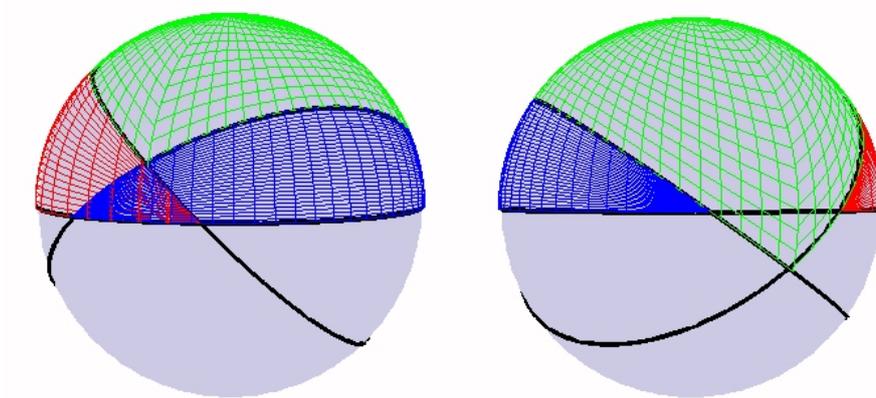
$$4\pi R^2 : 2A = \pi : \alpha$$

□

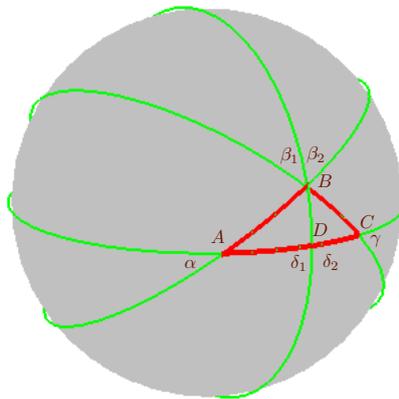
TEOREMA 11. Se α, β, γ sono gli angoli interni del triangolo $\triangle ABC$ e se $\mathcal{A}(\triangle ABC)$ è la sua area, allora

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{\mathcal{A}(\triangle ABC)}{R^2}$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo innanzi tutto che un triangolo non è sempre contenuto in una semisfera, come a prima vista si può essere indotti a pensare, infatti se $\triangle ABC$ è contenuto in una semisfera il suo complementare, cioè la parte di superficie sferica non contenuta in $\triangle ABC$, è ancora un triangolo, in quanto delimitato da tre archi di cerchio massimo, e non è contenuto in una semisfera.



Tuttavia è lecito supporre che il triangolo $\triangle ABC$ sia contenuto in una semisfera.



Infatti se così non fosse, potremmo dividere il triangolo $\triangle ABC$ in due triangoli $\triangle ABD$ e $\triangle BDC$ ciascuno contenuto in una semisfera. Se ammettiamo di aver verificato che per tali triangoli si ha

$$\alpha + \beta_1 + \delta_1 - \pi = \frac{\mathcal{A}(\triangle ABD)}{R^2} \quad \text{e} \quad \beta_2 + \delta_2 + \gamma - \pi = \frac{\mathcal{A}(\triangle BDC)}{R^2}$$

dove

$$\beta_1 + \beta_2 = \beta \quad \text{e} \quad \delta_1 + \delta_2 = \pi$$

sommando otteniamo

$$\alpha + \beta_1 + \delta_1 + \beta_2 + \delta_2 + \gamma - 2\pi = \frac{\mathcal{A}(\triangle ABD) + \mathcal{A}(\triangle BDC)}{R^2} = \frac{\mathcal{A}(\triangle ABC)}{R^2}$$

Assumiamo pertanto che il triangolo $\triangle ABC$ sia contenuto in una semisfera. $\triangle ABD$ è definito dall'intersezione delle tre lunette che definiscono gli angoli α, β, γ ed inoltre se sommiamo l'area delle tre lunette otteniamo l'area della semisfera in cui giace il triangolo sommata a 2 volte l'area del triangolo stesso in quanto due delle lunette coprono il triangolo, mentre

la superficie della terza esce dalla semisfera in cui si trova il triangolo per un'area pari a quella del triangolo stesso.

Pertanto

$$2\pi R^2 = 2\alpha R^2 + 2\beta R^2 + 2\gamma R^2 + 2\mathcal{A}(\triangle ABC)$$

Dividendo per $2R$ si conclude

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{\mathcal{A}(\triangle ABC)}{R^2}$$

□

Possiamo, in questo ambiente dimostrare alcuni risultati che sono la naturale traduzione di teoremi ben noti in ambito Euclideo.

Tra questi riportiamo i due risultati fondamentali della trigonometria sferica.

TEOREMA 12. - *Teorema di Carnot* - Se $\triangle ABC$ è un triangolo e se a, b, c sono le lunghezze dei suoi lati, allora

$$\cos(\alpha) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\alpha)$$

TEOREMA 13. - *Teorema dei seni* - Se $\triangle ABC$ è un triangolo e se a, b, c sono le lunghezze dei suoi lati, allora

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(a)} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(b)} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(c)}$$

Il teorema di Carnot, nel caso in cui $\triangle ABC$ sia rettangolo in A diventa l'estensione nella geometria ellittica del teorema di Pitagora

TEOREMA 14. - *Teorema di Pitagora* - Se $\triangle ABC$ è un triangolo retto in C e se a, b, c sono le lunghezze dei suoi lati, allora

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b)$$

Il nome Teorema di Pitagora può sembrare inopportuno ma è giustificato dal fatto che, se usiamo lo sviluppo di McLaurin di \cos , possiamo affermare che

$$\cos(c) = 1 - \frac{c^2}{2} + c^2\omega(c)$$

$$\cos(a) = 1 - \frac{a^2}{2} + a^2\omega(a)$$

$$\cos(b) = 1 - \frac{b^2}{2} + b^2\omega(b)$$

dove con $\omega(x)$ si indica un infinitesimo con x per cui

$$1 - \frac{c^2}{2} + c^2\omega(c) = \left(1 - \frac{a^2}{2} + a^2\omega(a)\right) \left(1 - \frac{b^2}{2} + b^2\omega(b)\right)$$

e quindi

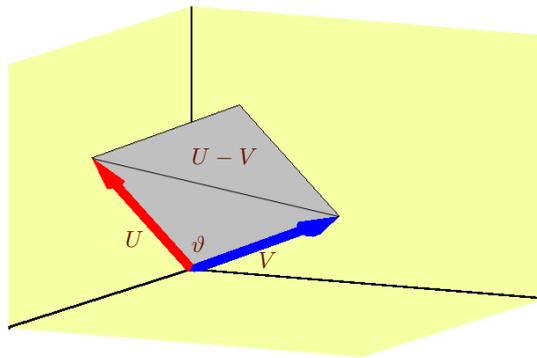
$$\frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \text{Termini di ordine superiore}$$

Il teorema dei seni è semplice conseguenza del teorema di Carnot che a sua volta deriva immediatamente dalle proprietà del prodotto scalare in \mathbb{R}^3 come vediamo di seguito.

DEFINIZIONE 5. In \mathbb{R}^3 definiamo prodotto scalare di due vettori $\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$ il valore

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = \|\mathbf{U}\| \|\mathbf{V}\| \cos(\theta)$$

dove θ è l'angolo compreso tra i due vettori \mathbf{U} e \mathbf{V} .



Si ha:

TEOREMA 15. Se \mathbf{U}, \mathbf{V} sono due vettori di \mathbb{R}^3 si ha:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = \|\mathbf{U}\| \|\mathbf{V}\| \cos(\theta) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

dove θ è l'angolo compreso tra i due vettori \mathbf{U} e \mathbf{V} .

DIMOSTRAZIONE. Se applichiamo il teorema di Carnot nel piano definito dai due vettori al triangolo $\triangle UOV$ otteniamo che

$$\begin{aligned} (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2 &= \|\mathbf{U} - \mathbf{V}\|^2 = \\ &= \|\mathbf{U}\|^2 + \|\mathbf{V}\|^2 - 2\|\mathbf{U}\| \|\mathbf{V}\| \cos(\theta) \end{aligned}$$

e svolgendo i prodotti

$$\|\mathbf{U}\|^2 + \|\mathbf{V}\|^2 - 2(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) = \|\mathbf{U}\|^2 + \|\mathbf{V}\|^2 - 2\|\mathbf{U}\| \|\mathbf{V}\| \cos(\theta)$$

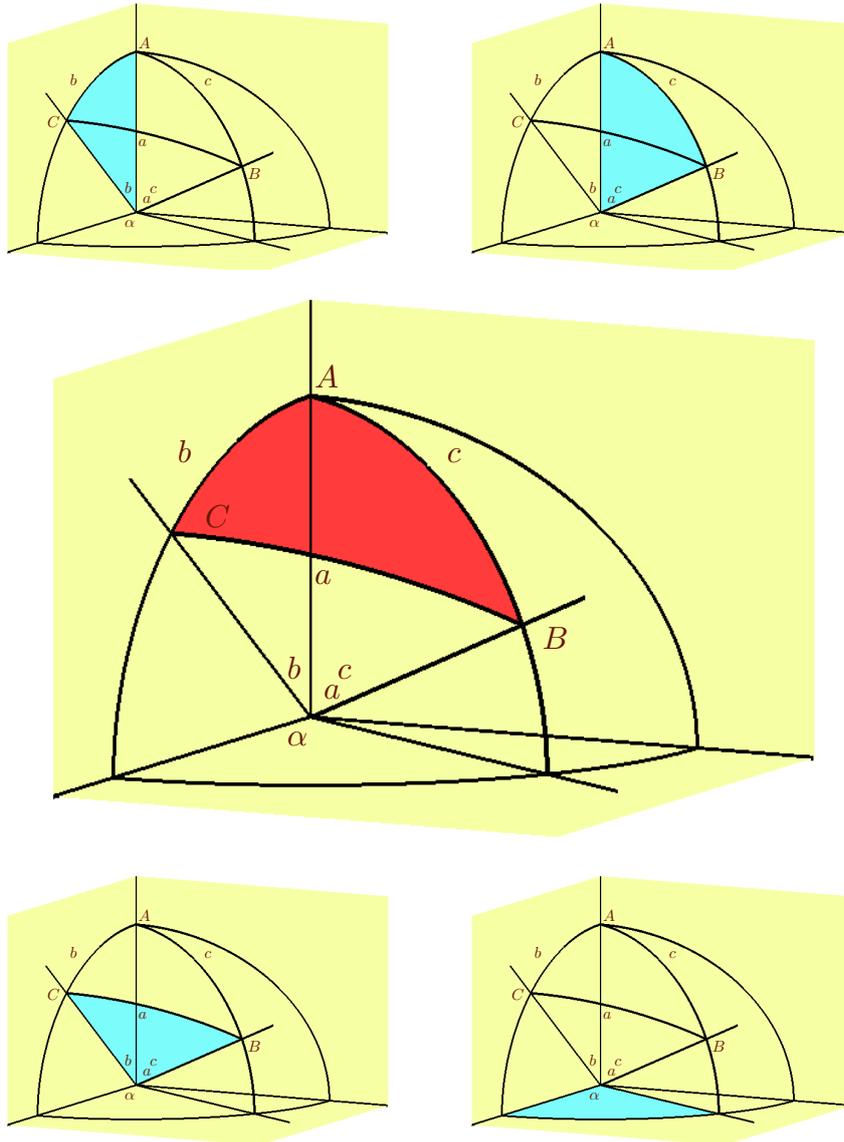
da cui

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \|\mathbf{U}\| \|\mathbf{V}\| \cos(\theta) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$$

□

Consideriamo ora un triangolo sferico $\triangle ABC$, i cui lati opposti ai vertici A, B, C , valgono, misurati in radianti, a, b, c . (Consideriamo la sfera unitaria)

Consideriamo poi un sistema di riferimento in cui l'asse z sia coincidente con il diametro della sfera che contiene OA , il piano xy passi per l'origine O e il piano x, z contenga, ad esempio, il punto C .



