I Solidi

Regolari

??-??- 2001

Cosa sono
i
Solidi Platonici

I Solidi Platonici sono solidi convessi delimitati da facce costitute da poligoni regolari tutti uguali tra loro.

Un Solido di questo genere è individuato dal numero dei lati del poligono che costituisce ciascuna faccia e dal numero di facce che concorrono in un vertice.

È facile riconoscere che si possono costruire solidi di questo genere solo nel caso in cui si scelgano facce che siano

1. Triangoli Equilateri

2. Quadrati

3. Pentagoni

Non è possibile costruire poligoni con facce esagonali

infatti

- almeno tre facce devono concorrere in un vertice

- l'esagono ha angoli interni uguali a 120^o

Se le facce sono esagonali tre facce che abbiano

- un vertice in comune

- un lato in comune a due a due

devono risultare complanari, e non delimitano un solido.

Per la stessa ragione possono essere costruiti solidi regolari solo con

- 3, 4 o 5 facce triangolari

Infatti poichè gli angoli di un triangolo equilatero sono di 60^o, 6 triangoli che concorrono in un vertice ed abbiano un lato in comune a due a due devono essere disposti su un piano.

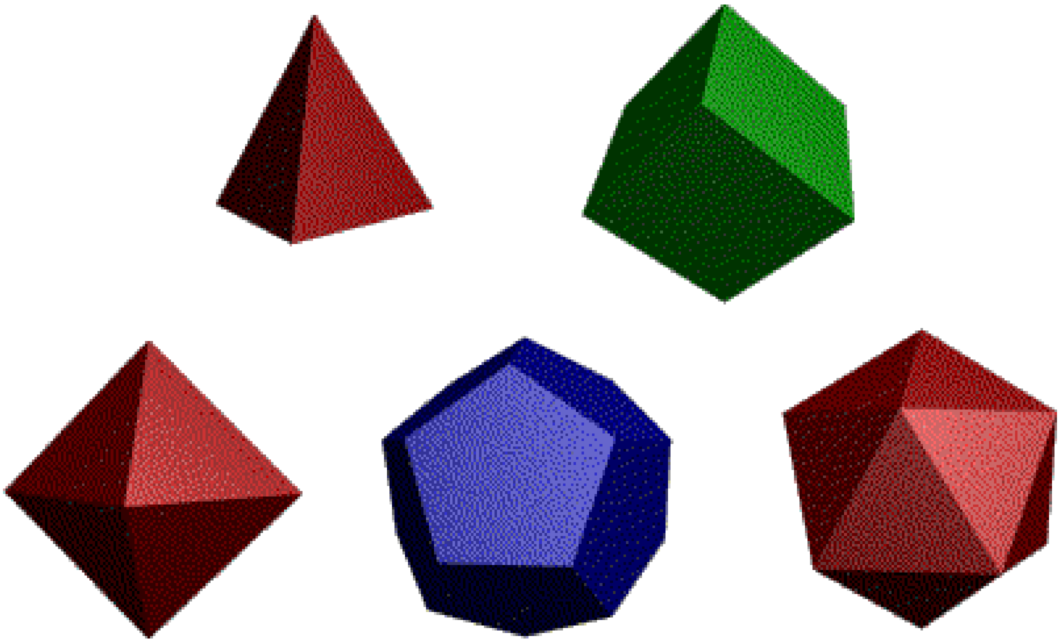
Possono inoltre essere costruiti solidi regolari solo con

- 3 facce quadrate ($4 \cdot 90 = 360$)

o con

- 3 facce pentagonali ($4 \cdot 108 > 360$)

I Solidi Platonici sono solo 5



nell'ordine

TETRAEDRO
ESAEDRO
OTTAEDRO
DODECAEDRO
ICOSAEDRO

Ogni poliedro regolare è inscritto in una sfera di raggio R

Possiamo supporre $R = 1$

Ogni poliedro regolare è circoscritto in una sfera di raggio r.

Indichiamo con

- v il numero dei suoi vertici,
- e il numero dei suoi lati,
- f il numero delle sue facce,
- p il numero di spigoli per ogni faccia,
- q il numero di spigoli che si incontrano in un vertice,

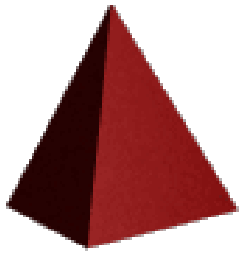
Per i Solidi Platonici vale la formula di Eulero

$$v + f - e = 2$$

- a la lunghezza dello spigolo,
- θ l'angolo diedrale formato da due facce,
- V il volume
- S la superficie

