

Fare Matematica Oggi

Punti di svolta nella storia della matematica
Celle Ligure 25 26 27 Ottobre 2024

Ottavio Caligaris

Negli ultimi decenni la matematica, come e più di ogni altra attività, è stata profondamente influenzata dallo sviluppo e dalla sempre maggiore disponibilità di risorse di calcolo e di informazione.

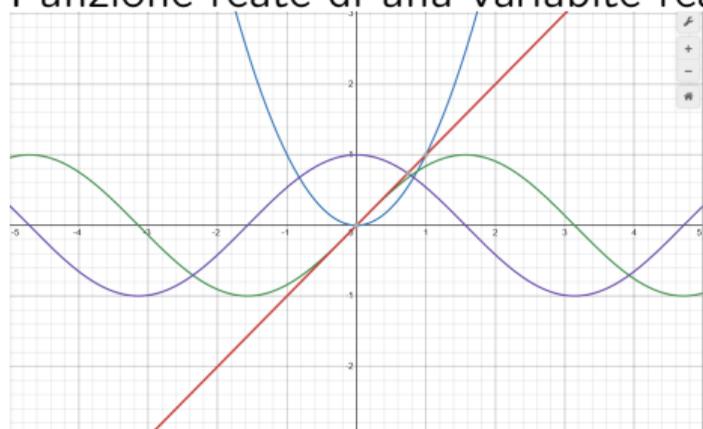
La rete garantisce un accesso a risorse bibliografiche e di calcolo fino a non molto tempo fa inimmaginabile.

Le nuove risorse hanno portato grandi benefici, ad esempio, per

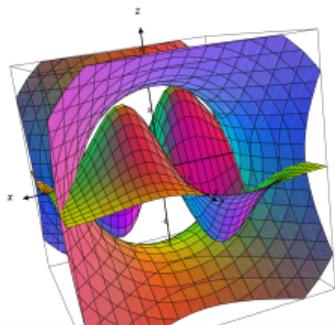
- La presentazione della Matematica
- La dimostrazione di teoremi
- Lo sviluppo di metodi e modelli iterativi.

Presentare La Matematica

- Funzione reale di una variabile reale *** [Desmos](#)



- Funzione reale di due variabili reali *** [CalcPlot3d](#)