Pertanto le coordinate dei punti A, B, C saranno:

$$A = (0, 0, 1)$$

$$B = (\cos \alpha \cos(\frac{\pi}{2} - c), \sin \alpha \cos(\frac{\pi}{2} - c), \sin(\frac{\pi}{2} - c)) = \\ = (\cos \alpha \sin c, \sin \alpha \sin c, \cos c)$$

$$C = (\sin b, 0, \cos b)$$

Si ha pertanto, calcolando il prodotto scalare di OB per OC

$$\|OB\| \|OC\| \cos(\alpha) = \cos \alpha = \cos \alpha \sin c \sin b + \cos c \cos b$$

e ne deduciamo il teorema di Carnot.

Per ottenere il teorema dei seni è sufficiente ricavare dall'uguaglianza precedente

$$\cos \alpha \sin c \sin b = \cos \alpha - \cos c \cos b$$

ed elevare al quadrato entrambi i membri

$$\cos^2 \alpha \sin^2 c \sin^2 b = \cos^2 \alpha + \cos^2 c \cos^2 b - 2 \cos \alpha \cos b \cos c$$

Sostituendo $1 - \sin^2 \alpha$ a $\cos^2 \alpha$, $1 - \sin^2 b$ a $\cos^2 b$ e $1 - \sin^2 c$ a $\cos^2 c$, otteniamo

$$\sin^2 c \sin^2 b - \sin^2 \alpha \sin^2 c \sin^2 b = \\ = 1 - \sin^2 \alpha + (1 - \sin^2 c)(1 - \sin^2 b) - 2 \cos \alpha \cos b \cos c$$

e quindi

$$\sin^2 c \sin^2 b - \sin^2 \alpha \sin^2 c \sin^2 b = \\ = 1 - \sin^2 \alpha + 1 - \sin^2 c - \sin^2 b + \sin^2 c \sin^2 b - 2 \cos \alpha \cos b \cos c$$

da cui

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \sin^2 \alpha \sin^2 c \sin^2 b = \sin^2 \alpha + \sin^2 c + \sin^2 b + 2 \cos \alpha \cos b \cos c - 2$$

ed infine

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 c + \sin^2 b + 2 \cos \alpha \cos b \cos c - 2}{\sin^2 \alpha \sin^2 c \sin^2 b}$$

Poichè il secondo membro è una funzione di α, b, c in cui i ruoli di α, b, c possono essere scambiati senza cambiare il risultato, possiamo concludere che

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 b} = \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 c}$$

ed il teorema dei seni.

2. La Geometria Iperbolica

Della Geometria Iperbolica sono a disposizione diversi modelli ciascuno dei quali con sue proprie caratteristiche, ciascuno dei quali riconducibile agli altri, ciascuno dei quali adatto per certi scopi, meno adatti per altri.

In breve possiamo elencare tra i modelli disponibili:

- il Disco di Klein
- il Disco di Poincaré
- il Semipiano Superiore di Poincaré
- la Pseudosfera (o meglio le pseudo sfere)

Il primo, in ordine cronologico, di tali modelli è la Pseudo sfera che risale al 1868 e fu ideato da Eugenio Beltrami (1835-1900) per studiare la geometria iperbolica che Bolyai e Lobachevsky introdussero tra il 1823 ed il 1840.

Si tratta di un approccio del tutto simile al modello della sfera per la geometria Ellittica, tuttavia è incompleto e lo considereremo per ultimo.

Comunque, la sua incompletezza ed il fatto di essere riservato per la fine non stanno ad indicare la sua minore rilevanza, anzi possiamo dire che tra tutti è il modello più affascinante.

Felix Christian Klein (1849,1925) nel 1871 completò il lavoro di Beltrami producendo il modello che porta il suo nome e riconoscendo come non euclidea la geometria sulla sfera che peraltro era da tempo conosciuta sotto le spoglie della trigonometria sferica.

Jules Henri Poincaré (1854-1912) infine introdusse due diversi modelli del piano iperbolico: il disco ed il semipiano superiore .

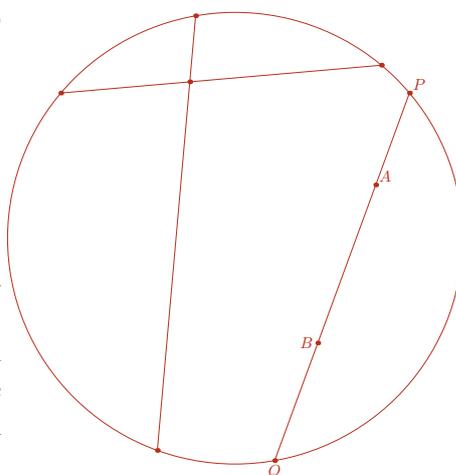
Esamineremo ora brevemente ciascuno di essi.

2.1. Il Disco di Klein. Nel modello di Klein, che indichiamo con \mathcal{D}_k i punti della geometria sono i punti interni a un cerchio di raggio arbitrario, che possiamo supporre uguale ad 1. Le rette sono rappresentate dalle corde del cerchio ovviamente a loro volta prive degli estremi.

Sottolineiamo che il cerchio è privo della sua circonferenza e che le corde sono prive degli estremi. I punti della circonferenza sono di solito detti Punti Ideali e rappresentano i punti all'infinito della geometria, mentre quelli esterni alla circonferenza sono detti Punti Ultraideali,

Due rette si dicono parallele se non si intersecano, cioè se le corde che le rappresentano non hanno punti comuni all'interno del cerchio.

La distanza tra due punti A, B del cerchio di Klein si misura nella seguente maniera:



$$d_K(A, B) = \frac{1}{2} \left| \ln \left(\frac{AP \cdot BQ}{BP \cdot AQ} \right) \right|$$

dove P, Q sono gli estremi della corda passante per i punti A e B
La quantità

$$\frac{AP \cdot BQ}{BP \cdot AQ}$$

prende il nome di birapporto e si indica con

$$(A, B, P, Q)$$

Si può dimostrare che il birapporto è un invariante per le trasformazioni proiettive, cioè per le trasformazioni del tipo

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

È immediato osservare che

$$\lim_{B \rightarrow Q} d_K(A, B) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{A \rightarrow P} d_K(A, B) = +\infty$$

per cui l'archimedicità del modello, cioè il fatto che le rette siano infinite, è assicurata.

A proposito di distanza possiamo osservare che, più precisamente, possiamo definire una metrica mediante la

$$ds^2 = \frac{1 - y^2}{(1 - x^2 - y^2)^2} dx^2 + \frac{2xy}{(1 - x^2 - y^2)^2} dx dy + \frac{1 - x^2}{(1 - x^2 - y^2)^2} dy^2$$

che ci consente di calcolare la lunghezza di una linea arbitraria

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{D}_K$$

mediante la

$$\int_{\gamma} ds = \int_a^b \sqrt{\frac{1 - y^2}{(1 - x^2 - y^2)^2} \dot{x}^2 + \frac{2xy}{(1 - x^2 - y^2)^2} \dot{x}\dot{y} + \frac{1 - x^2}{(1 - x^2 - y^2)^2} \dot{y}^2} dt$$

La distanza tra due punti è la lunghezza del segmento di retta che li congiunge.

Il punto debole del modello di Klein è costituito dalla difficoltà di misurare gli angoli tra due rette; usualmente si ricorre al fatto che, come vedremo, il disco di Klein è isomorfo al disco di Poincaré, dove è invece semplice definire l'angolo tra due rette.

L'angolo tra due rette nel Disco di Klein è definito come l'angolo tra le rette ad esse corrispondenti nel disco di Poincaré mediante l'isometria canonica che vedremo in seguito.

Tuttavia è abbastanza semplice definire cosa si intende per rette perpendicolari. Infatti diciamo che due rette r, q del disco di Klein sono tra loro perpendicolari:

- se una delle due è un diametro e se sono perpendicolari nel senso Euclideo;

- oppure se dette t_1, t_2 le rette tangenti al cerchio negli estremi della corda che rappresenta r e detto P il loro punto di intersezione, il prolungamento di r passa per P .

P si chiama Polo della retta r

Non è immediato verificare che se $q \perp r$ allora $r \perp q$ tuttavia la proprietà riflessiva vale. Allo scopo di fornirne una giustificazione occorre prima provare un semplice risultato preliminare.

LEMMA 3. Se r è una retta nel disco di Klein, se P è il suo Polo e se M è il punto medio della corda di estremi A e B e se indichiamo con O il centro del disco di Klein, allora

$$OP = \frac{1}{OM}$$

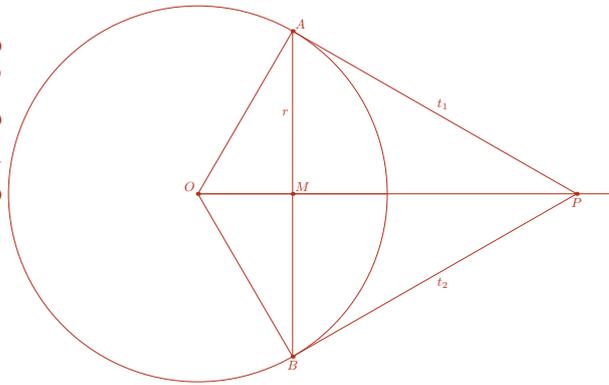
DIMOSTRAZIONE.

La tesi segue dal fatto che $\triangle OMA$ e $\triangle OAP$ sono simili in quanto sono rettangoli (in M e A) e hanno l'angolo $\angle AOP$ in comune.

Si ha infatti che

$$\frac{OM}{OA} = \frac{OA}{OP}$$

e $OA = 1$. \square
Possiamo ora dimostrare che



TEOREMA 16. Siano r, q due rette del disco di Klein, allora $q \perp r$ se e solo se $r \perp q$.

DIMOSTRAZIONE. Siano, O il centro del disco di Klein, A, B gli estremi della corda che definisce la retta r , M il suo punto medio, P il polo della retta r .

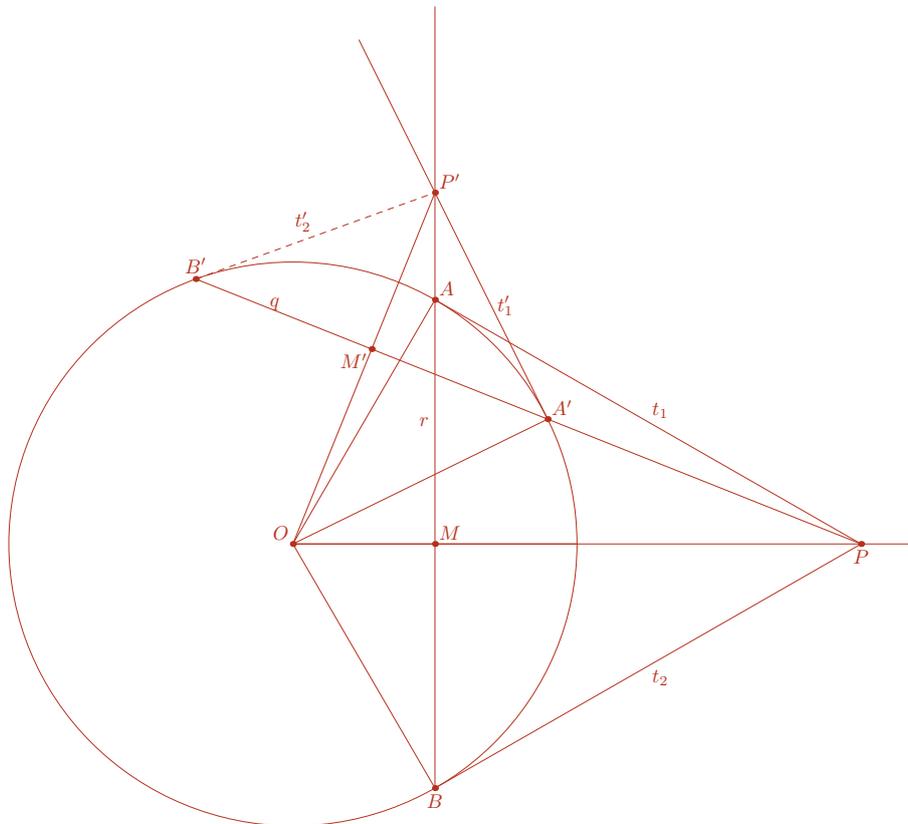
Consideriamo una retta q definita dalla corda A', B' determinata nel disco di Klein da una semiretta uscente da P e siano M' e P' rispettivamente il punto medio di $A'B'$ ed P' il punto di intersezione della retta per OM' con la retta r su AB .

