



# le Geometrie non Euclidee

## Geometria

geo metria : misura della terra

## Agrimensori

Arpedonapti : annodatori di corde

## Università di Pavia

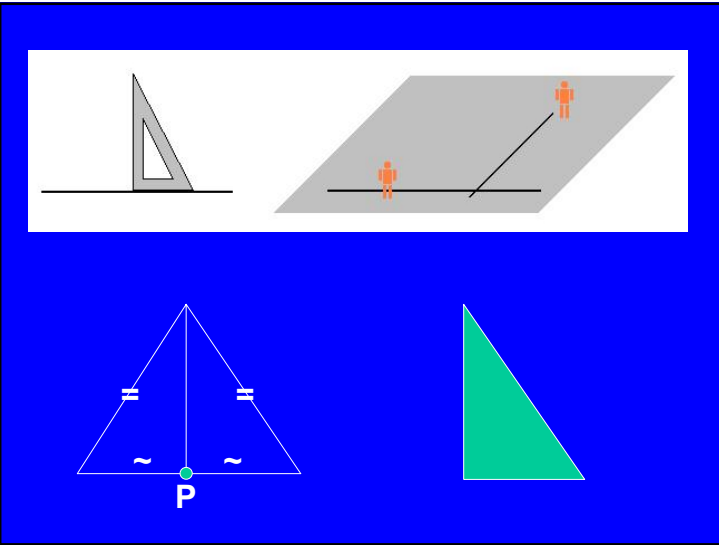
1825 – Imperial Regia Commissione  
Aulica degli Studi osserva:

“le provvisorie disposizioni impartite per  
il corso degli Ingegneri ed Agrimensori in  
Pavia sono insufficienti, e non conformi  
al piano generale degli studi filosofici ...”

## Erodoto:

Dicevano che questo re [Sesostri, 2000 a.C.] distribuì il territorio fra tutti gli egiziani, dando a ciascuno un lotto uguale di forma quadrata, e che in base a questa suddivisione si procurava le entrate, avendo imposto il pagamento di un tributo annuo. Se da un podere il fiume asportava una qualche parte, il proprietario, recatosi presso il re, gli segnalava l'accaduto: egli allora mandava funzionari che osservavano e misuravano di quanto il terreno era divenuto più piccolo, affinché per l'avvenire il proprietario pagasse in proporzione il tributo.

Se poi il fiume aveva semplicemente cancellato i confini dei campi, era compito degli stessi funzionari ristabilire le giuste divisioni.



$a = u^2 - v^2$   
 $b = 2uv$   
 $c = u^2 + v^2$

$u=2, v=1$ $a=3, b=4, c=5$	$u=3, v=2$ $a=5, b=12, c=13$
-------------------------------	---------------------------------

**Mesopotamia**  
**Dinastia Hammurabi**  
**1800 – 1600 a.C.**

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,4142129\dots$$

$$\sqrt{2} = 1,4142135\dots$$

**Chou Pei Suan Ching**  
 Il libro classico dello gnomone e delle orbite circolari del cielo  
**Dinastia Shang**  
**1500 – 1000 a.C.**

$$7^2 - 4 \cdot 6 = 49 - 24 = 25$$

600 a.C. Talete

500 a.C. Pitagora

Parmenide , Zenone

400 a.C. Democrito, Socrate , Platone

Eudosso, Eraclide, Aristotele

**Talete:** per primo concepì gli enti geometrici in senso ideale; prima di lui erano intesi come oggetti materiali: campi, recinti, ecc.

Fine V sec. a.C. Ippocrate di Chio

## Alessandro Magno



**Tolomeo** (Alessandria 332 a.C.)

Euclide	325 – 265 a.C.	Egitto
Archimede	287 – 212 a.C.	Italia
Eratostene	276 – 194 a.C.	Libia
Apollonio	262 – 190 a.C.	Turchia
Gemino	10 – 60 d.C.	Grecia
Erone	10 – 75 d.C.	Egitto
Tolomeo	85 – 165 d.C.	Egitto

**Euclide :**

Insegnante presso il  
Museo di Alessandria

( istituto di istruzione  
superiore voluto da Tolomeo I )

ottica, astronomia, musica, meccanica

Intorno al 300 a.C. scrive gli

*Elementi*



ottimo didatta

Elementi: uno dei massimi successi editoriali di tutti i tempi.

Non vi sono conoscenze nuove, ma vi si trova una sistemazione notevolmente chiara di quelle disponibili al suo tempo.

(Ad esempio non sono trattate le coniche – conoscenze avanzate dell'epoca)

Solo quelle elementari (da cui il nome)

### 13 libri

I . . . .