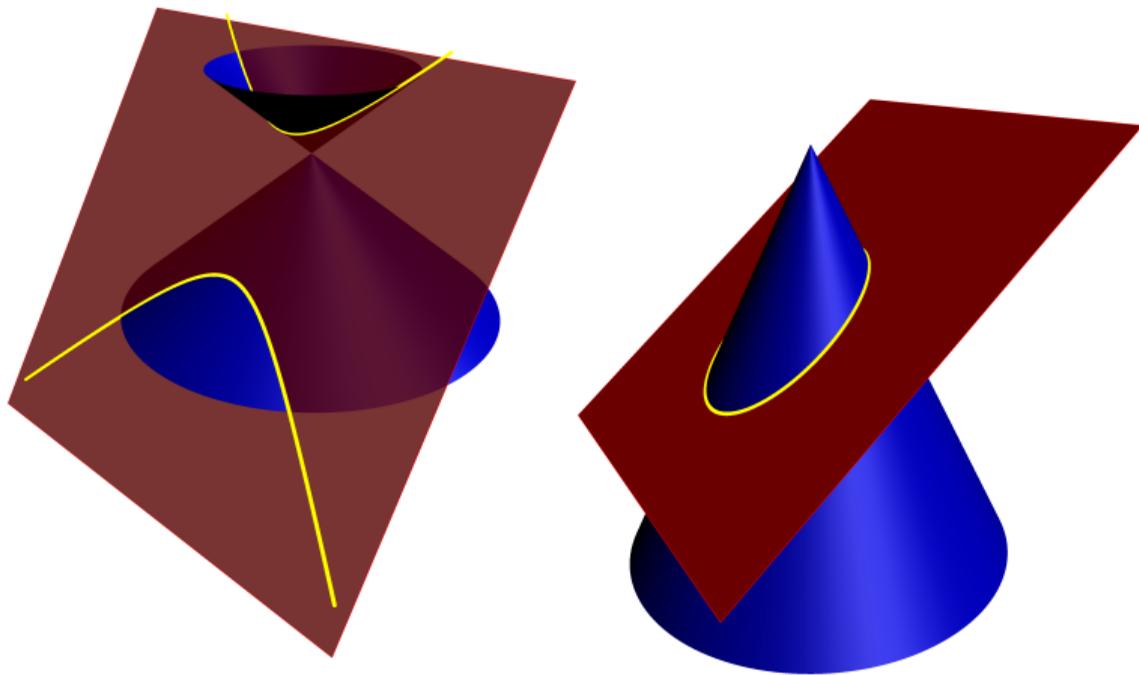


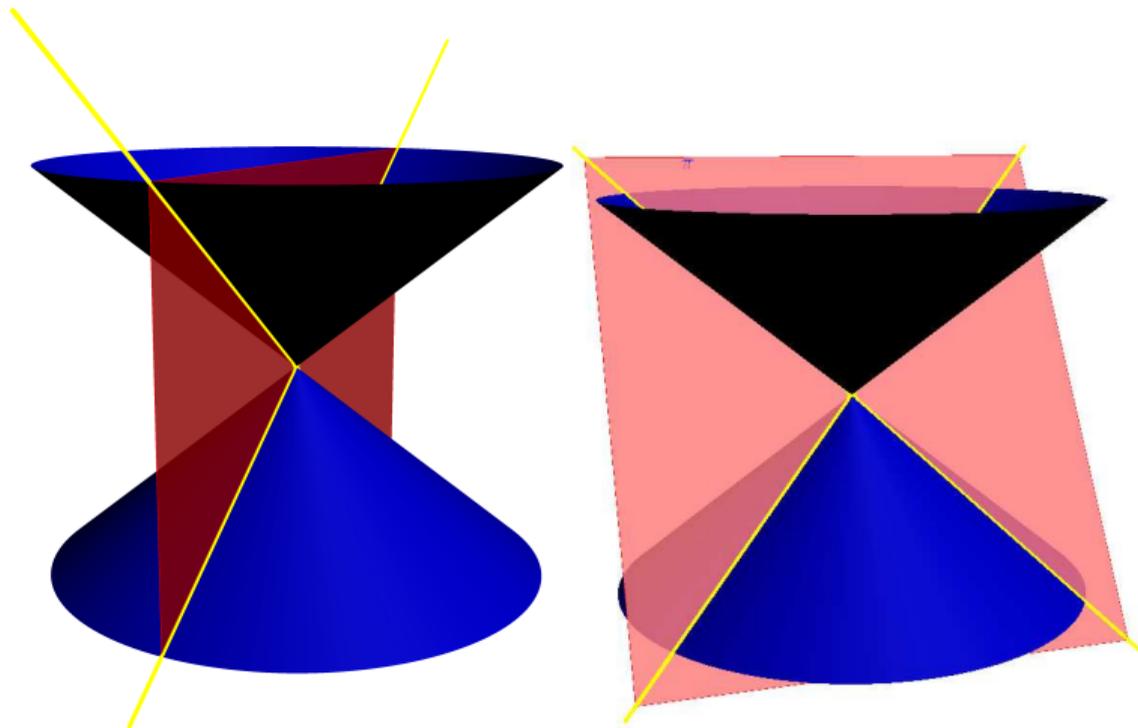
Le sezioni coniche sono le curve nello spazio che si ottengono intersecando un cono con un piano.

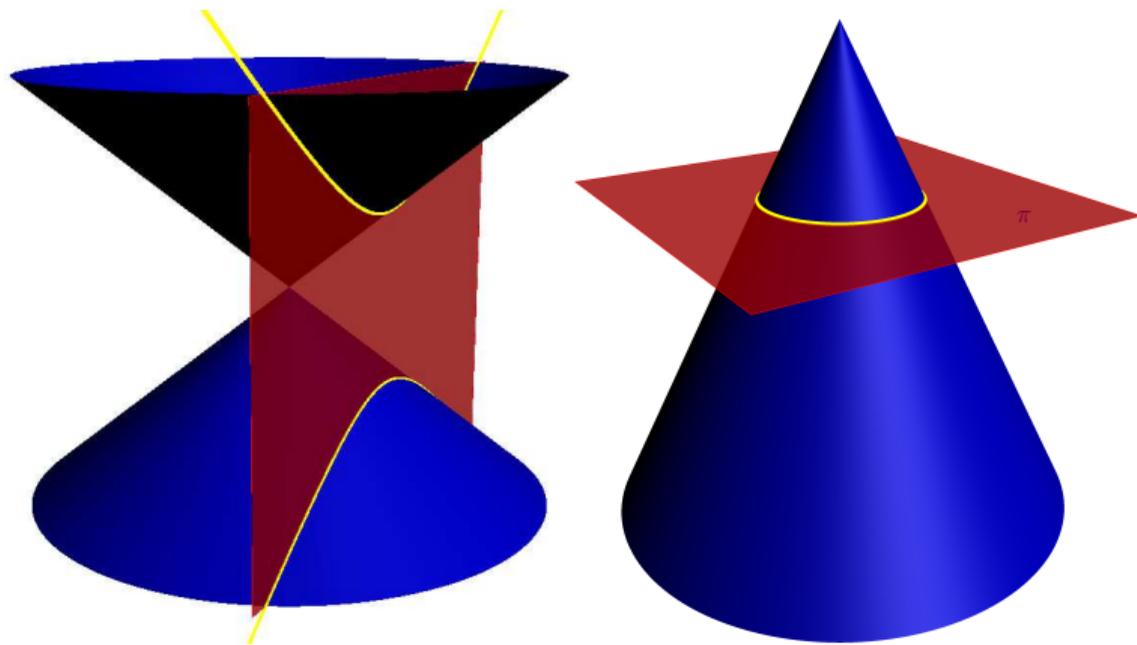
A seconda della mutua posizione di cono e piano si ottengono¹

- circonferenze
- ellissi
- parabole
- iperboli
- coppie di rette
- punti

¹ *Le coniche*







Le Sfere di Dandelin

Le coniche si possono caratterizzare con un procedimento estremamente elegante

Due sfere contenute in un cono

definiscono una conica i cui punti si ottengono

intersecando una retta passante per due punti,
ciascuno dei quali sulla circonferenza comune al cono e a una delle due sfere

con il piano tangente alle due sfere.

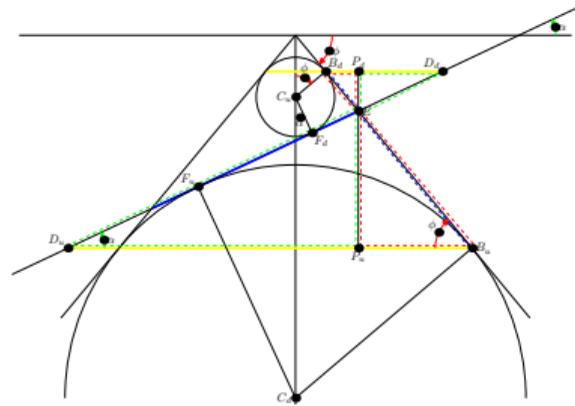
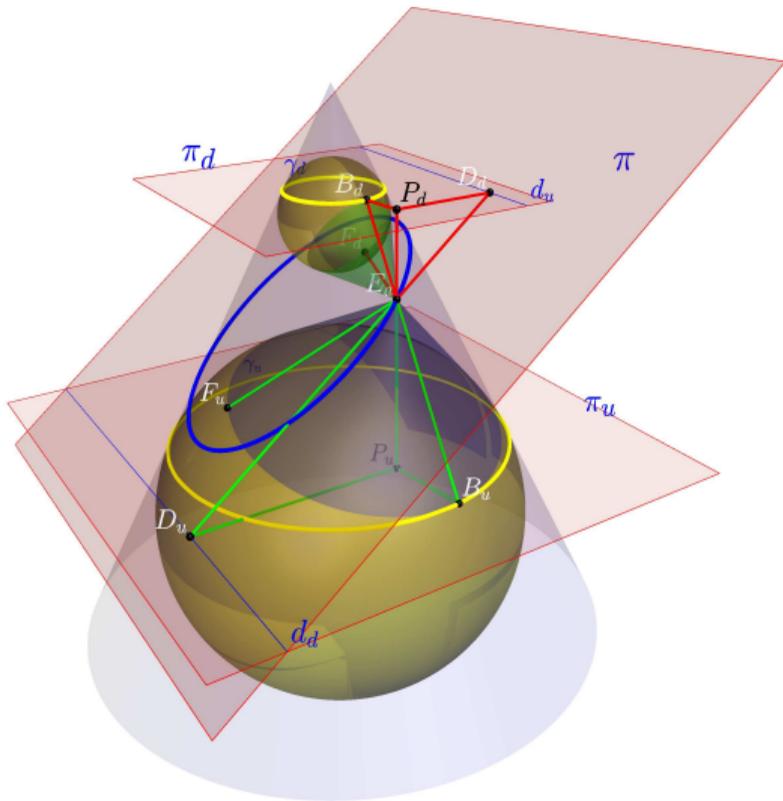
Date due sfere contenute nel cono