Poichè $\triangle OM'P$ ed $\triangle OMP'$ sono simili in quanto sono rettangoli (in M ed M') e hanno l'angolo $\angle P'OP$ in comune, possiamo affermare che

$$\frac{OM}{OM'} = \frac{OP'}{OP}$$

e, dal momento che $OP = \frac{1}{OM}$,

$$OP' OM' = OM OP = 1$$



Ne segue che P' è il polo della retta q e $r \perp q$

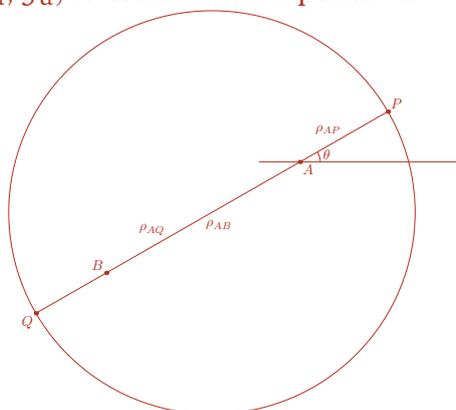
□

Diciamo infine che due rette si dicono iperparallele se esiste una retta perpendicolare ad entrambe.

Per renderci conto delle caratteristiche del disco di Klein possiamo ad esempio caratterizzare una circonferenza in \mathcal{D}_K . A questo scopo possiamo ad esempio procedere come segue.

Consideriamo un punto A fissato nel cerchio di Klein e determiniamo i punti B da esso equidistanti.

Allo scopo usiamo un riferimento cartesiano con origine nel centro del disco di Klein, che avrà quindi equazione $x^2 + y^2 = 1$, ed indichiamo con (x_a, y_a) le coordinate del punto A .



Sia

$$\begin{cases} x = x_a + \rho \cos(\theta) \\ y = y_a + \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

un punto generico del piano; per θ fissato otterremo una retta per C inclinata di θ sul semiasse positivo delle x .

Possiamo facilmente trovare le intersezioni di tale retta con il cerchio di Klein, siano esse P e Q, calcolando

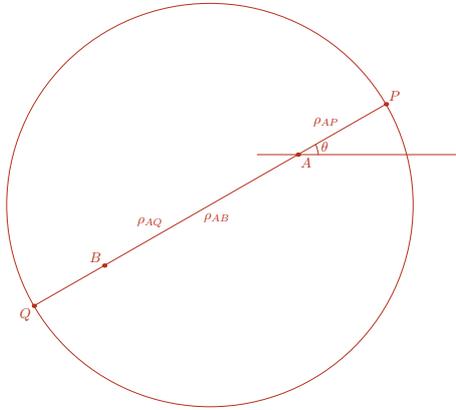
$$\rho_{AP}(\theta) = -(x_a \cos(\theta) + y_a \sin(\theta)) + \sqrt{(x_a \cos(\theta) + y_a \sin(\theta))^2 - (x_a^2 + y_a^2 - 1)}$$

e

$$-\rho_{AQ}(\theta) = -(x_a \cos(\theta) + y_a \sin(\theta)) - \sqrt{(x_a \cos(\theta) + y_a \sin(\theta))^2 - (x_a^2 + y_a^2 - 1)}$$

se indichiamo con $\rho_{AB}(\theta)$ la distanza euclidea tra A e B avremo che

$$d_K(A, B) = \frac{1}{2} \left| \ln \left(\frac{\rho_{AP}(\theta)(\rho_{AQ}(\theta) - \rho_{AB}(\theta))}{\rho_{AQ}(\theta)(\rho_{AP}(\theta) + \rho_{AB}(\theta))} \right) \right|$$



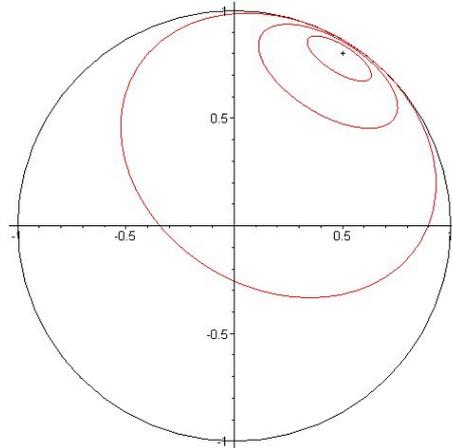
Imponendo che $d_K(A, B) = R$ e risolvendo per ρ_{AB} possiamo ricavare

$$\rho_{AB} = \frac{\rho_{AP}\rho_{AQ}(1 - e^{2R})}{\rho_{AP} + e^{2R}\rho_{AQ}}$$

ed individuare, per ogni θ fissato, il punto della retta di inclinazione θ che appartiene al cerchio di centro A e raggio R.

Sia $(x_b(\theta), y_b(\theta))$ tale punto avremo allora

$$\begin{cases} x_b(\theta) = x_a + \rho_{AB}(\pi + \theta) \cos(\theta) \\ y_b(\theta) = y_a + \rho_{AB}(\pi + \theta) \sin(\theta) \end{cases}$$



$(x_b(\theta), y_b(\theta))$ costituiscono le equazioni parametriche della circonferenza di centro A e raggio R nel disco di Klein e se disegniamo tale linea possiamo constatare che si tratta di una ellisse euclidea.

2.2. Il Disco di Poincaré. Nel modello di Poincaré, che indichiamo con \mathcal{D}_p i punti della geometria sono i punti interni a un cerchio di raggio arbitrario, che possiamo supporre uguale ad 1, in ordine alla isometria che, come vedremo, possiamo costruire tra il cerchio di Poincaré e quello di Klein .

Le rette sono rappresentate da circonferenze ortogonali alla circonferenza che delimita il disco di Poincaré e dai diametri del disco stesso.

Anche in questo caso il cerchio è privo della sua circonferenza così come gli archi di circonferenza ed i diametri che rappresentano le rette. I punti della circonferenza rappresentano come prima i punti all'infinito.

Nel cerchio di Poincaré possiamo misurare gli angoli tra due rette semplicemente misurando gli angoli tra le tangenti nel punto di intersezione tra le circonferenze che le rappresentano.

Le distanze nel cerchio di Poincaré si possono misurare come segue:

$$d_p(A, B) = \left| \ln \left(\frac{AP \cdot BQ}{BP \cdot AQ} \right) \right|$$

oppure mediante la metrica indotta da

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

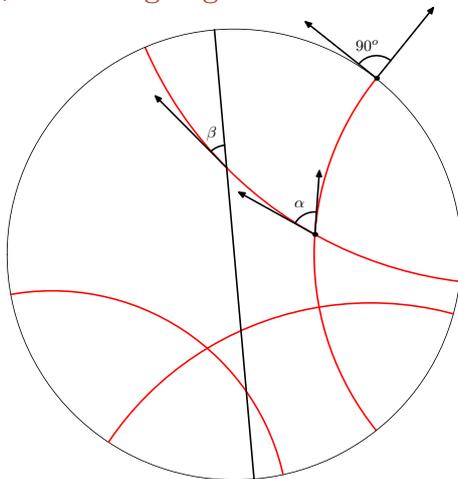
che ci consente di calcolare la lunghezza di una linea arbitraria

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{D}_p$$

mediante la

$$\int_{\gamma} ds = \int_a^b \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{1 - x^2 - y^2} dt$$

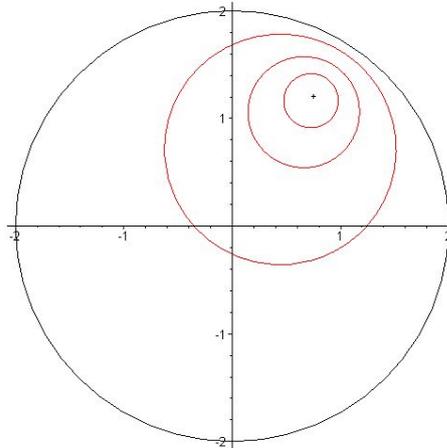
La distanza tra due punti è la lunghezza del segmento di retta (iperbolica) che li congiunge.



Si definiscono parallele due rette (nel senso di Poincaré) che non si incontrano e, data una retta ed un punto esterno ad essa, è possibile definire un angolo di parallelismo, come l'angolo formato dalle ultime due rette parallele alla retta data, passanti per il punto.

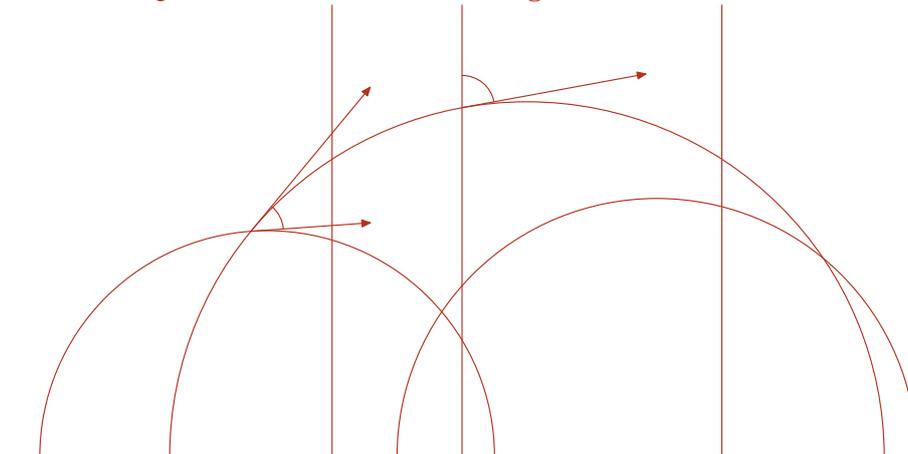
In \mathcal{D}_P le circonferenze sono ancora circonferenze anche se il centro Iperbolico non coincide con il centro euclideo.

Si possono ottenere dalle circonferenze del disco di Klein usando l'isometria canonica che vedremo in seguito.



2.3. Il Semipiano Superiore di Poincaré. Un modello alternativo al disco di Poincaré è costituito dal Semipiano Superiore di Poincaré che indicheremo con \mathcal{H}_P .

I punti della Geometria sono, in questo caso, i punti della metà superiore del piano euclideo, sono rette per questo modello le semirette parallele all'asse delle y e le semicirconferenze ortogonali all'asse delle x .