II Algebra geometrica

III-IV Geometria del cerchio

V-VI Proporzioni

VII-VIII-IX Teoria dei numeri (M.C.D., numeri primi)

X Irrazionali

XI Geometria 3D

XII Misura

XIII Solidi regolari

### Sistema assiomatico

1. Introduzione dei termini tecnici e del loro significato (termini primitivi)
2. Elenco di enunciati primari (assiomi o postulati) ritenuti veri
3. Tutti gli altri termini tecnici sono definiti sulla base di quelli introdotti
4. Tutti gli altri enunciati (teoremi) sono dedotti **logicamente** da enunciati precedentemente provati

### Logicamente

le dimostrazioni dei teoremi sono fatte basandosi su ragionamenti rigorosi (buon senso)

Si deve ai filosofi greci la distinzione tra opinione (dóxa), che basandosi sull'evidenza dei sensi può essere fallace, e la verità, autentico sapere (epistéme), basata sul ragionamento.

### **Assiomi:**

**Non contradditori:** ( un enunciato non deve risultare vero e falso contemporaneamente )

**Indipendenti:** (un assioma non può essere dedotto dagli altri )

**Completi:** ( ogni proposizione è deducibile senza aggiungere altri assiomi )

Grande successo: molte trascrizioni

Teone (IV sec. d.C.) : semplifica linguaggio, aggiunge passaggi nelle dimostrazioni, aggiunge teoremi

400 anni dopo: una copia (o copia di copia) tradotta in arabo

1120 : traduzione in latino

1270 : traduzione rivista alla luce di altre fonti arabe (stampata a Venezia nel 1482)

1880 : versione in greco ricavata da antiche versioni (Teone e precedenti) fatta dal filosofo danese Heiberg

1908 : versione inglese dello storico Sir Thomas Heath

1935 : versione italiana del matematico Enriques

### **Libro I**

23 definizioni

5 nozioni comuni (assiomi)

5 postulati

48 proposizioni

### **Definizioni :**

1. Punto è ciò che non ha parti

2. Linea è una lunghezza senza larghezza

3. Estremi di una linea sono punti

4. Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai suoi punti

.....

23. Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non s'incontrano fra loro da nessuna delle due parti

**Nozioni comuni:** (vere per ogni genere di grandezze)

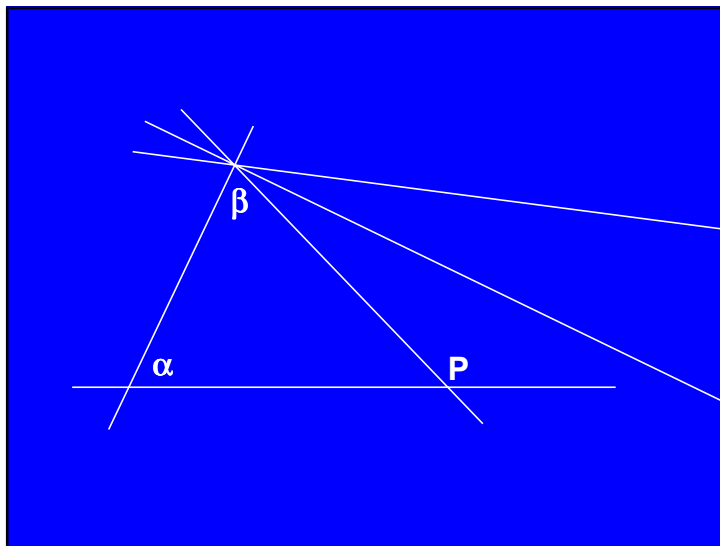
1. Cose che sono uguali ad una stessa cosa sono uguali anche fra loro
2. E se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali

.....

### Postulati:

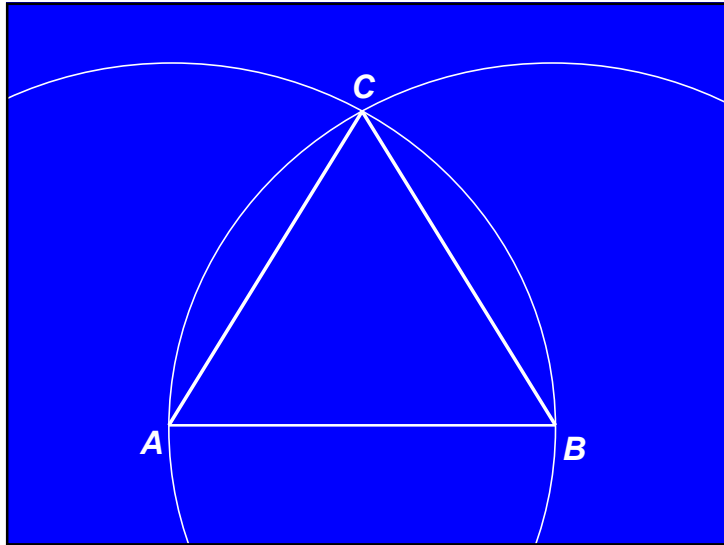
Risulti postulato

1. che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto
2. e che una retta terminata si possa prolungare continuamente in linea retta
3. e che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza
4. e che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro
5. e che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e da una stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti



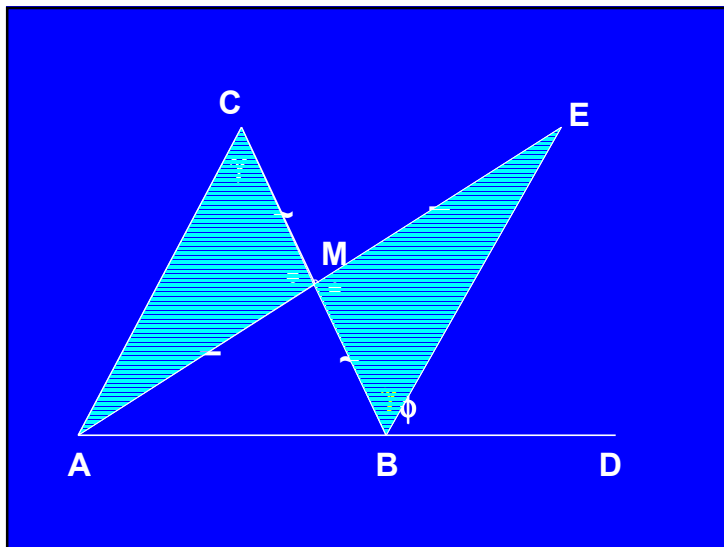
### Proposizione 1

Come costruire un triangolo equilatero su di un segmento.



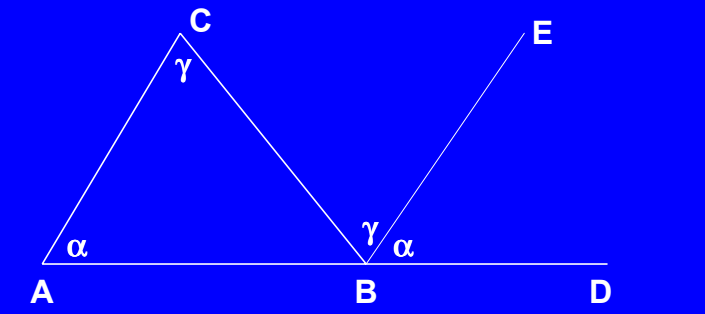
**Proposizione 16**

L'angolo esterno di un triangolo è maggiore degli angoli interni non adiacenti



**Proposizione 32**

L'angolo esterno di un triangolo è uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti



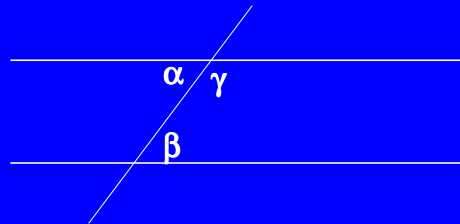
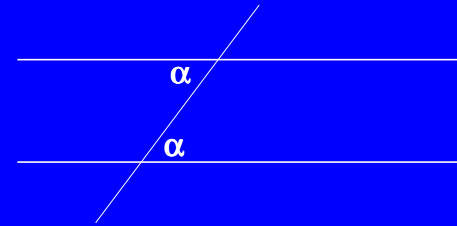
### Proposizione 27

Se una retta, cadendo su due rette, fa gli angoli alterni interni uguali fra loro, le due rette saranno parallele fra loro



### Proposizione 29

Una retta che cade su due rette parallele forma gli angoli alterni interni uguali fra loro, . . .



Se fosse  $\alpha > \beta$  si avrebbe  
 $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$

cioè angolo piatto  $> \beta + \gamma$   
e per il V postulato . . .

Sostituire il V postulato (Tolomeo, Posidonio, Gemino, Proclo) con altri di natura più evidente

Dimostrarlo, a partire dei primi quattro (dal 1500), ma si arriva ancora ad un postulato equivalente

Convinti dell'impossibilità di dimostrarlo, si costruiscono le geometrie non euclidee

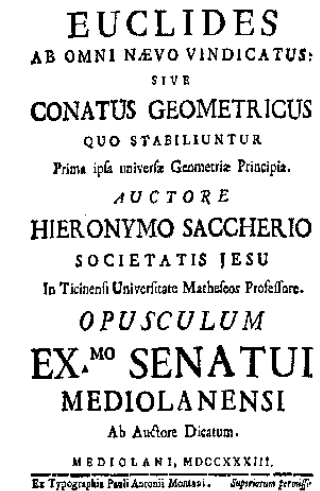


### Forme equivalenti per il V postulato

1. Due rette parallele sono equidistanti (Posidonio I sec. a.C.)
2. Da un punto fuori di una retta passa una sola parallela a quella retta (Proclo V sec. d.C.)
3. Il luogo dei punti equidistanti da una retta è una retta (Clavio, 1537-1612)
4. Fissato un triangolo qualsiasi, esistono triangoli simili di dimensione arbitraria (Wallis, 1616-1733)
5. La somma degli angoli interni di un triangolo è pari a due angoli retti (Saccheri, 1667-1733)
6. Esiste un rettangolo (Saccheri, ...)

**Girolamo Saccheri**  
Sanremo, 1667 – 1733  
Padre gesuita

*Euclides ab omni  
naevo vindicatus*



Lagrange (1736-1813) : non comunicò i suoi risultati; avrebbe dovuto sostenere che ci sono numerose geometrie 'vere'

Gauss (1777-1855) : anch'egli non rese noti gli studi per il timore dei 'beoti'

Ciò che non ebbe il coraggio di sostenere l'allora cinquantenne Gauss, venne proclamato a gran voce dal poco più che ventenne Bolyai.