Galleria

Il Tetraedro



Ha 4 facce triangolari

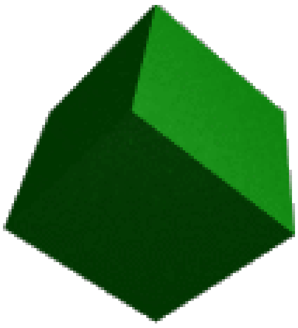
v	:	numero di vertici
e	:	numero di spigoli
f	:	numero di facce
p	:	numero di lati di una faccia
q	:	numero di spigoli per vertice
r	:	raggio della sfera inscritta
a	:	lunghezza dello spigolo
V	:	Volume
S	:	Su[erficie
θ	:	angolo diedrale

v	e	f	p	q
4	6	4	3	3

$\frac{r}{R} = \frac{r}{1}$	a	V	S
$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{\sqrt{6}}$	$8\frac{\sqrt{3}}{3}$	$8\frac{\sqrt{3}}{27}$

$\cos\theta$	θ
$\frac{1}{3}$	$70^{o}31'44''$

L'esaedro



Ha 6 facce quadrate

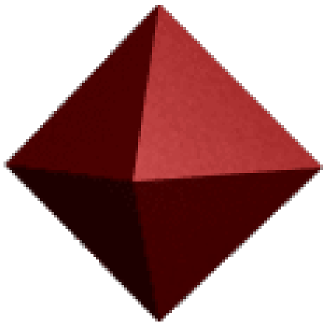
v : numero di vertici
e : numero di spigoli
f : numero di facce
p : numero di lati di una faccia
q : numero di spigoli per vertice
r : raggio della sfera inscritta
a : lunghezza dello spigolo
V : Volume
S : Su[erficie
θ : angolo diedrale

v	e	f	p	q
8	12	6	4	3

$\frac{r}{R} = \frac{r}{1}$	a	V	S
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$8\frac{\sqrt{3}}{9}$	8

$\cos\theta$	θ
0	90^o

L’Ottaedro



Ha 8 facce triangolari

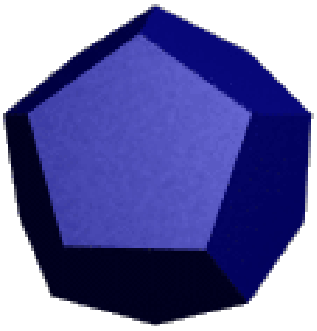
v	:	numero di vertici
e	:	numero di spigoli
f	:	numero di facce
p	:	numero di lati di una faccia
q	:	numero di spigoli per vertice
r	:	raggio della sfera inscritta
a	:	lunghezza dello spigolo
V	:	Volume
S	:	Su[erficie
θ	:	angolo diedrale

v	e	f	p	q
6	12	8	3	4

$\frac{r}{R} = \frac{r}{1}$	a	V	S
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{3}$	$4\sqrt{3}$

$\cos\theta$	θ
$\frac{1}{3}$	$109^o 28' 16''$

Il Dodecaedro



Ha 12 facce pentagonali

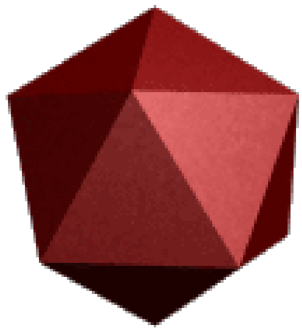
v	:	numero di vertici
e	:	numero di spigoli
f	:	numero di facce
p	:	numero di lati di una faccia
q	:	numero di spigoli per vertice
r	:	raggio della sfera inscritta
a	:	lunghezza dello spigolo
V	:	Volume
S	:	Su[erficie
θ	:	angolo diedrale

v	e	f	p	q
20	30	12	5	3

$\frac{r}{R}=\frac{r}{1}$	a	V	S
$\frac{\sqrt{750+330\sqrt{5}}}{15(\sqrt{5}+1)}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{15+7\sqrt{5}}(\sqrt{5}-1)^3}{12\sqrt{12}}$	$16\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{(\sqrt{5}+1)^2}$

$\cos\theta$	θ
$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$116^o 33' 34''$

L'Icosaedro



Ha 20 facce triangolari

v	:	numero di vertici
e	:	numero di spigoli
f	:	numero di facce
p	:	numero di lati di una faccia
q	:	numero di spigoli per vertice
r	:	raggio della sfera inscritta
a	:	lunghezza dello spigolo
V	:	Volume
S	:	Su[erficie
θ	:	angolo diedrale

v	e	f	p	q
12	30	20	3	5

$\frac{r}{R} = \frac{r}{1}$	a	V	S
$\frac{\sqrt{14+6\sqrt{5}}}{\sqrt{30+6\sqrt{5}}}$	$\frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{20+4\sqrt{5}}{3\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$10\sqrt{3} - 2\sqrt{15}$

$\cos\theta$	θ
$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$138^o 11' 23''$

Platone

e

I Solidi Regolari

Lo studio dei poliedri regolari risale ai Pitagorici e ad Euclide

Già a loro era noto che potevano essere costruiti solo 5 solidi regolari convessi

Tuttavia il promo trattamento sistematico si fa risalire a Teeteto, un discepolo di Platone,

È contenuto nel Timeo, uno dei dialoghi di Platone.