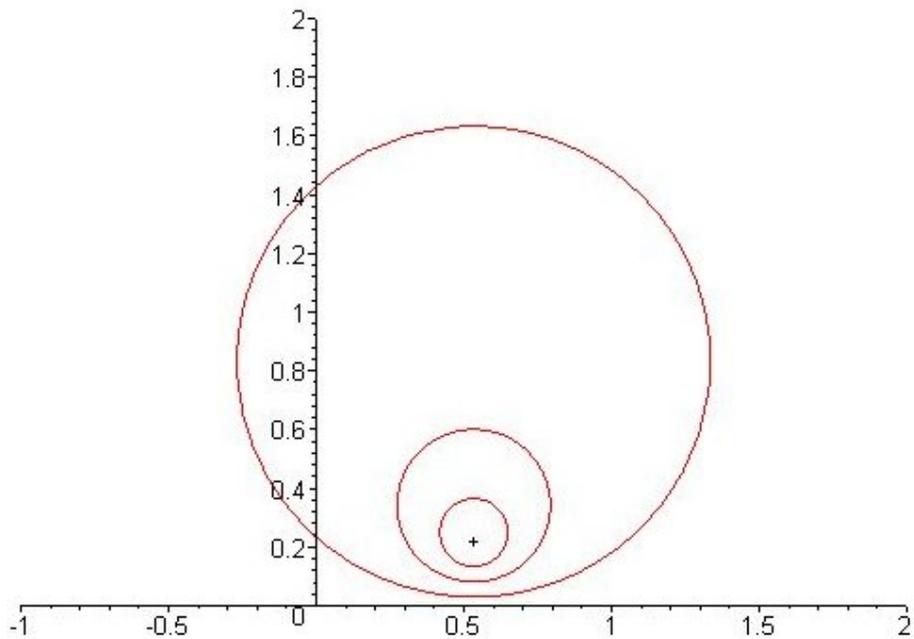
Le distanze possono essere misurate mediante la metrica

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

il che significa che se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, per $t \in [a, b]$ è una curva in \mathcal{H}_P possiamo calcolare la lunghezza $\ell(\gamma)$ della curva γ mediante la formula:

$$\ell(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_a^b \frac{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}{y(t)} dt$$

È possibile definire una trasformazione conforme (Che conserva distanze ed angoli) tra il semipiano superiore ed il disco di Poincaré e facendo uso di tale trasformazione si possono disegnare le circonferenze.

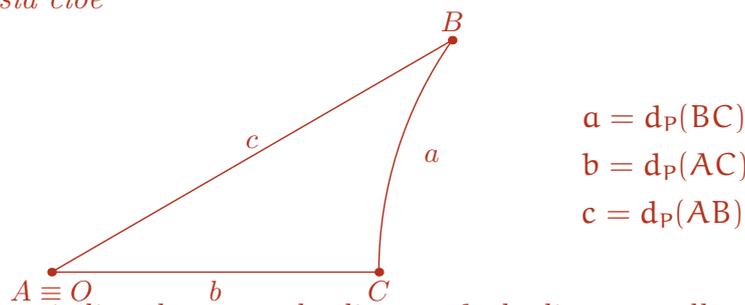


3. Il Teorema di Pitagora Iperbolico

Anche nel piano iperbolico, rappresentato, ad esempio mediante il Disco di Poincaré, vale una forma del teorema di Pitagora. Il risultato può essere enunciato come segue.

TEOREMA 17. *Sia $\triangle ABC$ un triangolo nello spazio iperbolico, retangolo in C .*

Siano a, b, c , rispettivamente, le misure dei lati opposti ad A, B, C , sia cioè



$$a = d_P(BC)$$

$$b = d_P(AC)$$

$$c = d_P(AB)$$

indicando, come al solito con d_P la distanza nella metrica del disco di Poincaré.

Allora

$$\cosh c = \cosh a \cosh b$$

Inoltre

$$\cos A = \frac{\tanh b}{\tanh c} \quad \sin A = \frac{\sinh a}{\sinh c}$$

e

$$\cosh a = \frac{\cos A}{\sin B}$$

Prima di dimostrare il teorema di Pitagora vediamo che effettivamente, come nel caso ellittico, la precedente uguaglianza merita il nome di teorema di Pitagora.

Usando il polinomio di McLaurin di \cosh possiamo infatti affermare che

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + x^2\omega(x)$$

per cui il teorema di Pitagora iperbolico assicura che

$$1 + \frac{c^2}{2} + c^2\omega(c) = \left(1 + \frac{a^2}{2} + a^2\omega(a)\right) \left(1 + \frac{b^2}{2} + b^2\omega(b)\right)$$

e

$$c^2 = a^2 + b^2 + \text{Termini di ordine superiore}$$

Possiamo quindi affermare che, localmente il teorema di Pitagora Iperbolico si approssima mediante l'usuale enunciato.

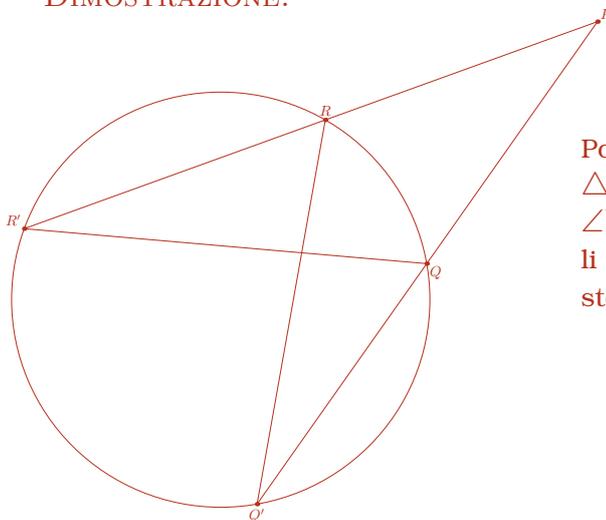
Per dimostrare il teorema sono inoltre utili alcuni risultati di geometria elementare.

LEMMA 4. *Sia Γ una circonferenza, P un punto ad essa esterno e siano q e r due rette secanti Γ . Siano Q, Q' ed R, R' i punti in cui, in ordine di distanza da P , le rette q ed r intersecano Γ . Sia t una retta tangente Γ per P e sia T il punto di tangenza.*

Allora

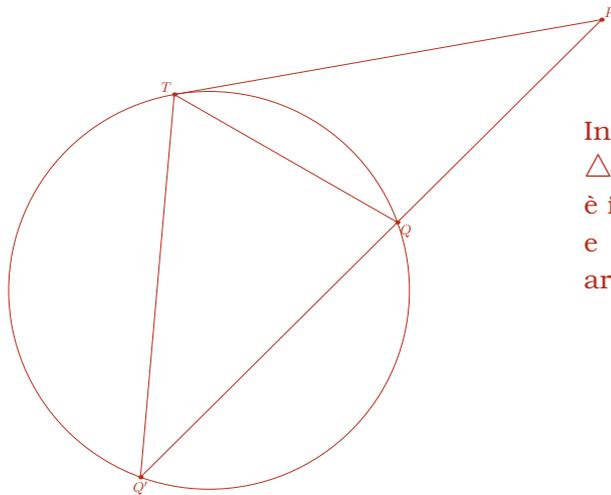
$$PR \cdot PR' = PQ \cdot PQ' = PT^2$$

DIMOSTRAZIONE.



Poichè i triangoli $\triangle PQR'$ e $\triangle PRQ'$ sono simili (l'angolo $\angle P$ è in comune e gli angoli $\angle Q'$ e $\angle R'$ insistono sullo stesso arco), si ha

$$\frac{PR}{PQ} = \frac{PQ'}{PR'}$$



Inoltre dalla similitudine di $\triangle PTQ$ e $\triangle PTQ'$ (l'angolo $\angle P$ è in comune e gli angoli $\angle Q'$ e $\angle T$ insistono sullo stesso arco), si ha

$$\frac{PT}{PQ} = \frac{PQ'}{PT}$$

□

LEMMA 5. Sia P un punto del disco di Poincaré di centro O e raggio 1 ; sia inoltre

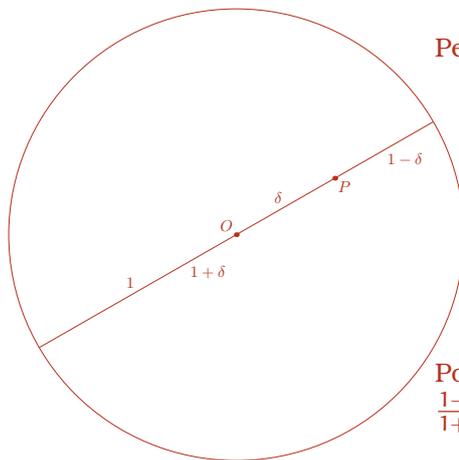
$d = d_P(OP)$ distanza iperbolica

$\delta = d(OP)$ distanza euclidea

Allora

$$e^d = \frac{1 + \delta}{1 - \delta} \quad , \quad \delta = \frac{e^d - 1}{e^d + 1}$$

DIMOSTRAZIONE.



Per definizione

$$\begin{aligned} d = d_P(OP) &= \\ &= \left| \ln \left(\frac{1 - \delta}{1 + \delta} \right) \right| = \\ &= \ln \left(\frac{1 + \delta}{1 - \delta} \right) \end{aligned}$$

Poichè $\delta \in [0, 1]$ si ha

$$\frac{1 - \delta}{1 + \delta} \in [0, 1] \implies \left| \ln \frac{1 - \delta}{1 + \delta} \right| = \ln \frac{1 + \delta}{1 - \delta}$$

Quindi

$$e^d = \frac{1 + \delta}{1 - \delta}$$

e, risolvendo per δ ,

$$\delta = \frac{e^d - 1}{e^d + 1}$$

□

Semplici calcoli algebrici permettono di affermare che:

COROLLARIO 1. Nelle ipotesi del lemma precedente

$$\sinh d = \frac{2\delta}{1 - \delta^2}$$

$$\cosh d = \frac{1 + \delta^2}{1 - \delta^2}$$

$$\tanh d = \frac{2\delta}{1 + \delta^2}$$

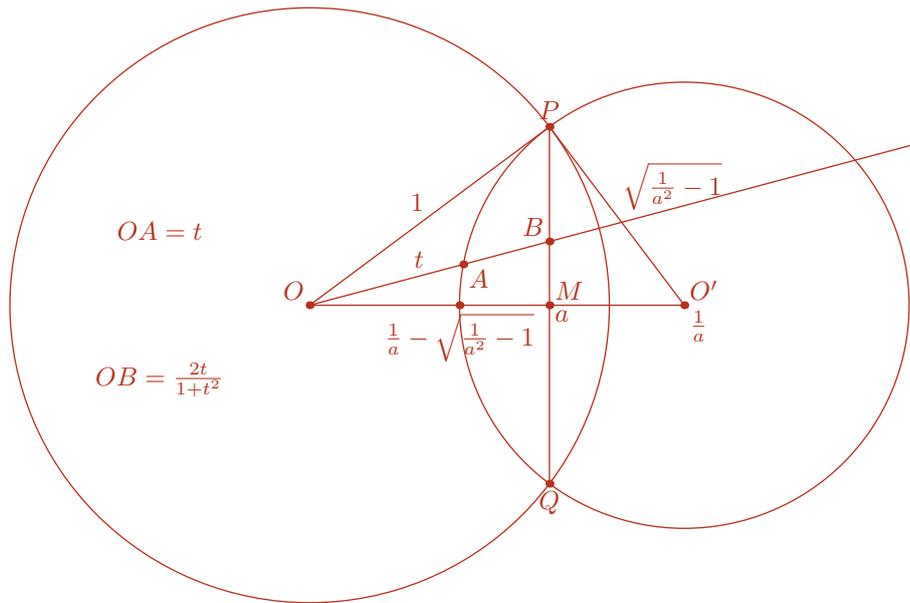
LEMMA 6. Sia Γ una circonferenza di centro O' ortogonale al disco di Poincaré \mathcal{D}_P . (Γ è una retta in \mathcal{D}_P).

Siano P, Q gli estremi della parte di Γ in \mathcal{D}_P . Sia a la distanza di M , punto medio di PQ dal centro O di \mathcal{D} .

Sia r una retta per O che interseca Γ in A e la corda PQ in B .

Allora se $OA = t$ si ha

$$OB = \frac{2t}{1 + t^2}$$



DIMOSTRAZIONE. Per la similitudine dei triangoli $\triangle OMP$ e $\triangle OPO'$, (un angolo retto in M e P , rispettivamente, ed un angolo in comune in O), si ha che

$$\frac{OO'}{OP} = \frac{OP}{OM}$$

$OO' = \frac{1}{a}$, non appena si ricordi che $OM = a$ e $OP = 1$.