### Farkas Bolyai

Non devi fare indagini sulle parallele per questa strada,

Conosco questa via fino in fondo

Anch'io mi sono avventurato per questa notte senza fine che ha spento in me ogni luce, ogni gioia della vita.

Ti scongiuro per Dio di lasciare in pace la teoria delle parallele !

## Poincaré

Le forze che si sono sprecate per questa speranza impossibile di dimostrare il postulato delle parallele di Euclide sono una cosa veramente più che incredibile

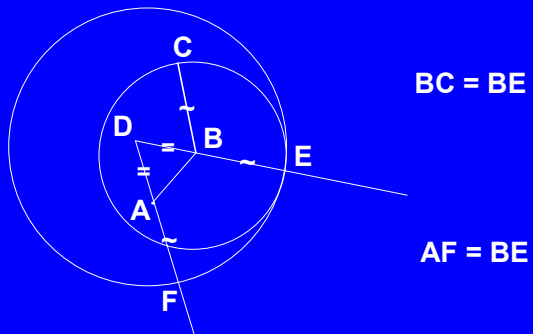


# le Geometrie non Euclidee

Da Euclide al XVII secolo

## Proposizione 2

Costruire un segmento uguale ad uno dato con un estremo in un dato punto.



Euclide:

## Def. 23

Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non s'incontrano fra loro da nessuna delle due parti

### V postulato

se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e da una stessa parte (la cui somma) minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti

### Prop. 30

Linee rette parallele ad una stessa retta sono parallele fra loro

### Prop. 31

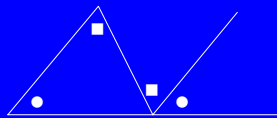
Per un punto dato si può tracciare una sola parallela ad una retta data

### Prop. 33

Segmenti compresi fra segmenti uguali e paralleli sono uguali e paralleli

### Equidistanza di due parallele

Somma degli angoli di un triangolo uguale a due retti



Proprietà delle figure simili

-) parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, **non s'incontrano** fra loro da nessuna delle due parti

-) **se** una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e da una stessa parte (la cui somma) minori di due retti, (**allora**) le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti

Proclo [410-485]

*Commento al I libro di Euclide :*

Posidonio [ I sec. a.C. ]

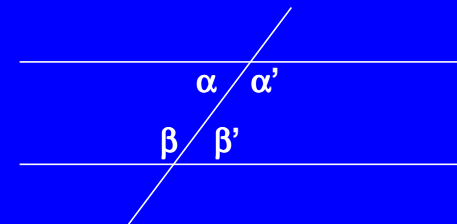
parallele :

due rette complanari ed equidistanti

( Prop. 33 di Euclide )

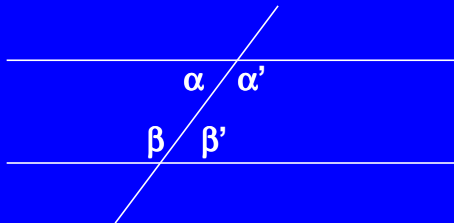
**Prove del V postulato**

Tolomeo [ II sec. d.C. ]



$$\alpha + \beta = 180, < 180, > 180$$

si vuole provare che vale  $\alpha + \beta = 180$



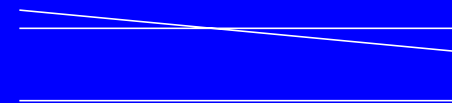
**ammettiamo** che, se per una coppia di parallele vale  $\alpha + \beta > 180$ , altrettanto avvenga per ogni altra coppia

allora si avrebbe  $\alpha' + \beta' > 180$  e quindi  $\alpha + \beta + \alpha' + \beta' > 360$

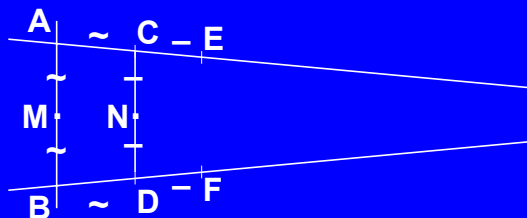
( analogo se  $\alpha + \beta < 180$  )

Proclo critica il ragionamento di Tolomeo e tenta di raggiungere lo stesso scopo per altra via assumendo:

La distanza tra due punti situati su due rette che si tagliano può rendersi grande **quanto si vuole**, prolungando sufficientemente le due rette



Greci: due rette tagliate da una terza non si incontrano anche se la somma degli angoli interni da una stessa parte è minore di due retti



Proclo:

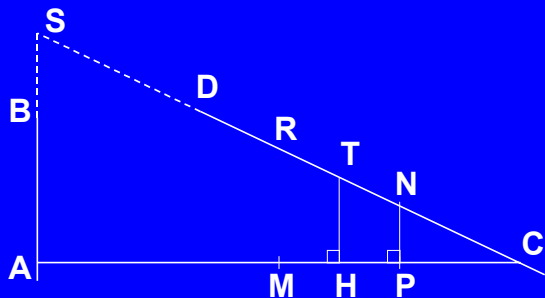
in tal modo ciò che si dimostra è che, col suddetto procedimento non si può raggiungere il punto d'incontro, non che esso non esista.