Siano γ_1 e γ_2 le circonferenze comuni a cono e a ciascuna delle due sfere

Sia r la retta che giace sul cono e passa per $P_1 \in \gamma_1$ e $P_2 \in \gamma_2$

Sia α il piano tangente alle due sfere

Il punto intersezione di r con α descrive una conica che dipende dalla mutua posizione delle sfere.



- Una rappresentazione più efficace
- La memoria originale di Dandelin

Ovviamente la costruzione di Dandelin dipende dalle sfere scelte ²

²*Le coniche*

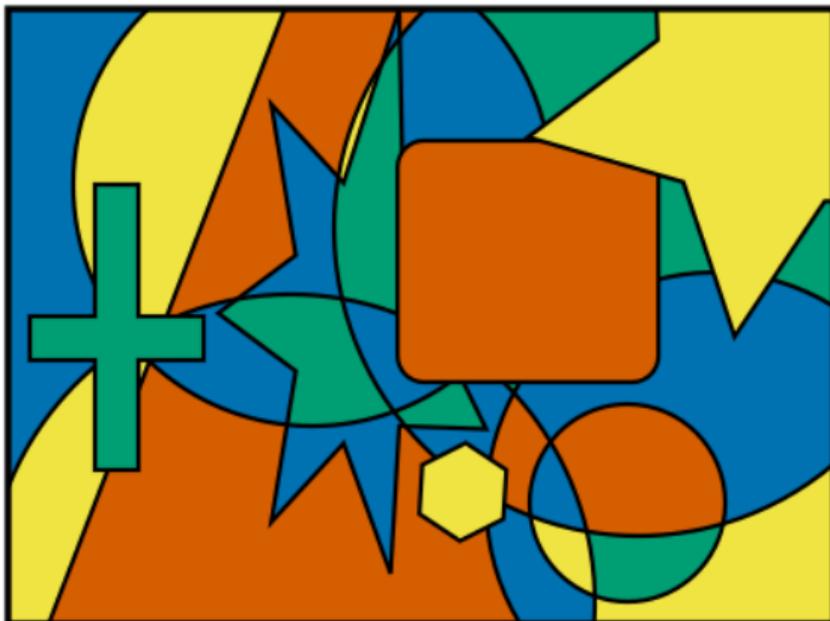
La Dimostrazione di Teoremi

Il Teorema dei 4 colori

Il teorema dei quattro colori afferma che:

Data una superficie piana divisa in regioni connesse, come ad esempio una carta geografica politica, sono sufficienti quattro colori per colorare ogni regione facendo in modo che regioni adiacenti non abbiano lo stesso colore.

Due regioni sono dette adiacenti se hanno almeno una linea di confine in comune

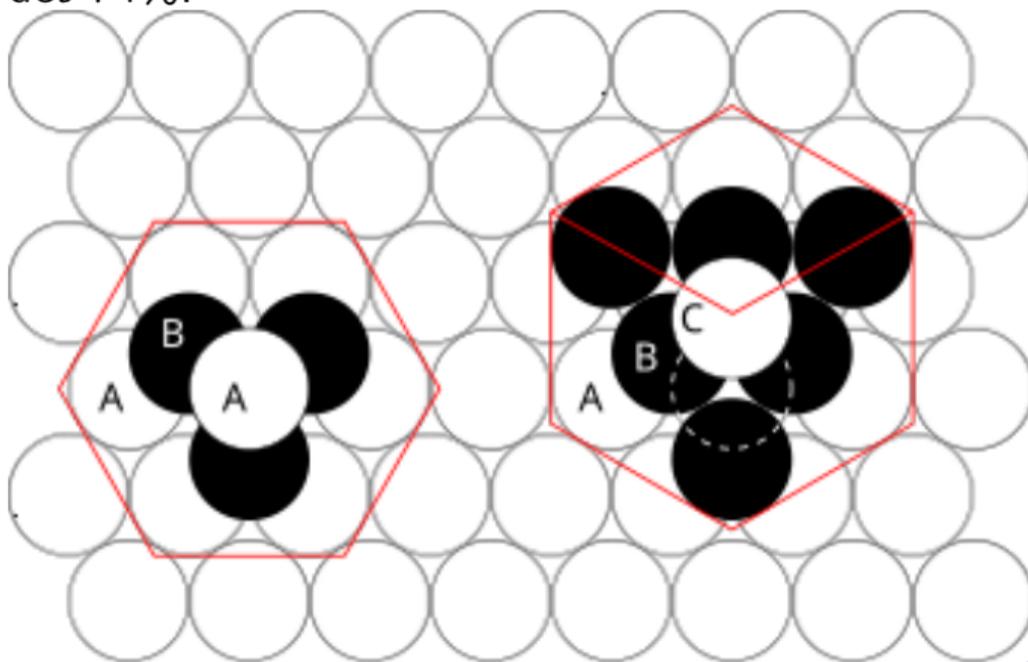


Nel 2005 il teorema è stato verificato da Georges Gonthier mediante l'uso di software

[Gonthier, Georges \(2008\)](#),
"Formal Proof - The Four - Color Theorem" ,
Notices of the American Mathematical Society,
55 (11): 1382 - 1393

La congettura di Keplero

Non esiste alcun modo di sistemare delle sfere nello spazio con densità media superiore a quella dell'impacchettamento cubico a facce centrate o a quella dell'impacchettamento esagonale. La densità di questi due modi di sistemare le sfere è maggiore del 74%.