Quindi $O' = (\frac{1}{a}, 0)$ ed inoltre il raggio di Γ è

$$O'P = \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} = O'A$$

Sia ora $y = mx$ l'equazione della retta per OB , allora

$$B = (a, ma) \quad \text{e} \quad OB = a\sqrt{1 + m^2}$$

Intersecando $y = mx$ con Γ che ha equazione

$$\left(x - \frac{1}{a}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{a^2} - 1$$

si ottiene che

$$x^2(1 + m^2) - \frac{2}{a}x + 1 = 0$$

e

$$x = \frac{\frac{1}{a} \pm \sqrt{\frac{1}{a^2} - (1 + m^2)}}{1 + m^2}$$

per cui

$$A = \left(\frac{\frac{1}{a} - \sqrt{\frac{1}{a^2} - (1 + m^2)}}{1 + m^2}, m \frac{\frac{1}{a} - \sqrt{\frac{1}{a^2} - (1 + m^2)}}{1 + m^2} \right)$$

e

$$OA = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{1 + m^2} \left(\frac{1}{a} - \sqrt{\frac{1}{a^2} - (1 + m^2)} \right)$$

Ora, posto $OA = t$, si ottiene

$$t = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left(\frac{1}{a} - \sqrt{\frac{1}{a^2} - (1+m^2)} \right)$$

$$\frac{1}{a} - t\sqrt{1+m^2} = \sqrt{\frac{1}{a^2} - (1+m^2)}$$

$$\frac{1}{a^2} + t^2(1+m^2) - \frac{2t}{a}\sqrt{1+m^2} = \frac{1}{a^2} - (1+m^2)$$

$$(1+t^2)(1+m^2) = \frac{2t}{a}\sqrt{1+m^2}$$

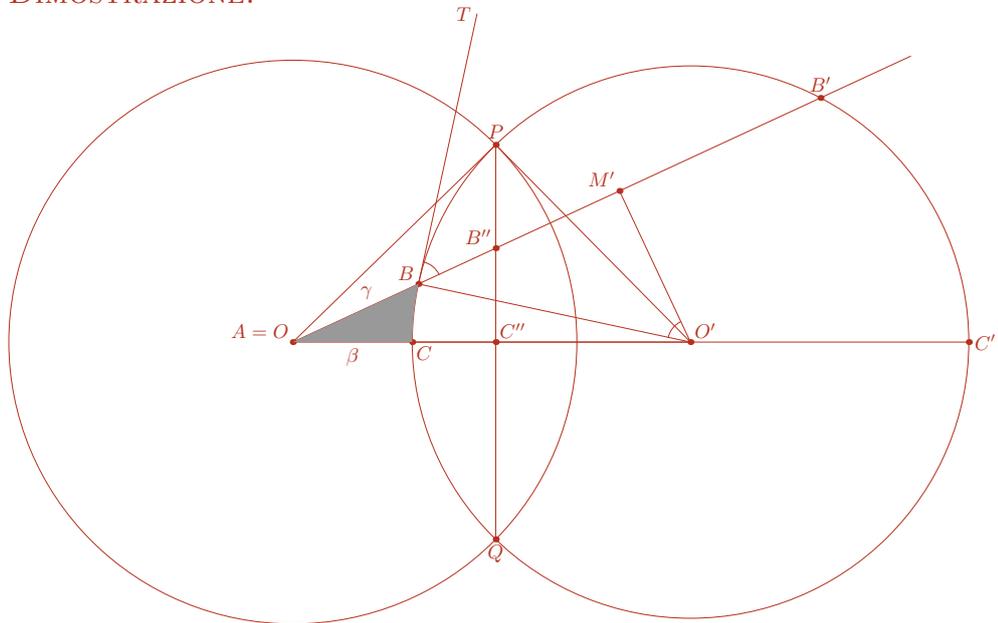
ed infine

$$\frac{2t}{1+t^2} = a\sqrt{1+m^2} = OB$$

□

Dimostriamo ora il teorema di Pitagora.

DIMOSTRAZIONE.



Consideriamo il triangolo $\triangle ABC$ rettangolo in C e, mediante traslazioni e rotazioni facciamo in modo che il vertice in A coincida con il centro O di \mathcal{D}_P e che il lato AC sia su un diametro di \mathcal{D}_P .

Sia Γ la circonferenza ortogonale alla circonferenza che delimita \mathcal{D}_P , su cui giace il lato BC del triangolo.

Osserviamo che $AC = OC$ e $AB = OB$ sono raggi di \mathcal{D}_P .

Si ha

$$c = d_p(AB) = d_p(OB)$$

$$b = d_p(AC) = d_p(OC)$$

$$\gamma = d(AB) = d(OB)$$

$$\beta = d(AC) = d(OC)$$

Per uno dei lemmi precedenti si ha

$$AB'' = \frac{2\gamma}{1 + \gamma^2} = \tanh c$$

e

$$AC'' = \frac{2\beta}{1 + \beta^2} = \tanh b$$

Pertanto

$$\cos A = \frac{AC''}{AB''} = \frac{\tanh b}{\tanh c}$$

D'altro canto $\angle TBM' = \angle M'O'B$ è l'angolo in B di $\triangle ABC$ e

$$\sin B = \frac{BM'}{BO'} = \frac{B'B}{C'C}$$

Ma $AC = \beta$ e quindi, per il lemma 4, $AC' = \frac{1}{\beta}$ da cui

$$CC' = \frac{1}{\beta} - \beta = \frac{1}{\frac{e^b-1}{e^b+1}} - \frac{e^b-1}{e^b+1} = \frac{2}{\sinh b}$$

mentre $AB = \gamma$ e quindi $AB' = \frac{1}{\gamma}$ da cui

$$BB' = \frac{1}{\gamma} - \gamma = \frac{2}{\sinh c}$$

Ne viene che

$$\sin B = \frac{\sinh b}{\sinh c}$$

e, simmetricamente

$$\sin A = \frac{\sinh a}{\sinh c}$$

Ma allora

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\frac{\sinh^2 a}{\sinh^2 c} + \frac{\tanh^2 b}{\tanh^2 c} = 1$$

$$\sinh^2 a + \cosh^2 c \tanh^2 b = \sinh^2 c$$

$$1 + \sinh^2 a + \cosh^2 c \frac{\sinh^2 b}{\cosh^2 b} = \sinh^2 c + 1$$

$$\cosh^2 b \cosh^2 a + \cosh^2 c \sinh^2 b = \cosh^2 c \cosh^2 b$$

$$\cosh^2 c (\cosh^2 b - \sinh^2 b) = \cosh^2 b \cosh^2 a$$

$$\cosh^2 c = \cosh^2 b \cosh^2 a$$

ed infine

$$\cosh c = \cosh b \cosh a$$

Inoltre

$$\frac{\cos A}{\sin B} = \frac{\tanh b \sinh c}{\tanh c \sinh b} = \frac{\cosh c}{\cosh b} = \cosh a$$

□

Possiamo ora provare, con qualche calcolo, il teorema di Carnot Iperbolico.

TEOREMA 18. *Sia $\triangle ABC$ un triangolo nello spazio iperbolico; siano a, b, c le misure secondo la metrica iperbolica dei lati opposti ad A, B, C , rispettivamente.*

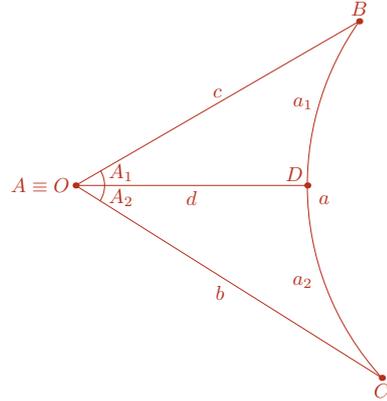
Allora

$$\cosh a = \cosh c \cosh b - \sinh c \sinh b \cos A$$

DIMOSTRAZIONE. Tracciamo una retta per A perpendicolare al lato BC , sia D il punto di intersezione di tale retta con il lato BC stesso; rototrasliamo il triangolo $\triangle ABC$ in modo che A coincida con l'origine O del disco di Poincaré e che AD coincida con un raggio.

Sia d la lunghezza nella metrica di Poincaré dell'altezza AD che abbiamo costruito e siano a_1 e a_2 le lunghezze nella metrica iperbolica di BD e DC , rispettivamente.

Allora, il teorema di Pitagora Iperbolico consente di affermare che:



$$\cos A_1 = \frac{\tanh d}{\tanh c} \quad \sin A_1 = \frac{\sinh a_1}{\sinh c}$$

$$\cosh c = \cosh a_1 \cosh d$$

$$\cosh a_1 = \frac{\cos A_1}{\sin B}$$

$$\cos A_2 = \frac{\tanh d}{\tanh b} \quad \sin A_2 = \frac{\sinh a_2}{\sinh b}$$

$$\cosh b = \cosh a_2 \cosh d$$

$$\cosh a_2 = \frac{\cos A_2}{\sin C}$$

Avremo allora

$$\begin{aligned} \cos A &= \cos(A_1 + A_2) = \\ &= \cos(A_1) \cos(A_2) - \sin(A_1) \sin(A_2) = \\ &= \frac{\tanh d \tanh d}{\tanh c \tanh b} - \frac{\sinh a_1 \sinh a_2}{\sinh c \sinh b} \\ &= \tanh^2 d \frac{\cosh c \cosh b}{\sinh c \sinh b} - \frac{\sinh a_1 \sinh a_2}{\sinh c \sinh b} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
 & \sinh c \sinh b \cos A = \\
 & = \tanh^2 d \cosh c \cosh b + \cosh a_1 \cosh a_2 - \cosh a_1 \cosh a_2 - \sinh a_1 \sinh a_2 = \\
 & = -\cosh(a_1 + a_2) + \tanh^2 d \cosh c \cosh b + \frac{\cosh c \cosh b}{\cosh d \cosh d} = \\
 & = -\cosh a + \cosh c \cosh b \left(\frac{\sinh^2 d}{\cosh^2 d} + \frac{1}{\cosh^2 d} \right)
 \end{aligned}$$

Quindi

$$\cosh a = \cosh c \cosh b \frac{1 + \sinh^2 d}{\cosh^2 d} - \sinh c \sinh b \cos A$$

e

$$\cosh a = \cosh c \cosh b - \sinh c \sinh b \cos A$$

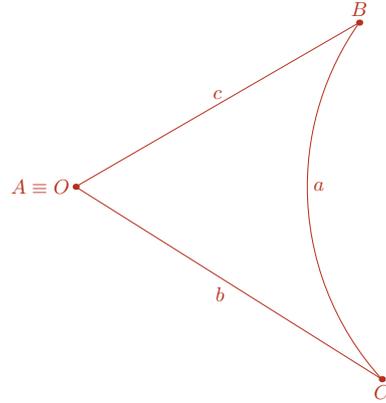
□

Vale infine anche la forma iperbolica del teorema dei seni

TEOREMA 19. *Sia $\triangle ABC$ un triangolo nello spazio iperbolico; siano a, b, c le misure secondo la metrica iperbolica dei lati opposti ad A, B, C , rispettivamente.*

Allora

$$\frac{\sin^2 A}{\sinh^2 a} = \frac{\sin^2 B}{\sinh^2 b} = \frac{\sin^2 C}{\sinh^2 c}$$



DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$\begin{aligned}
 \sinh^2 c \sinh^2 b \sin^2 A & = \\
 & = \sinh^2 c \sinh^2 b - \sinh^2 c \sinh^2 b \cos^2 A = \\
 & = \sinh^2 c \sinh^2 b - (\cosh a - \cosh c \cosh b)^2 = \\
 & = \sinh^2 c \sinh^2 b - \cosh^2 c \cosh^2 b + \\
 & \quad + 2 \cosh c \cosh b \cosh a - \cosh^2 a = \\
 & = (1 - \cosh^2 c)(1 - \cosh^2 b) - \cosh^2 c \cosh^2 b + \\
 & \quad + 2 \cosh c \cosh b \cosh a - \cosh^2 a = \\
 & = 1 - \cosh^2 c - \cosh^2 b - \cosh^2 a + 2 \cosh c \cosh b \cosh a
 \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\sinh^2 c \sinh^2 b \sin^2 A &= \\ &= 1 - \cosh^2 c - \cosh^2 b - \cosh^2 a + 2 \cosh c \cosh b \cosh a\end{aligned}$$

Ne viene, dividendo per $\sinh^2 c \sinh^2 b \sinh^2 a$,

$$\frac{\sin^2 A}{\sinh^2 a} = \frac{1 - \cosh^2 c - \cosh^2 b - \cosh^2 a + 2 \cosh c \cosh b \cosh a}{\sinh^2 c \sinh^2 b \sinh^2 a}$$

e, per la simmetria rispetto ad a, b, c del secondo membro, si ottiene infine che

$$\frac{\sin^2 A}{\sinh^2 a} = \frac{\sin^2 B}{\sinh^2 b} = \frac{\sin^2 C}{\sinh^2 c}$$

□

CAPITOLO 6

Isometrie tra i modelli

Abbiamo visto come il disco di Klein \mathcal{D}_K , il disco di Poincaré \mathcal{D}_P ed il semipiano superiore di Poincaré \mathcal{H}_P siano modelli di una Geometria Iperbolica.