Poiché la somma di due angoli d'un triangolo è minore di due retti, esistono delle rette che tagliate da una terza si incontrano ...

Ma se per **alcune** coppie di rette formanti con una terza angoli alterni interni da una stessa parte la cui somma è minore di due angoli retti, esiste un punto di incontro, resta a vedere se ciò accade per **tutte** le coppie.

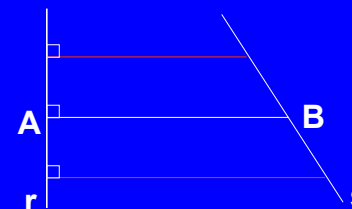
Commento di **Al-Niziri** IX sec.

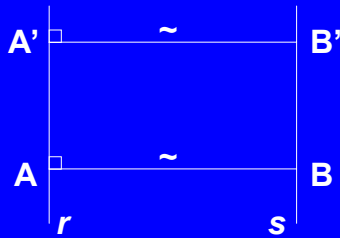
**Aganis – Gemino** : costruzione del punto d'incontro tra due rette non equidistanti



**Nasir-Eddin** [1201-1274]

Se due rette  $r$  ed  $s$  sono la prima perpendicolare, l'altra obliqua al segmento  $AB$ , i segmenti di perpendicolare calati da  $s$  su  $r$  sono minori di  $AB$  dalla banda in cui  $AB$  forma con  $s$  un angolo acuto, maggiori di  $AB$  dalla banda in cui  $AB$  forma con  $s$  un angolo ottuso





se  $AB = A'B'$   
 allora  $s$  è perpendicolare ad  $AB$   
 ( e  $ABB'A'$  è un **rettangolo** )

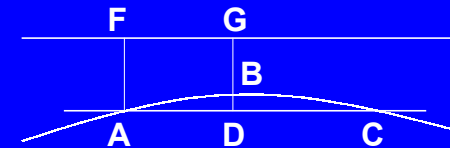
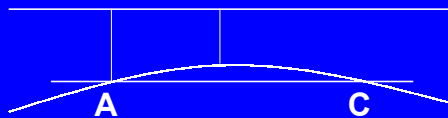
Commento di Proclo stampato a Basilea  
 [1533 - testo originale] e Padova [1560 -  
 traduzione latina]

**Giordano Vitale** [1633-1711]  
*Euclide restituito, ovvero gli antichi  
 elementi geometrici restaurati e facilitati*  
 (Roma, 1680)

Cerca di provare che il luogo dei punti  
 equidistanti da una retta è una retta

La dimostrazione si basa sul seguente:

Se fra due punti  $A, C$ , presi in qualunque  
 linea curva, il cui concavo sia verso  $X$ , sia  
 tirata la linea  $AC$  e se dagli infiniti punti  
 dell'arco  $AC$  cadono delle perpendicolari a  
**qualche** retta, dico essere impossibile che  
 quelle perpendicolari siano fra loro uguali.



La **qualche** retta non è una retta qualunque  
 del piano, ma è costruita avendo  $BD$  ed  $AF$   
 perpendicolari ad  $AC$ , con  $AF = GD$

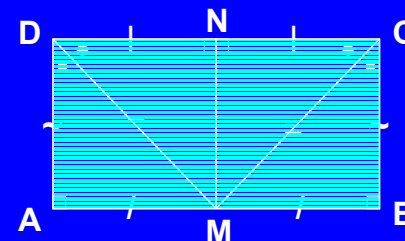
Quando poi dimostra che il luogo dei punti  
 equidistanti da una retta è una retta, tali  
 condizioni non sono rispettate, per cui le  
 conclusioni non sono affatto lecite

La dimostrazione in questione non offre alcun vantaggio sulle precedenti, ma contiene una proposizione che avrà in seguito maggiore sviluppo.

Si consideri il quadrilatero (birettangolo isoscele):

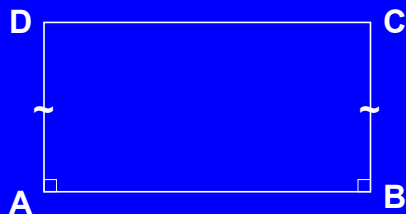


è un rettangolo ?