Nel 1998 Thomas Hales annunciò la dimostrazione della congettura di Keplero.

I referee, dopo aver letto l'articolo, si dichiararono certi "al 99%" della correttezza della dimostrazione

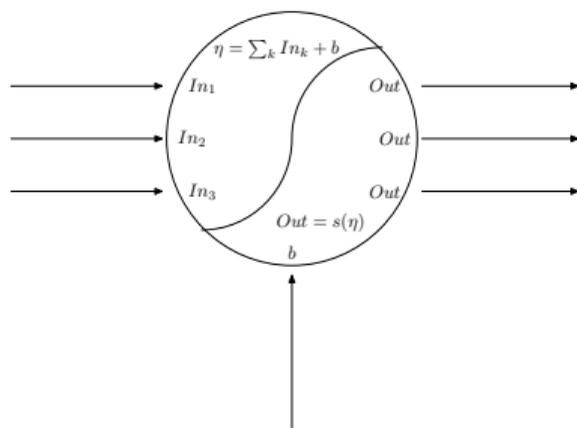
La dimostrazione formale della congettura di Keplero è stata completata e verificata nel 2014

Metodi e Modelli iterativi

Le Reti Neurali

Gli elementi costitutivi di una rete neurale sono i singoli neuroni e le connessioni che si stabiliscono tra i neuroni stessi.

Un neurone si può schematizzare come una unità che riceve in ingresso un certo numero di segnali, li somma, li processa mediante una funzione di attivazione e restituisce un segnale in uscita.



Le funzioni di attivazione s più comuni sono

$$s_1(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

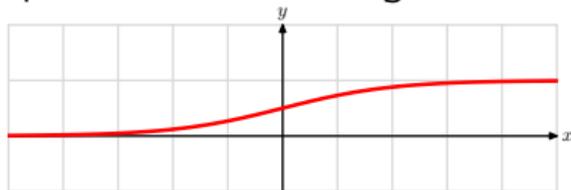
$$s_2(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ 1 & x > a \end{cases}$$

oppure

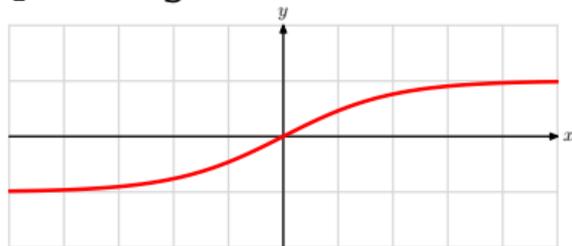
$$s_3(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \tanh(x)$$

$$s_4(x) = \begin{cases} -1 & x \leq -a \\ x & -a < x \leq a \\ 1 & x > a \end{cases}$$

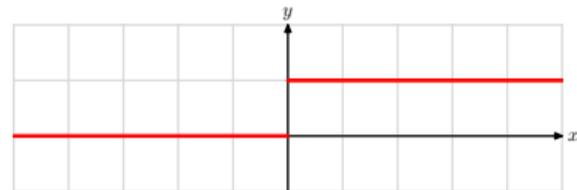
questi sono i loro grafici:



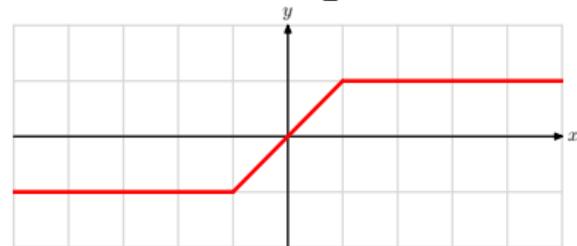
s₁: La Sigmoide



s₃: la Tangente iperbolica

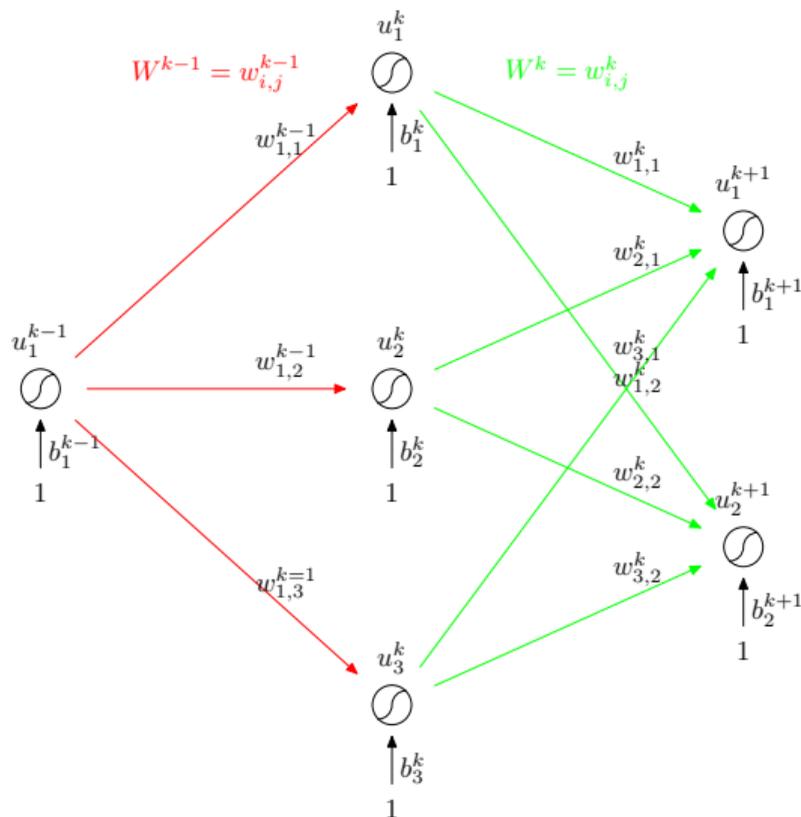


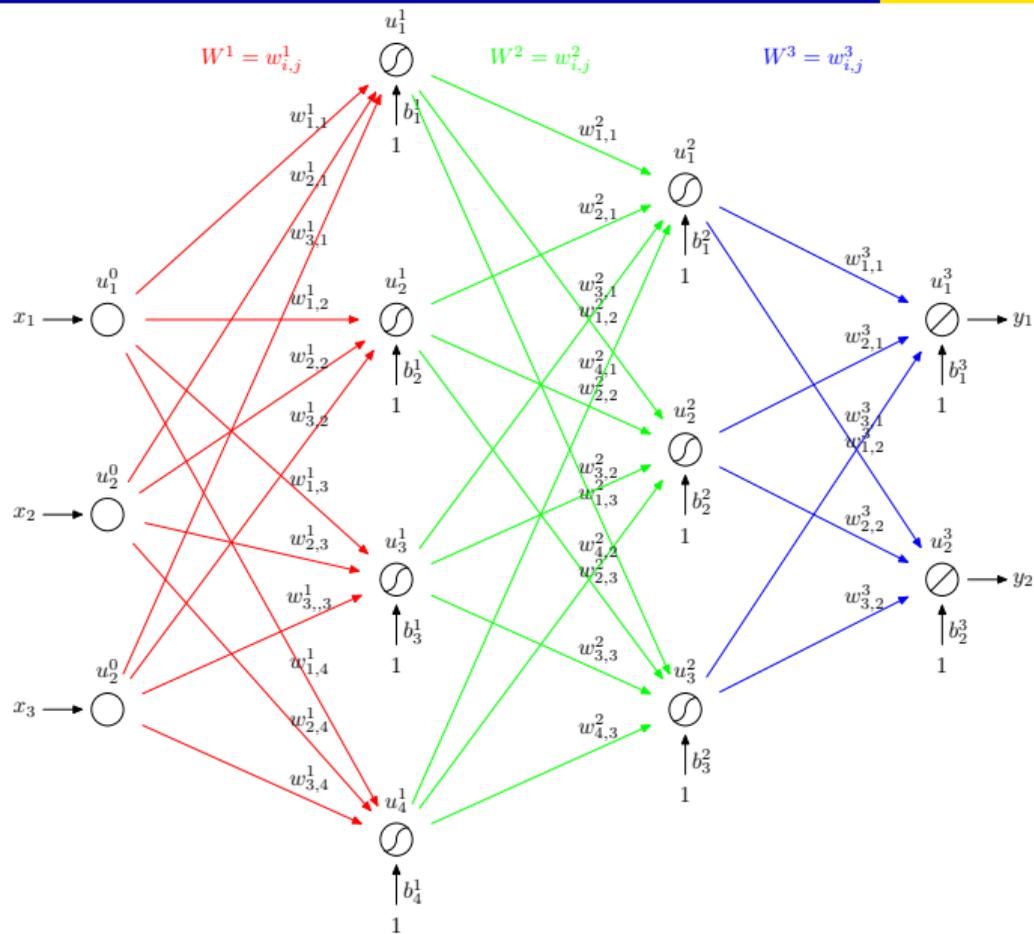
s₂: il Gradino



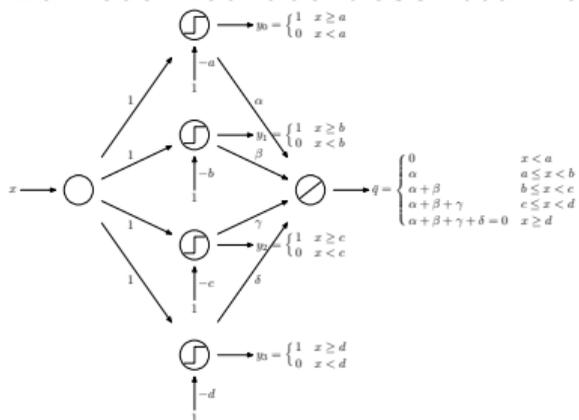
s₄: la Rampa

I Collegamenti tra due diversi strati di una rete possono essere descritti come segue:

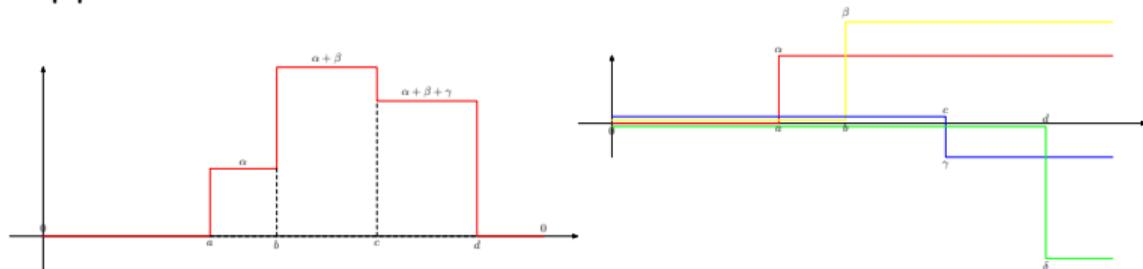


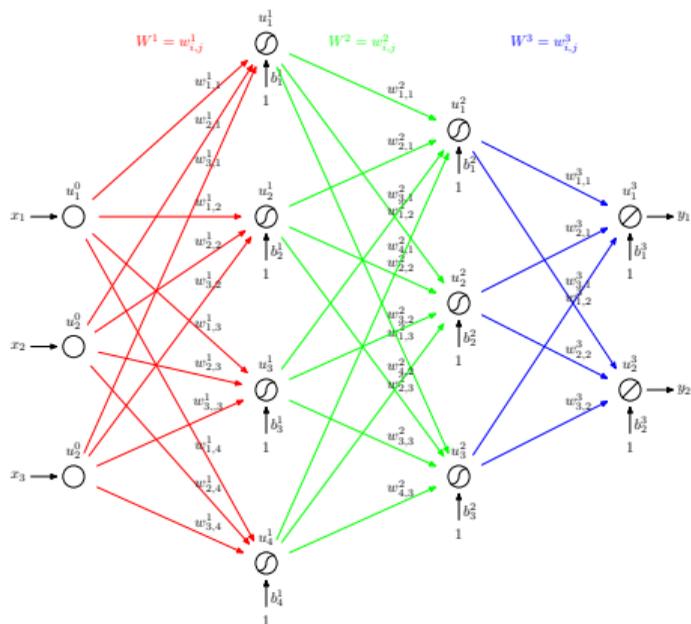


La rete neurale descritta nella Figura



definisce la funzione a scalini, il cui grafico è somma delle funzioni a gradino rappresentate a fianco