Ciascuno di essi quindi giustifica la consistenza degli assiomi accettati per la definizione di tale geometria, ed è interessante mostrare come possono essere stabilite corrispondenze isometriche tra essi.

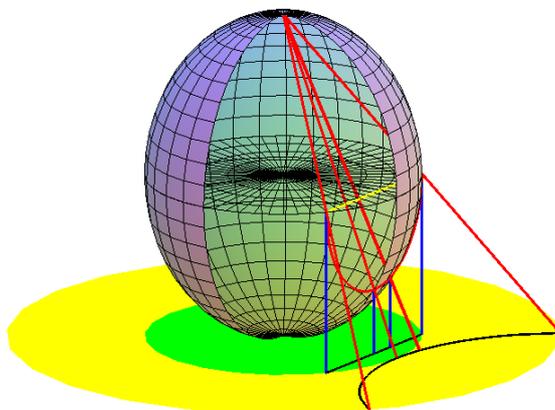
Più precisamente si possono trovare corrispondenze biunivoche per ciascuna delle coppie di modelli citate e misure in ciascuno dei modelli considerati, in modo che la distanza tra coppie di punti corrispondenti rimanga invariata. Tra i modelli di Poincaré possiamo anche fare in modo che si conservino gli angoli, e cioè che la corrispondenza sia conforme.

0.1. La corrispondenza tra \mathcal{D}_K e \mathcal{D}_P . Cominciamo a studiare la corrispondenza tra il disco di Klein ed il disco di Poincaré;

È utile osservare che poichè la corrispondenza è isometrica, possiamo calcolare la distanza di due punti in \mathcal{D}_P mediante la distanza dei punti loro corrispondenti in \mathcal{D}_K .

Questo semplifica i calcoli in quanto in \mathcal{D}_K è più facile trovare la lunghezza di un segmento; per converso possiamo usare la misura degli angoli nel disco di Poincaré per definire la misura degli angoli nel modello di Klein.

La corrispondenza tra \mathcal{D}_K e \mathcal{D}_P si fonda sulla proiezione stereografica della sfera. Più precisamente consideriamo in \mathbb{R}^3 un riferimento cartesiano e siano



- \mathcal{D}_K il cerchio di centro l'origine e raggio 1 giacente nel piano $z = 0$
- S la sfera di raggio 1 e di centro $(0, 0, 1)$

- \mathcal{D}_p il cerchio di centro l'origine e raggio 2 giacente nel piano $z = 0$

Per ogni punto $(x_0, y_0, 0) \in \mathcal{D}_K$, consideriamo $(x_0, y_0, z_0) \in S$ con $z_0 \leq 1$ e la retta p passante per $(0, 0, 2)$ e (x_0, y_0, z_0) : sia $(x_1, y_1, 0)$ il punto di intersezione di p con il piano $z = 0$.

Poniamo $T(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$ ed avremo così definito una corrispondenza biunivoca

$$T: \mathcal{D}_K \rightarrow \mathcal{D}_p$$

che ammette una inversa

$$T^{-1}: \mathcal{D}_p \rightarrow \mathcal{D}_K$$

Possiamo facilmente esprimere analiticamente la corrispondenza T ed anche T^{-1} , infatti se $(x, y, 0) \in \mathcal{D}_K$ e $(x, y, z) \in S$ con $z \leq 1$ la retta p passante per $(0, 0, 2)$ e (x, y, z) può essere espressa parametricamente mediante le

$$(1-t)(0, 0, 2) + t(x, y, z) = (tx, ty, tz + 2(1-t))$$

e incontra il piano $z = 0$ per

$$t = \frac{2}{2-z} = \frac{2}{1 + \sqrt{1-x^2-y^2}}$$

Quindi

$$T(x, y) = \left(\frac{2x}{1 + \sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{2y}{1 + \sqrt{1-x^2-y^2}} \right)$$

Se viceversa $(x, y, 0) \in \mathcal{D}_p$ e p è la retta passante per $(0, 0, 2)$ e $(x, y, 0)$ possiamo esprimere parametricamente p mediante le

$$(1-t)(0, 0, 2) + t(x, y, 0) = (tx, ty, 2(1-t))$$

e possiamo determinare l'intersezione di p con S risolvendo per t in

$$t^2x^2 + t^2y^2 + (2-2t-1)^2 = 1$$

per cui

$$t^2x^2 + t^2y^2 + (1-2t)^2 = 1$$

$$t^2x^2 + t^2y^2 + 4t^2 - 4t = 0$$

ed infine

$$t = \frac{4}{4+x^2+y^2}$$

Si ottiene quindi

$$T^{-1}(x, y) = \left(\frac{4x}{4+x^2+y^2}, \frac{4y}{4+x^2+y^2} \right)$$

0.2. La corrispondenza tra \mathcal{D}_p e \mathcal{H}_p . Per stabilire una corrispondenza tra il disco ed il semipiano superiore di Poincaré possiamo invece ricorrere ad una trasformazione di Möebius.

Si tratta di una corrispondenza

$$T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

definita da

$$T(z) = \frac{az - b}{cz - d}$$

che ha la proprietà di conservare oltre che le distanze anche gli angoli.

Una trasformazione di Möebius è univocamente determinata dai coefficienti a, b, c che possono essere trovati semplicemente imponendo che T assuma valori fissati in 3 punti.

Se ad esempio si impone che

$$T(0) = 1, T(i) = 0, T(\infty) = -1$$

otteniamo una corrispondenza che trasforma il cerchio unitario di centro l'origine nel semipiano superiore.

Avremo in tal caso che

$$T(z) = \frac{i - z}{i + z}$$

Possiamo anche facilmente determinare la sua inversa mediante la

$$T^{-1}(w) = i \frac{1 - w}{1 + w}$$

che è utile per trasformare il semipiano superiore nel disco di Poincaré.

Poichè la è naturale porre una corrispondenza tra il disco di Klein di raggio 1 ed il disco di Poincaré di raggio 2, vale la pena di osservare che imponendo

$$T(0) = 2, T(i) = 0, T(\infty) = -2$$

otteniamo una corrispondenza che trasforma il cerchio di raggio 2 centrato nell'origine nel semipiano superiore.

Avremo in tal caso che

$$T(z) = 2 \frac{i - z}{i + z}$$

e

$$T^{-1}(w) = i \frac{1 - w/2}{1 + w/2} = i \frac{2 - w}{2 + w}$$

La trasformazione di möebius ha molte notevoli proprietà tra le quali il fatto che trasforma rette in rette e cerchi in cerchi.

Si tratta sostanzialmente di una combinazione di traslazioni, rotazioni, dilatazioni e inversioni per raggi vettori reciproci.

CAPITOLO 7

La pseudosfera - Immersione di Modelli in Spazi euclidei di dimensione superiore.

Tra il modello usato per descrivere la Geometria Ellittica e quelli impiegati per la Geometria Iperbolica corre una fondamentale differenza ed esiste un notevole punto in comune.

La differenza consiste nel fatto che, nonostante la Geometria descritta sia bidimensionale, il modello della Geometria Ellittica è una superficie sferica che, pur essendo di natura bidimensionale, vive in uno spazio euclideo a tre dimensioni.

Il punto in comune, invece, riguarda la misura delle distanze tra punti della geometria. In tutti e tre i modelli, per ottenere la distanza tra due punti, si misura la lunghezza del segmento di retta, opportunamente definita, che congiunge i punti dati, ma il metro, o meglio la metrica, con cui questa lunghezza è misurata non è banale e differisce in maniera sostanziale dalla metrica Euclidea cui siamo usi. Ricordiamo a questo proposito brevemente che:

- Nella geometria Ellittica

Le rette sono cerchi massimi e la misura dei segmenti di retta coincide con la misura dell'arco ed è proporzionale secondo il raggio della sfera, che possiamo assumere 1, all'angolo al centro sotteso dall'arco stesso.

Possiamo anche dire che, sulla sfera, tale misura si può ottenere usando la metrica Euclidea in \mathbb{R}^3 sulla sfera stessa.

Se ad esempio usiamo per la sfera la parametrizzazione definita da

$$\begin{cases} x = \cos \theta \cos \phi \\ y = \sin \theta \cos \phi \\ z = \sin \phi \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \phi \in [-\pi/2, \pi/2]$$

la metrica euclidea

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

si riduce a

$$ds^2 = d\theta^2 \cos^2 \phi + d\phi^2$$

e le lunghezze possono essere calcolate mediante integrali di linea rispetto a ds .

- Nel Disco di Klein \mathcal{D}_K

Le rette sono corde del cerchio di centro l'origine e raggio 1 e abbiamo visto che la distanza tra due punti A e B si può calcolare come

$$d_K(A, B) = \frac{1}{2} \left| \ln \left(\frac{AP \cdot BQ}{BP \cdot AQ} \right) \right|$$

dove P, Q sono gli estremi della corda passante per i punti A e B oppure mediante un integrale di linea rispetto a ds dove

$$ds^2 = \frac{1-y^2}{(1-x^2-y^2)^2} dx^2 + \frac{2xy}{(1-x^2-y^2)^2} dx dy + \frac{1-x^2}{(1-x^2-y^2)^2} dy^2$$

- Nel disco di Poincarè \mathcal{D}_P

le rette sono diametri della circonferenza di centro l'origine e raggio 2, oppure circonferenze ortogonali a \mathcal{D}_P .

Le distanze si possono calcolare ancora come

$$d_K(A, B) = \left| \ln \left(\frac{AP \cdot BQ}{BP \cdot AQ} \right) \right|$$

dove P, Q sono gli estremi della circonferenza ortogonale passante per i punti A e B oppure mediante un integrale di linea rispetto a ds dove

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}$$

- Nel Semipiano Superiore di Poincarè \mathcal{H}_P

le rette sono semirette verticali oppure archi di circonferenze ortogonali all'asse orizzontale.

Anche qui la distanza tra i punti si può misurare mediante un integrale di linea rispetto a ds dove

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y}$$

È, d'altro canto, da ricordare che, come abbiamo visto precedentemente, i modelli considerati per la Geometria Iperbolica sono tra loro isometrici e quindi si può misurare la distanza tra due punti in un modello, mediante la distanza delle loro immagini in un modello isometrico.

È inoltre assolutamente evidente che l'elemento infinitesimo di lunghezza ds ha caratteristiche molto diverse:

nel piano, dove

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

o nel modello Ellittico, dove

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

con x, y, z legati dalle relazioni che definiscono una parametrizzazione della sfera

o nel Disco di Klein, dove

$$ds^2 = \frac{1-y^2}{(1-x^2-y^2)^2} dx^2 + \frac{2xy}{(1-x^2-y^2)^2} dx dy + \frac{1-x^2}{(1-x^2-y^2)^2} dy^2$$

o nel disco di Poincaré dove, $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}$

o, ancora, nel Semipiano di Poincaré dove, $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$.