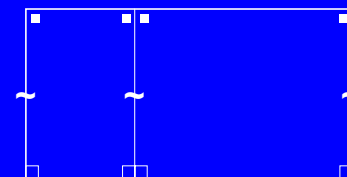


I triangoli AMD e MBC sono uguali  
(due lati e l'angolo compreso)

I triangoli MND e MCN sono uguali  
(tre lati)



Ciò che si riesce a provare è che gli angoli in C e in D sono uguali



da questo si prova che se **una** perpendicolare calata sulla base da un punto del lato superiore è uguale ai due lati laterali, allora i due angoli superiori sono retti

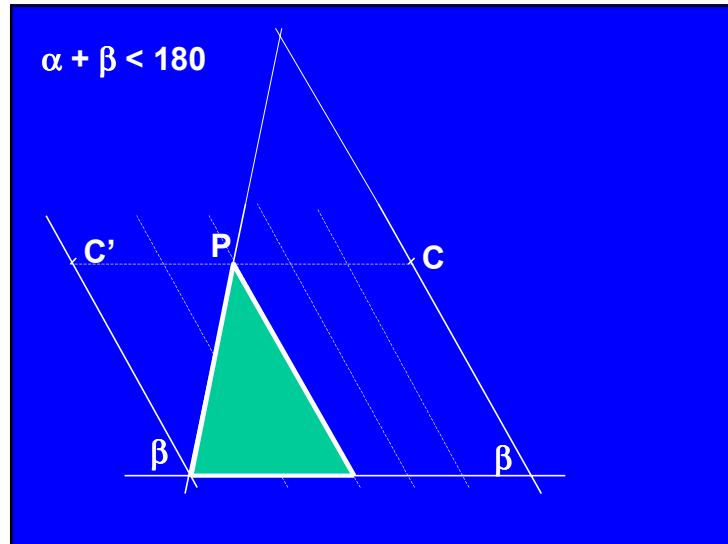
cioè, se tre punti su di una retta sono equidistanti da un'altra, tutta la retta è equidistante

**J. Wallis [1616-1703]**

abbandona in concetto di equidistanza delle parallele, risultato per secolo infruttuoso e dimostra il V postulato utilizzando:

*Di ogni figura ne esiste una simile di grandezza arbitraria*

III postulato : esiste un cerchio di dato centro e dato raggio (similitudine per i cerchi)



**Conclusioni:**

ogni tentativo di dimostrare il V postulato partendo dai primi quattro porta sempre ad introdurre un nuovo enunciato che lo sostituisce (cioè equivalente a quello)

Si incomincia a pensare che non sia possibile dimostrarlo

...



# le Geometrie non Euclidee

Il contributo di Saccheri



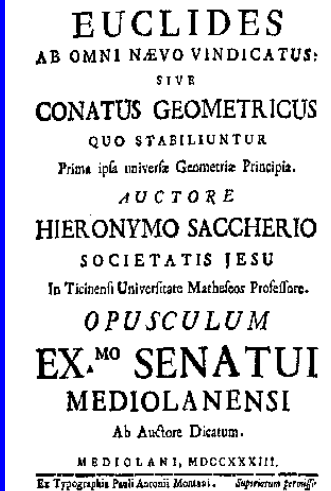
### Giovanni Girolamo Saccheri

Sanremo, 5 settembre 1667 – Milano, 25 ottobre 1733

Entrò nell'Ordine dei Gesuiti a Genova nel 1685. Cinque anni dopo andò a Milano dove al Collegio Gesuita studiò filosofia e teologia. Fu ordinato Sacerdote nel 1694 a Como, in seguito insegnò in vari Collegi Gesuiti dell'Italia. Dal 1694 al 1697 insegnò filosofia a Torino e poi filosofia e teologia a Pavia fino alla sua morte; a Pavia occupò anche la cattedra di matematica dal 1699 fino alla sua morte.

### Girolamo Saccheri

#### *Euclides ab omni naevo vindicatus*



Quest'opera fu abbastanza diffusa dopo la sua pubblicazione, nonostante ciò ad un certo punto venne dimenticata e ricomparve alla fine del 1800.

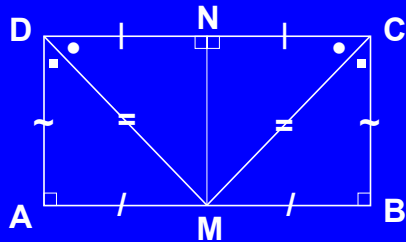
Non è chiara l'influenza che questa opera ebbe sui geometri del XVIII secolo.

Alcuni sicuramente la conoscevano bene, altri probabilmente no.

Molti risultati di Saccheri furono ritrovati indipendentemente molti anni dopo.

Il punto di partenza è il quadrilatero birettangolo isoscele:

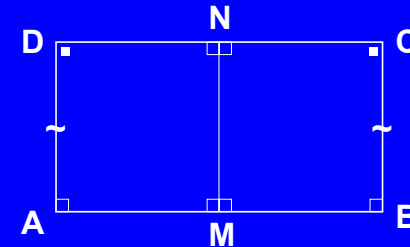




I triangoli AMD e MBC sono uguali  
(due lati e l'angolo compreso)

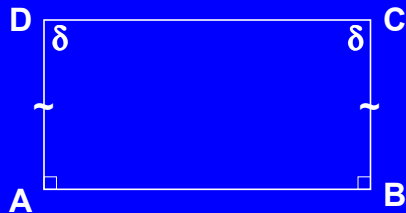
I triangoli MND e MCN sono uguali  
(tre lati)