I filosofi socratici non avevano particolare interesse in questioni matematiche,

Socrate di cui Platone era discepolo aveva idee poco chiare anche sul significato di numero.

Non mi permetterò mai di dire che quando uno è aggiunto a uno, o l'uno che deve essere aggiunto o l'uno a cui si deve aggiungere, diventa due a causa dell'addizione di uno all'altro.

Io immagino che quando ognuno è separato dall'altro, ognuno di essi è uno, ma quando si avvicinano, questa è la causa del loro diventare due.

Neppure mi posso persuadere che quando una cosa è divisa, questa divisione è la causa del suo diventare due, perchè la causa di diventare due è esattamente l'opposto

Tuttavia Platone venne in contatto con la scuola dei Pitagorici e sul frontespizio della sua accademia era addirittura affisso il motto

ἀγεωμὲρητος
μηδεὶς
εἰσίτω

Non entri chi non sa di
Geometria

Platone enfatizza la corrispondenza dei solidi regolari con gli elementi fondamentali

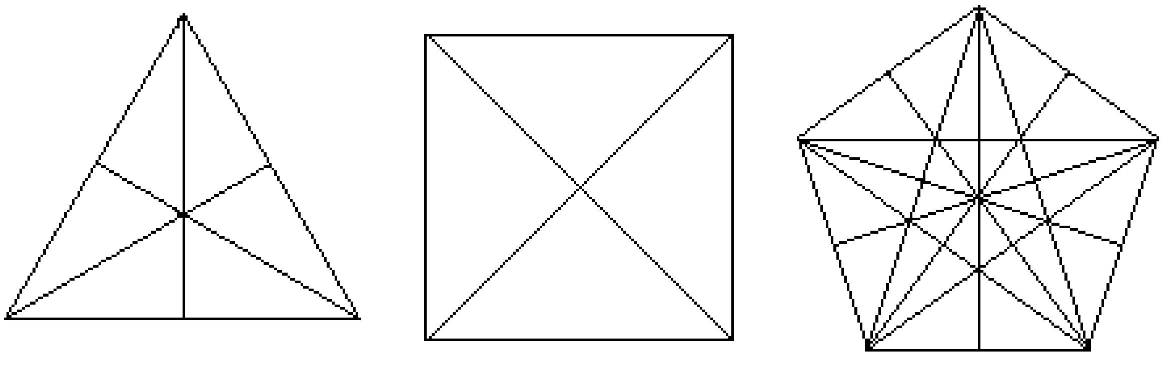
Tetraedro	Fuoco
Esaedro	Terra
Ottaedro	Aria
Icosaedro	Acqua

Platone tenta inoltre di caratterizzare ciascun solido regolare mediante il numero triangoli di un certo tipo mediante i quali possono essere costruite le loro facce

Platone usa triangoli rettangoli i cui lati siano proporzionali alle terne

$$(1, 2, \sqrt{3}) \ , \ (1, 1, \sqrt{2})$$

Mediante essi è possibile costruire triangoli equilateri e quadrati, ma non pentagoni.



Contando i triangoli che compongono ciascuna faccia Platone attribuisce un numero ad ogni solido ed associa al solido uno dei quattro elementi

Tetraedro	Fuoco	Plasma	24
Esaedro	Terra	Solido	24
Ottaedro	Aria	Gas	48
Icosaedro	Acqua	Liquido	120

Naturalmente il dodecaedro non può essere caratterizzato da tali triangoli egli non se ne occupa esplicitamente ma altre fonti riportano che al dodecaedro fossero associati 360 triangoli rettangoli.

Basandosi su tali numeri Platone elabora una curiosa teoria in base alla quale

una particella di liquido = 5 particelle di plasma

oppure

una particella di liquido = due particelle di gas + una di plasma

Viceversa

due particelle di plasma = una particella di gas.

Naturalmente solo acqua aria e fuoco possono combinarsi o scomporsi, in quanto caratterizzati dallo stesso tipo di triangoli.