Si vede quindi che la misura della distanza tra due punti può, anche se non necessariamente, dipendere oltre che dalla posizione reciproca dei punti, anche dalla loro collocazione spaziale.

Per limitarci al disco di Poincaré possiamo immaginare che il metro con cui andiamo misurando le distanze si accorci man mano che ci allontaniamo dall'origine; si capisce abbastanza facilmente che in tale situazione la misura di un diametro possa diventare (e nel caso in esame effettivamente diventi) infinita.

Un uomo che camminasse dal centro verso la circonferenza si rimpicciolirebbe sempre più, compirebbe passi sempre più corti e non raggiungerebbe mai la circonferenza stessa.

Usando le parole di Poincaré possiamo descrivere la situazione come segue:

Immaginiamo un mondo delimitato da una vasta sfera di raggio R e supponiamo che la temperatura assoluta in ciascun punto all'interno della sfera sia $R^2 - r^2$ dove r è la distanza del punto dal centro della sfera; supponiamo anche che l'indice di rifrazione del mezzo trasparente sia inversamente proporzionale ad $R^2 - r^2$. Immaginiamo inoltre che le dimensioni degli oggetti mutino da un punto all'altro e siano proporzionali alla temperatura di ciascun punto. Per gli abitanti di tale mondo l'universo apparirebbe infinito; e i raggi di luce, o linee rette, non sarebbero rettilinei, ma sarebbero cerchi ortogonali alla sfera che lo delimita, e apparirebbero infiniti. I piani sarebbero sfere ortogonali alla sfera delimitante tale mondo, e due piani non-euclidei siffatti si intersecherebbero in una retta non-euclidea. In tale mondo continuerebbero a valere gli assiomi euclidei, a eccezione del postulato delle parallele.

Possiamo allora chiederci se è possibile trovare una superficie in \mathbb{R}^3 che possa assumere, per la Geometria Iperbolica il ruolo che la sfera occupa per la Geometria Ellittica.

Vorremmo cioè che le distanze della Geometria Iperbolica bidimensionale corrispondessero alle distanze misurate mediante la metrica Euclidea sulla superficie stessa.

Possiamo rispondere parzialmente a questa domanda usando un po' di geometria differenziale.

Consideriamo pertanto una superficie

$$S : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

in modo che la distanza euclidea sulla superficie

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

fornisca la stessa misura di quella usata, ad esempio, nel semipiano superiore di Poincaré \mathcal{H}_P

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

Per semplificare i calcoli e per simmetria, possiamo cercare la superficie S in modo che sia di rotazione e quindi possiamo supporre che S sia rappresentabile parametricamente da

$$\begin{cases} x(u, v) = \rho(v) \cos \theta(u) \\ y(u, v) = \rho(v) \sin \theta(u) \\ z(u, v) = \zeta(v) \end{cases}$$

Per tale superficie si ha

$$dx = \dot{\rho}(v) \cos \theta(u) dv - \rho(v) \sin \theta(u) \dot{\theta}(u) du$$

$$dy = \dot{\rho}(v) \sin \theta(u) dv + \rho(v) \cos \theta(u) \dot{\theta}(u) du$$

$$dz = \dot{\zeta}(v) dv$$

Si vuole che sia:

$$\frac{du^2 + dv^2}{v^2} = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (\dot{\rho}^2(v) + \dot{\zeta}^2(v)) dv + \rho^2(v) \dot{\theta}^2(u) du$$

Ne segue che deve essere:

$$\rho^2(v) \dot{\theta}^2(u) = \frac{1}{v^2} \quad , \quad \dot{\rho}^2(v) + \dot{\zeta}^2(v) = \frac{1}{v^2}$$

Dalla prima delle uguaglianze, per separazione di variabili, si ottiene che

$$\dot{\theta}^2(u) = \frac{1}{v^2 \rho^2(v)} = a^2$$

e quindi

$$\dot{\theta}(u) = a, \quad \theta(u) = au + b$$

inoltre

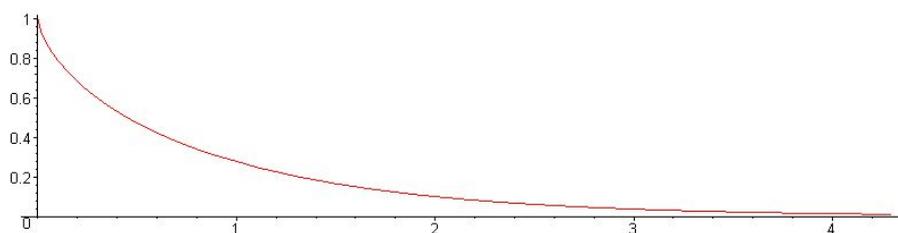
$$v^2 \dot{\rho}^2(v) = \frac{1}{a^2}, \quad \rho(v) = \pm \frac{1}{av}$$

Sostituendo nella seconda si ricava che

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{a^2 v^4} + \dot{\zeta}^2(v), \quad \dot{\zeta}(v) = \pm \sqrt{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{a^2 v^4}} = \frac{\sqrt{a^2 v^2 - 1}}{av}$$

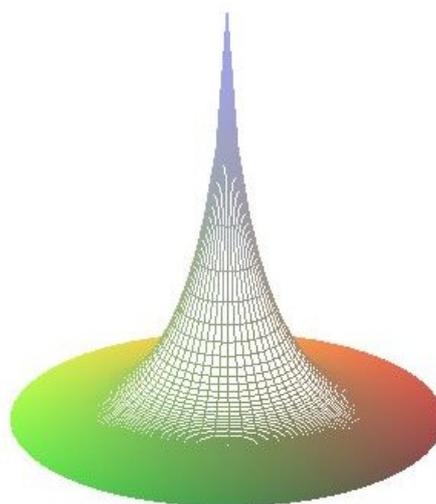
e si può vedere, integrando, che

$$\zeta(v) = \ln \left(\sqrt{a^2 v^2 - 1} + av \right) - \frac{\sqrt{a^2 v^2 - 1}}{v} + c$$



La $\zeta(v)$ così ottenuta è definita soltanto per valori di v sufficientemente grandi ($v > \frac{1}{a}$), per cui la rappresentazione ottenuta è solo locale. La $\zeta(v)$ è una curva nota come trattrice; la sua caratteristica è quella di essere la curva percorsa da un punto materiale trainato da un punto che si muove lungo una retta.

La superficie ottenuta è nota con il nome di Pseudosfera di Beltrami e fu da lui introdotta nel 1865.



Si tratta di una superficie con curvatura costante negativa, così come la sfera è una superficie a curvatura costante positiva.

A completamento ricordiamo che valgono i seguenti teoremi

TEOREMA 20. - D. Hilbert, 1901- *Non esistono immersioni isometriche regolari e lisce del piano di Poincaré in \mathbb{R}^3*

Per contro

TEOREMA 21. - D. Blanuša, 1956- *Esiste una immersione isometrica, propria ed esplicita del Piano di Poincaré in \mathbb{R}^6*

CAPITOLO 8

Escher e la Geometria Iperbolica

Maurits Cornelis Escher è stato uno dei più sorprendenti artisti del secolo scorso.



Savona
Disegno - 1936

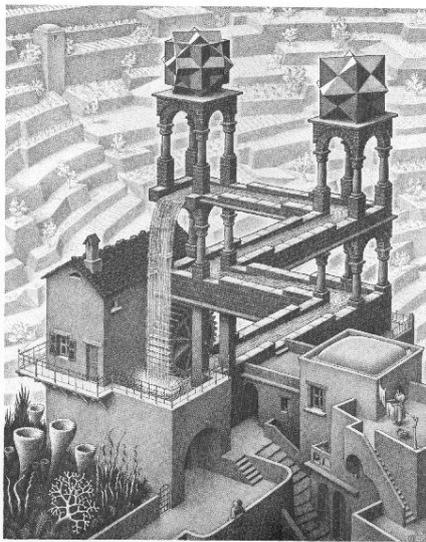
Escher nacque a Leeuwarden in Olanda il 17 giugno 1898, lavorò in Italia, Svizzera, Belgio ed Olanda dove si stabilì dal 1941 e dove visse fino al 27 Marzo 1972.

Durante il suo soggiorno in Italia Escher fu anche a Savona come testimonia un suo disegno datato 10-6-'36 cui egli si ispirò per la xilografia *Natura Morta e Strada* che egli produsse nel 1937.

Nell'opera coesistono due differenti punti di vista: il punto di vista della finestra dal quale i palazzi della via sembrano fermalibri ed il punto di vista della via dal quale i libri sembrano enormi così come la tabacchiera che campeggia al centro.



Natura Morta e Strada
Xilografia - 1937



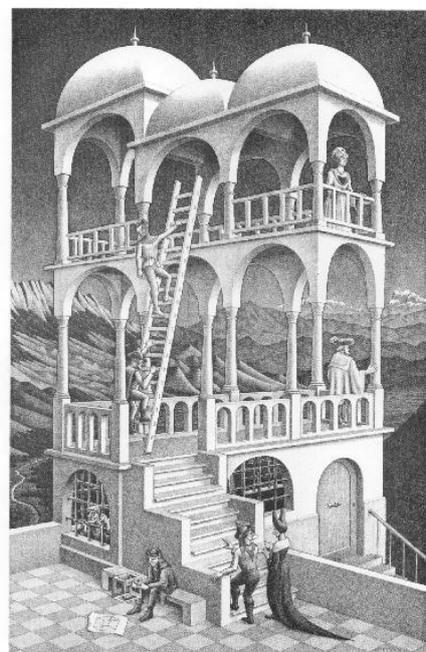
La Cascata
Litografia- 1961

I tratti della personalità di Escher sono davvero singolari: la sua biografia compare tra quelle contenute in uno dei più autorevoli siti web di Storia della Matematica <http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/history/> e nella sua biografia si legge che i suoi rapporti con la matematica non furono mai buoni. Le aspirazioni della famiglia per lui erano gli studi di architettura ed egli si applicò a più riprese per riuscire a soddisfarle senza ottenere però successo. Si dedicò infine al disegno ed alla grafica e nel suo lavoro i punti di contatto con la matematica furono molteplici e non banali.

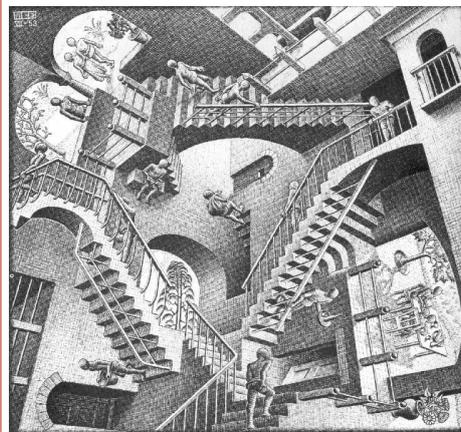
Possiamo distinguere nel suo lavoro almeno quattro filoni che sono collegati strettamente ad argomenti di matematica.

- la ricerca di effetti prospettici per generare figure impossibili
- il riferimento esplicito ad oggetti matematici
- la divisione regolare del piano e le metamorfosi
- la rappresentazione dell'infinito e dell'infinitamente piccolo

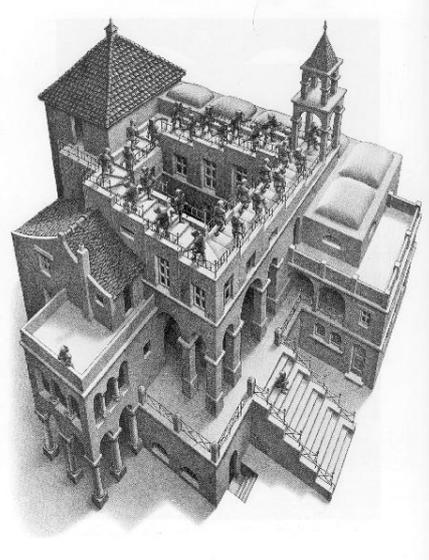
Al primo filone appartengono opere quali le litografie *Su e giù* (1947), *Belvedere* (1958), *La Cascata* (1961) e la xilografia *Relatività* (1953).