Prop. I



Ciò che si riesce a provare è che gli  
angoli in C e in D sono uguali

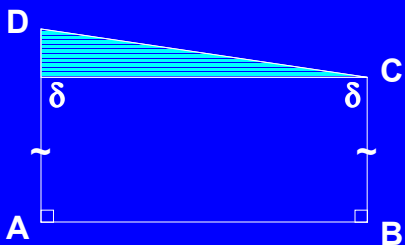
E che gli angoli in M ed N (punti medi) sono tutti retti



Tre casi possibili:

- |                          |                       |
|--------------------------|-----------------------|
| $\delta = \text{retto}$  | Ipotesi angolo retto  |
| $\delta = \text{ottuso}$ | Ipotesi angolo ottuso |
| $\delta = \text{acuto}$  | Ipotesi angolo acuto  |

Saccheri si propone di distruggere  
sia l'ipotesi dell'angolo ottuso che  
quello dell'angolo acuto, provando  
che tali ipotesi portano a risultati  
contraddittori.

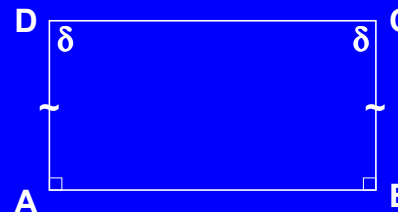


$AD > BC$

$\hat{D} < \delta < \hat{C}$

e viceversa

**Prop.  
III - IV**

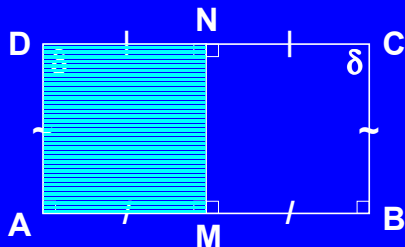


Se vale l'ipotesi dell'angolo retto allora  
 $AB = CD$

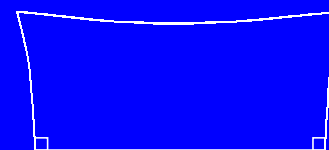
Se vale l'ipotesi dell'angolo ottuso allora  
 $AB > CD$

Se vale l'ipotesi dell'angolo acuto allora  
 $AB < CD$

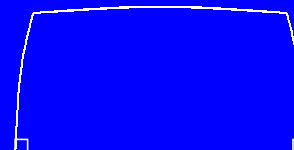
e viceversa



È sufficiente considerare il  
quadrilatero birettangolo AMND  
(rettangolo in M ed N)



acuto

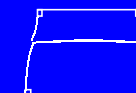
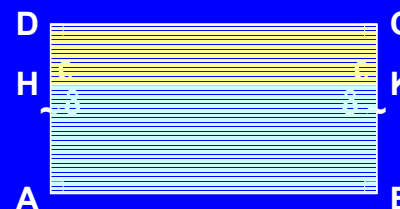


ottuso

**Prop. V**

Se in un solo caso è vera l'ipotesi dell'angolo retto, è vera in ogni altro caso

(con la stessa base)

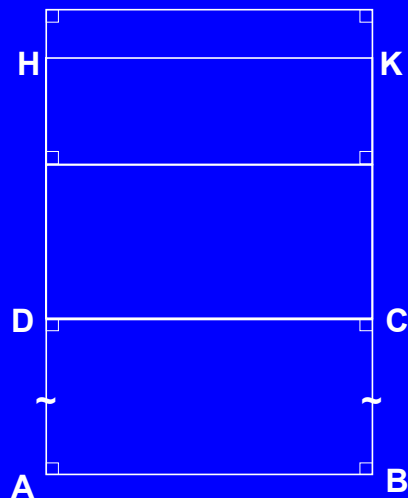


$AH = BK$

Si ha  $AB = DC$

Se  $\delta$  fosse ottuso allora  $\varepsilon$  sarebbe acuto e dal quadrilatero ABKH si avrebbe  $HK < AB$   
dal quadrilatero HKCD si avrebbe  $HK > DC$

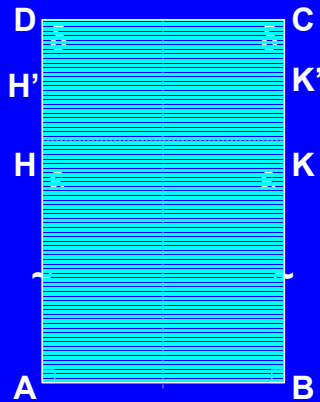
(analogamente se  $\delta$  fosse acuto)



**Prop. VI**

Se in un solo caso è vera l'ipotesi dell'angolo ottuso, essa è vera in ogni altro caso

(con la stessa base)



$\delta$  ottuso

Analogo se AH fosse maggiore di AD

$AB > DC$

L'angolo  $\varepsilon$  non può essere retto.

Supponiamo  $\varepsilon$  acuto  
 allora nel quadrilatero  
 ABKH si ha  $HK > AB$   
(vale ipotesi angolo acuto)  
 mentre nel quadrilatero  
 ABCD si ha  $AB > DC$   
(vale ipotesi angolo ottuso)  
 da cui  $HK > AB > DC$

$H'K' = AB$   
 e in  $ABH'K'$  varrebbe  
 l'ipotesi dell'angolo retto . . .