La rete neurale rappresentata nella figura può, ad esempio essere utilizzata per rappresentare una funzione da \mathbb{R}^3 in \mathbb{R}^2 è identificata dalle matrici

$$W^1 = (w_{j,k}^1), \quad W^2 = (w_{j,k}^2), \quad W^3 = (w_{j,k}^3)$$

e dai vettori (bias)

$$b^1 = (b_k^1), \quad b^2 = (b_k^2), \quad b^3 = (b_k^3)$$

L'ingresso u_0 si propaga nella rete mediante le:

$$\begin{aligned} \eta^1 &= \bar{u}^0 \bar{W}^1 & \eta^2 &= \bar{u}^1 \bar{W}^2 & \eta^3 &= \bar{u}^2 \bar{W}^3 \\ u^1 &= s(\eta^1) & u^2 &= s(\eta^2) & u^3 &= \eta^3 \\ \bar{u}^0 &= (u^0, 1) & \bar{u}^1 &= (u^1, 1) & \bar{u}^2 &= (u^2, 1) \end{aligned}$$

e definisce l'uscita u_3 della rete per cui

$$u_3 = F(u_0)$$

Possiamo adattare la rete che abbiamo definito ad un insieme di dati in modo da poterla usare come strumento predittivo.

non è richiesta una scelta preventiva del tipo di funzioni da usare,

Addestrare la rete significa determinare le matrici dei pesi W^k ed i vettori b^k , in modo che la differenza tra uscita della rete e valore atteso sia minima.

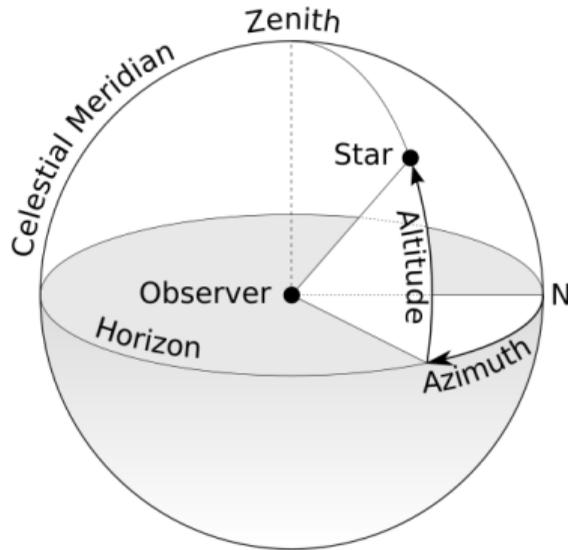
Ciò può essere fatto mediante il metodo del gradiente

nonostante la apparente complessità dei calcoli necessari, si verifica che esistono semplici formule localizzate per modificare i coefficienti

L'algoritmo mediante il quale si aggiornano i coefficienti della rete si indica di solito col nome di *backpropagation*

Un'applicazione

Consideriamo il problema di stabilire una corrispondenza tra i pixel di una immagine digitale del cielo e le coordinate celesti delle stelle, o dei corpi celesti, che vi compaiono



Tale corrispondenza dipende evidentemente dalle caratteristiche dell'apparecchiatura utilizzata e dal suo posizionamento

e talvolta non è semplice conoscere i valori che definiscono questi parametri con la sufficiente precisione.

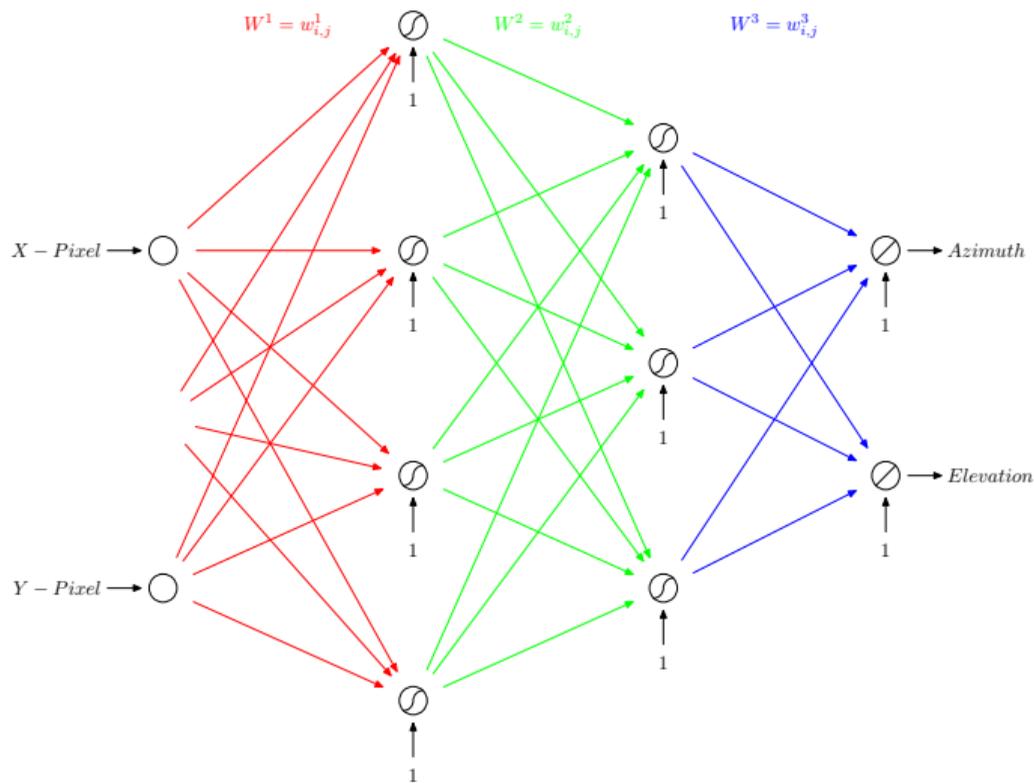
Esistono formule euristiche per risolvere il problema

dipendono da alcuni parametri che vengono determinati utilizzando:

un certo numero di corrispondenze note tra pixel e coordinate celesti che permettono di impostare un sistema di equazioni non-lineari

ed il metodo di Levenberg - Marquardt (dei minimi quadrati nonlineare) per risolvere il sistema.