Belvedere
Litografia- 1958

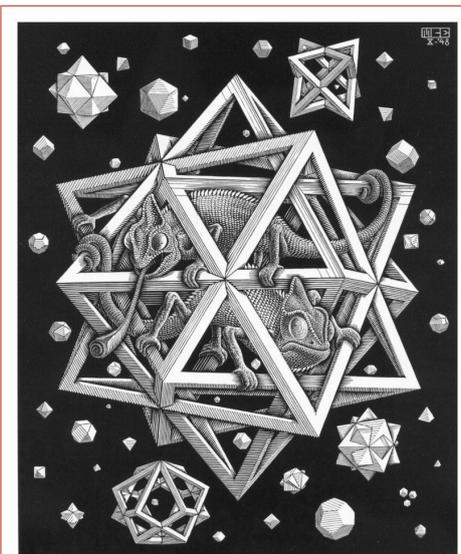


Relatività
Xilografia - 1953

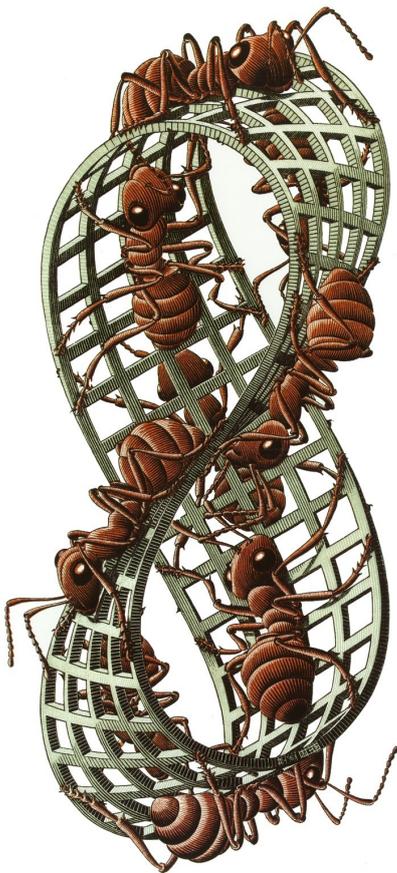


Su e giù
Litografia - 1947

Le Xilografie Striscia di Möebius I e II (1961-63) sono elaborazione del ben noto nastro di Möebius esempio di superficie non orientabile, mentre in Stelle (xilografia - 1948) e in Ordine e Caos (litografia - 1948) compaiono i solidi platonici che peraltro sono frequenti nell'opera di Escher.



Stelle
Xilografia 1948



Striscia di Möebius I
Xilografia- 1961



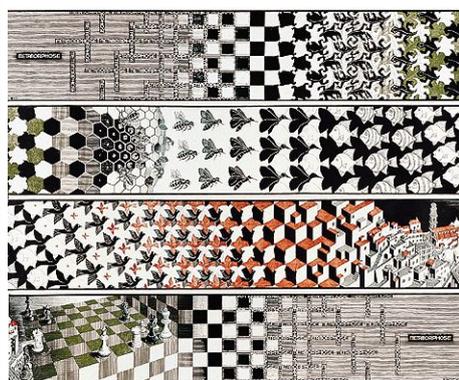
Striscia di Möebius II
Xilografia- 1963



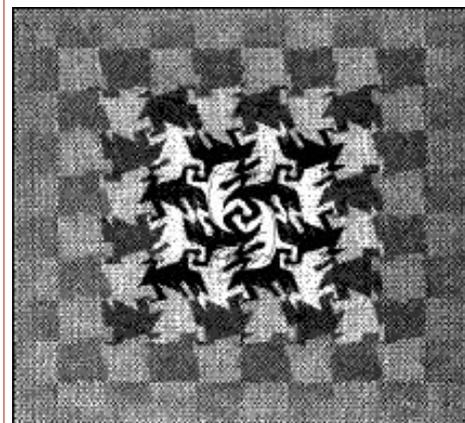
Ordine e caos
Litografia- 1948

Escher disegnò anche una scatola a forma di dodecaedro destinata a contenere cioccolatini.

La divisione regolare del piano e le metamorfosi sono ben rappresentate da opere come le xilografie Metamorfosi II (1940) e Sviluppo I (1937). Particolarmente interessante è Metamorfosi II sia per le dimensioni 19.5cm × 700cm sia per il fatto che l'autore ha utilizzato 29 piastre per produrla sia infine per il fatto che è riprodotta nell'Ufficio Postale Centrale dell'Aja.



Metamorfosi II
Xilografia - 1940



Sviluppo I
Xilografia- 1937



Sempre più piccolo
Xilografia - 1956



Il Limite del Quadrato
Xilografia- 1964

Alla rappresentazione dell'infinito Escher dedicò grande interesse a partire dai primi tentativi come *Sempre più piccolo* una xilografia del 1956 in cui le figure si dimezzano avvicinandosi al centro.

Egli tuttavia non fu soddisfatto dal risultato ottenuto poiché riteneva la riduzione centripeta insoddisfacente a causa dei confini arbitrari; giudicava infatti che il modo migliore per ottenere una totalità gratificante, con i limiti logici, fosse la riduzione delle figure in senso opposto: dal centro verso il bordo come si vede ad esempio in una xilografia molto successiva: *Il Limite del Quadrato* del 1964. Inoltre riteneva più adatto usare un bordo circolare in luogo del bordo quadrato

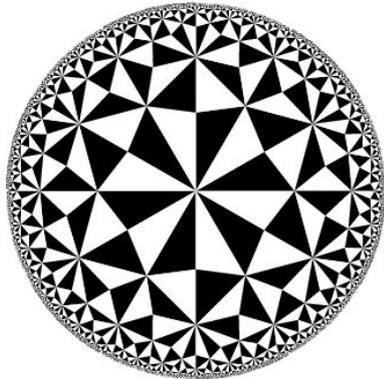
Nel 1958 Escher incontrò il matematico inglese Coxeter e tra i due nacque un'amicizia ed una collaborazione duratura.

Coxeter mandò ad Escher una copia di una sua pubblicazione sulla tassellatura Iperbolica della quale Escher non fu in grado di capire molto; ciò nonostante, usando solo i diagrammi contenuti nell'articolo, Escher fu in grado di produrre una xilografia, *Il Limite del Cerchio I* (1958), in cui recepiva le idee contenute nell'articolo.

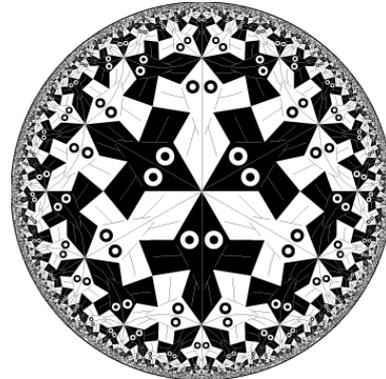
Anche di questa non fu molto soddisfatto, n'è tanto meno della xilografia successiva: *Il limite del cerchio II* che non è facile trovare riprodotta e che rappresenta solo un tentativo intermedio.

Escher raggiunse invece gli obiettivi che si era prefisso nella xilografia *Il Limite del Cerchio III* (1958) nella quale, scrisse, egli risolse tutti i problemi che aveva lasciato aperti nelle prime due.

Nel 1995 Coxeter pubblicò un lavoro in cui dimostrò che, in quell'opera, Escher aveva raggiunto la perfezione matematica, ma sfortunatamente egli non era vissuto abbastanza per venirne a conoscenza



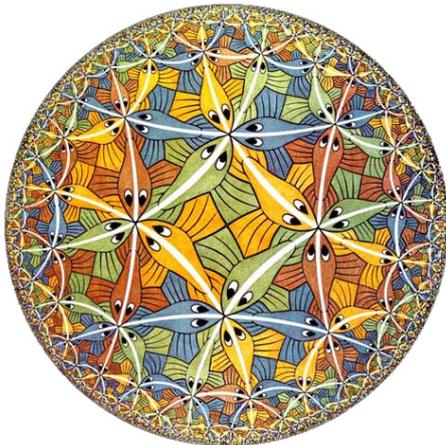
La Figura di Coxeter



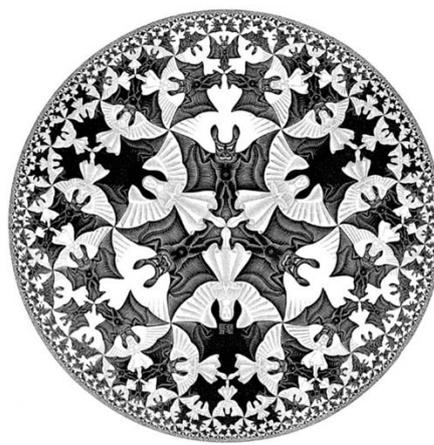
Il Limite del Cerchio I
Xilografia- 1958



Il Limite del Cerchio II
Xilografia- 1959



Il Limite del Cerchio III
Xilografia- 1958



Il Limite del Cerchio IV
Xilografia- 1960

Bibliografia

- [1] R.Bonola Non-Euclidean Geometry Dover Publications New York
- [2] C.B.Boyer Storia della matematica Mondatori Milano 1980
- [3] H.S.M.Coxeter Non-Euclidean Geometry The Mathematical Association of America Washington 1998
- [4] H.S.M.Coxeter Crystal symmetry and its generalizations Royal Society of Canada (3), 51 (1957), 1-13
- [5] H.S.M.Coxeter The non-Euclidean symmetry of Escher's Picture 'Circle Limit III Leonardo, 12 (1979), 19-25, 32
- [6] H.S.M.Coxeter The Trigonometry of Escher's Woodcut Circle Limit III The Mathematical Intelligencer, 18 no. 4 (1996) 42-46.
- [7] H.S.M.Coxeter Angels and devils in The Mathematical Gardner, David A. Klarner, editor, Wadsworth International, 1981
- [8] B.Ernst Lo specchio magico di M.C.Escher Taschen 1990
- [9] M.C. Escher Esplorando l'infinito Garzanti 1991
- [10] M.C. Escher Grafica e Disegni Taschen 1990
- [11] M.Fellows The Life and Works of Escher Parragon Publishing 1996
- [12] Goodman-Strauss, Chaim, Compass and straightedge in the Poincaré disk Amer. Math. Monthly, 108 (2001), no. 1, 38-49
- [13] M.Kline, Storia del Pensiero Matematico Vol. I e II Giulio Einaudi Torino 1996
- [14] M.J.Greenberg Euclidean and Non-Euclidean Geometries Development and History W.H. Freeman and Company New York 2003
- [15] P.J.Ryan Euclidean and Non-Euclidean Geometry An Analytic Approach Cambridge University Press 1999
- [16] A.Treibergs The Hyperbolic Plane and its Immersions into \mathbb{R}^3
<http://www.math.utah.edu/~treiberg/Hilbert/Hilber.ps>

Indice

Capitolo 1. Introduzione	3
Capitolo 2. Geometrie Finite	5
1. La Geometria dei Tre Punti	5
2. La geometria di Fano	6
Capitolo 3. I numeri Naturali	9
Capitolo 4. La geometria Euclidea	13
1. Gli Assiomi di Euclide	14
2. Il Sistema assiomatico di Hilbert	16
3. Il Sistema assiomatico di Birkhoff	18
Capitolo 5. Le Geometrie non Euclidee	21
1. La Geometria Ellittica	22
2. La Geometria Iperbolica	29
3. Il Teorema di Pitagora Iperbolico	36
Capitolo 6. Isometrie tra i modelli	47
Capitolo 7. La pseudosfera - Immersione di Modelli in Spazi euclidei di dimensione superiore.	51
Capitolo 8. Escher e la Geometria Iperbolica	57
Bibliografia	63