### Prop. VII

Se in un solo caso è vera l'ipotesi  
 dell'angolo acuto, è vera in ogni  
 altro caso

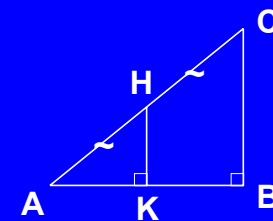
( immediato, per assurdo )

### Prop. IX

A seconda che sia verificata l'ipotesi  
 dell'angolo retto, dell'angolo ottuso,  
 dell'angolo acuto, la somma degli  
 angoli di un triangolo è rispettivamente  
 uguale, maggiore, minore di due angoli  
 retti.

Se in un solo triangolo la somma degli angoli  
 è uguale, maggiore, minore di due angoli retti,  
 lo stesso vale per ogni altro triangolo.

da Prop. XI e XII



nell'ip. ang. retto

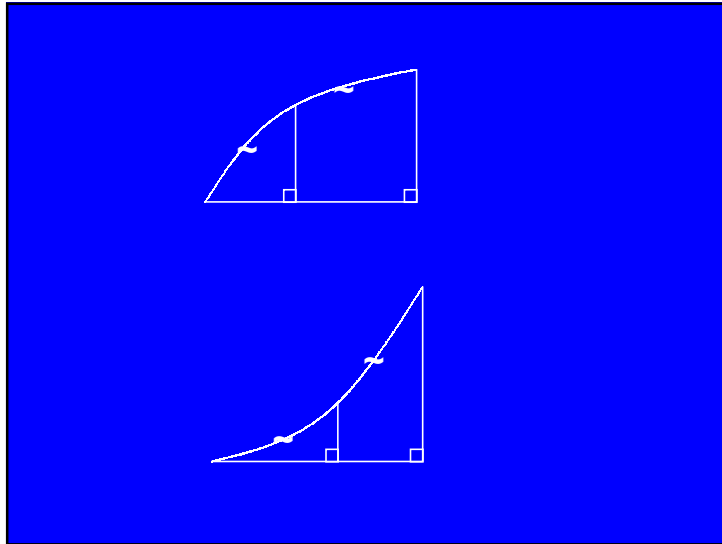
$AK = KB$

nell'ip. ang. ottuso

$AK < KB$

nell'ip. ang. acuto

$AK > KB$



nell'ip. ang. retto  $AB = BC = CD = DE$   
 nell'ip. ang. ottuso  $AB < BC < CD < DE$   
 nell'ip. ang. acuto  $AB > BC > CD > DE$

**Prop. XI - XII**

Nell'ipotesi dell'angolo retto o in quella dell'angolo ottuso, una perpendicolare ed una obliqua ad una stessa retta si incontrano.

Nasir-Eddin

$n AA_1 > AB$   
 $AA_n = n AA_1 > AB$       ip. ang. retto  
 $AA_n > n AA_1 > AB$       ip. ang. ottuso

si prova poi facilmente che

### Prop. XIII

Nell'ipotesi dell'angolo retto o in quella dell'angolo ottuso è vero il V postulato di Euclide

### Prop. XIV

L'ipotesi dell'angolo ottuso è falsa

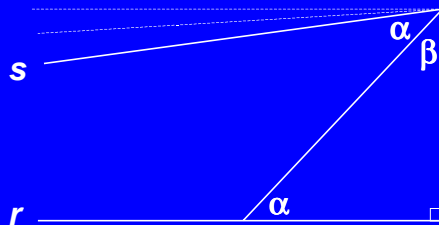
Infatti se vale tale ipotesi, vale il V postulato di Euclide, e quindi tutti i teoremi che ne derivano, tra cui il fatto che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è uguale a quattro retti, cioè vale l'ipotesi dell'angolo retto.

Tale ipotesi si distrugge da sola !

Dopo di ciò Saccheri cerca di distruggere anche l'ipotesi dell'angolo acuto

### Prop. XVII

Nell'ipotesi dell'angolo acuto esistono una perpendicolare ed una obliqua alla stessa retta che non si incontrano



Poiché vale l'ip. ang. acuto  
 $\alpha + \beta < \text{retto}$   
ma le due rette  $r$  ed  $s$  non si incontrano  
(Euclide, prop. 27)

Per dimostrare che l'ipotesi dell'angolo acuto è falsa (Prop. XXXIII) Saccheri si basa su cinque lemmi (lunghi ben 16 pagine) con i quali però conclude solamente che

L'ipotesi dell'angolo acuto è assolutamente falsa perché le conclusioni ottenute **ripugnano alla natura della linea retta**

In realtà egli non si accorse di aver dimostrato molti teoremi di geometria iperbolica.

La sua opera, pur non raggiungendo lo scopo prefissato, non trovò contraddizioni tra le conseguenze dell'ipotesi dell'angolo acuto e di fatto suggerì il dubbio che su questa ipotesi fosse possibile costruire una nuova geometria.