Si può anche usare una semplice rete neurale che riceve in ingresso le coordinate dei pixel dell'oggetto celeste e restituisce i valori delle sue coordinate celesti.



Disease Prediction

Un tipo diverso di rete neurale può essere impiegato per individuare una malattia a partire dai sintomi.

I **dati** contengono una tabella ogni riga della quale reca l'indicazione dei sintomi presenti in un particolare caso e la malattia corrispondente sulla falsariga della tabella

Caso	Sintomo 1	Sintomo 2	Sintomo 3	Diagnosi
XXX	0	1	0	yyyyyyyy

Per ogni nuovo caso, descritto dai sintomi presentati, la rete, utilizzando tecniche di probabilità Bayesiana, individua la malattia corrispondente.

L'archivio contiene 120 casi di ciascuna di 41 malattie ed i relativi (132) sintomi

la rete individua correttamente la malattia nei casi di un archivio di test che contiene un caso per ognuna delle malattie considerate ed i relativi sintomi.

Iterated Function Systems

Consideriamo, ad esempio, $N = 4$ Trasformazioni composte

$$\begin{cases} X = a(i)x + b(i)y + u(i) \\ Y = c(i)x + d(i)y + v(i) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a &= [a(1), a(2), a(3), a(4)] \\ b &= [b(1), b(2), b(3), b(4)] \\ c &= [c(1), c(2), c(3), c(4)] \\ d &= [d(1), d(2), d(3), d(4)] \\ u &= [u(1), u(2), u(3), u(4)] \\ v &= [v(1), v(2), v(3), v(4)] \end{aligned}$$

ed $N = 4$ numeri positivi

$$p = [p(1), p(2), p(3), p(4)]$$

con

$$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 1$$

- Scegliamo un punto (x, y)
- Scegliamo a caso con probabilità $p(i)$ una delle $N = 4$ trasformazioni, applichiamo la trasformazione scelta ad (x, y) e disegniamo il trasformato (X, Y) .
- Poniamo $(x, y) = (X, Y)$, scegliamo a caso con probabilità $p(i)$ una delle $N = 4$ trasformazioni, applichiamo la trasformazione scelta ad (x, y) e disegniamo il trasformato (X, Y) .
- Ripetiamo il procedimento un gran numero di volte.

Si può dimostrare che

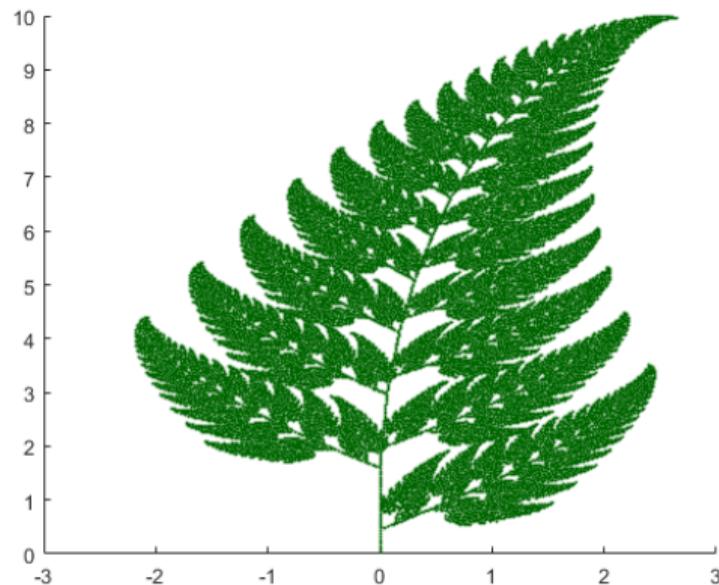
il procedimento definisce nel piano una figura univocamente determinata

purchè le trasformazioni impiegate siano tutte contrazioni.

IFS qualche esempio

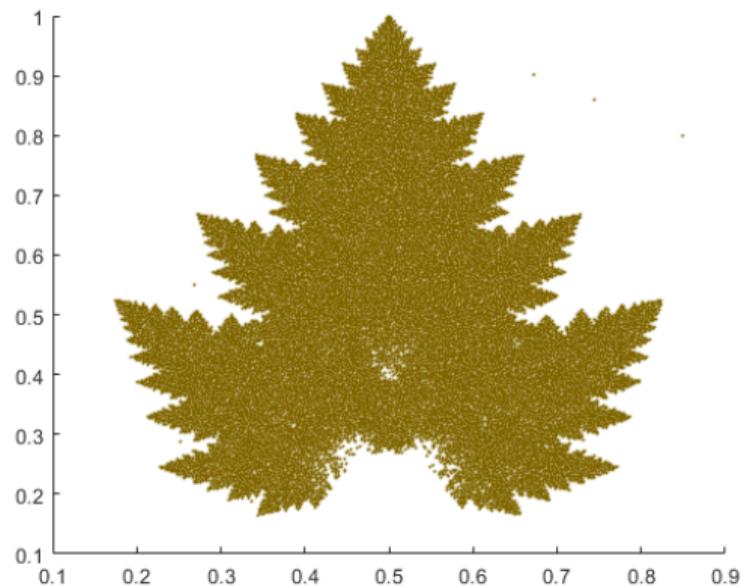
$$\begin{aligned} a &= [\quad .85 \quad .2 \quad -.15 \quad 0 \quad] \\ b &= [\quad .04 \quad -.26 \quad .28 \quad 0 \quad] \\ c &= [\quad -.04 \quad .23 \quad .26 \quad 0 \quad] \\ d &= [\quad .85 \quad .22 \quad .24 \quad .16 \quad] \\ u &= [\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad] \\ v &= [\quad 1.6 \quad 1.6 \quad .44 \quad 0 \quad] \end{aligned}$$

$$p = [\quad .85 \quad .7 \quad .7 \quad .1 \quad]$$

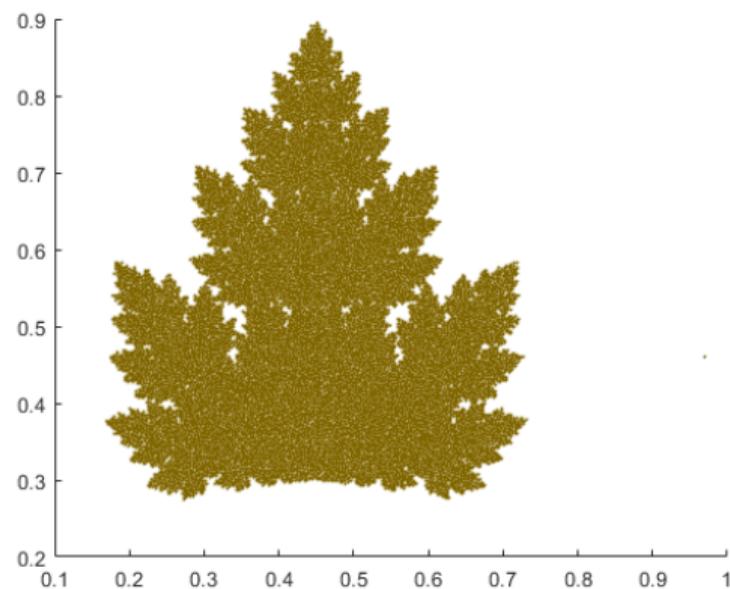


$$\begin{aligned} a &= [\quad .7 \quad .7 \quad .35 \quad .35 \quad] \\ b &= [\quad 0 \quad 0 \quad .35 \quad -.35 \quad] \\ c &= [\quad 0 \quad .0 \quad -.35 \quad .35 \quad] \\ d &= [\quad .7 \quad .7 \quad .35 \quad .35 \quad] \\ u &= [\quad .15 \quad .15 \quad .3 \quad .35 \quad] \\ v &= [\quad .3 \quad .1 \quad .35 \quad 0 \quad] \end{aligned}$$

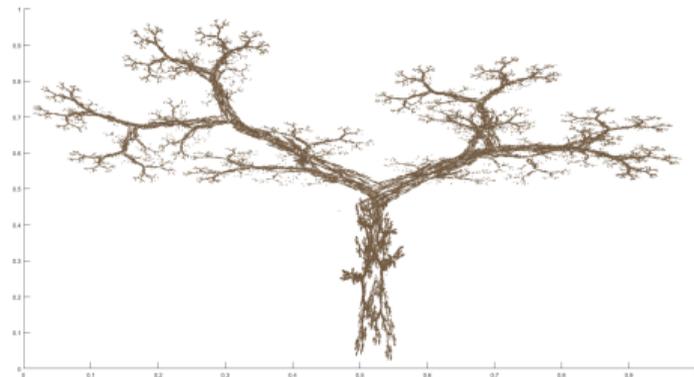
$$p = [\quad .64 \quad .12 \quad .12 \quad .12 \quad]$$



$$\begin{aligned} a &= [.6 \quad .6 \quad .4 \quad .4] \\ b &= [0 \quad 0 \quad .3 \quad -.3] \\ c &= [0 \quad .0 \quad -.3 \quad .3] \\ d &= [.6 \quad .6 \quad .4 \quad .4] \\ u &= [.18 \quad .18 \quad .27 \quad .27] \\ v &= [.36 \quad .12 \quad .36 \quad .09] \\ p &= [1/4 \quad 1/4 \quad 1/4 \quad 1/4] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a &= [\quad .195 \quad .462 \quad -.058 \quad -.035 \quad -.637 \quad] \\ b &= [\quad -.488 \quad .414 \quad -.07 \quad .07 \quad 0 \quad] \\ c &= [\quad .462 \quad -.252 \quad .453 \quad -.469 \quad 0 \quad] \\ d &= [\quad .414 \quad .361 \quad -.111 \quad -.022 \quad .501 \quad] \\ u &= [\quad .4431 \quad .2511 \quad .5976 \quad .4884 \quad .85621 \quad] \\ v &= [\quad .2452 \quad .5692 \quad .0969 \quad .5069 \quad .2513 \quad] \\ \\ \rho &= [\quad .2 \quad .45 \quad .65 \quad .9 \quad] \end{aligned}$$



Riferimenti

- Desmos. <https://www.desmos.com/calculator/>
- CalcPlot3d <https://c3d.libretexts.org/CalcPlot3D/index/html>
- Dandelin "Mémoire sur quelques propriétés remarquables de la focale parabolique" , Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles . 2: 171-200.
<https://www.biodiversitylibrary.org/item/101263#page/349/mode/1up>
- Greg Egan Conic Section Orbits
<https://www.gregegan.net/SCIENCE/ConicSectionOrbits/ConicSectionOrbits.html#DS>
- Computer Assisted Proofs.
https://en.wikipedia.org/wiki/Computer-assisted_proof
- Four Color theorem. https://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem
- Georges Gonthier, Notices of the American Mathematical Society, 55 (11): 1382-1393,

- Kepler Conjecture; https://en.wikipedia.org/wiki/Kepler_conjecture
- Disease Prediction, <https://www.kaggle.com/datasets/kaushil268/disease-prediction-using-machine-learning>
- Ottavio Caligaris Introduzione alle reti neurali
<http://web.inge.unige.it/SMA/PI/AppNeu.pdf>
- Ottavio Caligaris IFS <http://web.inge.unige.it/SMA/Sv/BookOfUniverse.pdf>