Il fatto che la terra sia costituita da triangoli di altro tipo indica una difficoltà a trasmutare e prefigura i materiali inerti.

Il Dodecaedro viene identificato con il quinto elemento, la quintessenza.

Platone dice che

"Dio ha usato questo solido per l'intero universo"

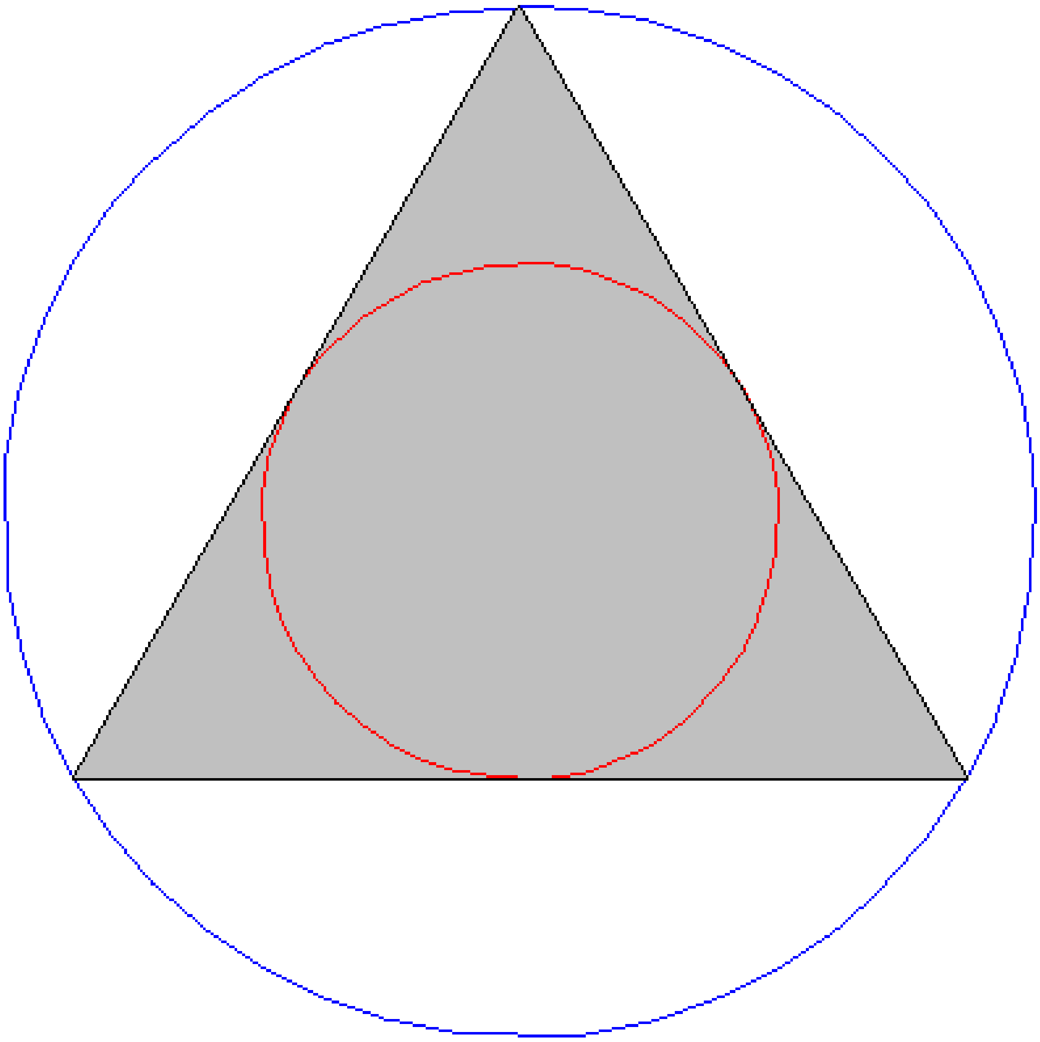
Interpreta il fatto che esso sia costituito da triangoli incommensurabili con quelli dei quattro elementi come positivo:

non è accettabile che la quintessenza si trasformi o venga generata dalle sostanze elementari.

Keplero ed l'Armonia dei Mondi

Molto più tardi un altro importante studioso, Joahn Kepler, fu colpito dalle particolarità dei solidi regolari e tentò di attribuire loro caratteristiche cosmogoniche.

Preparando una lezione di geometria, si accorse che il raggio del cerchio circoscritto ad un triangolo equilatero e quello in esso inscritto erano proporzionali alle orbite di Saturno e Giove.



Tentò allora di inserire tra le orbite di due pianeti successivi un poligono regolare

I pianeti conosciuti all'epoca erano

Mercurio

Venere

Terra

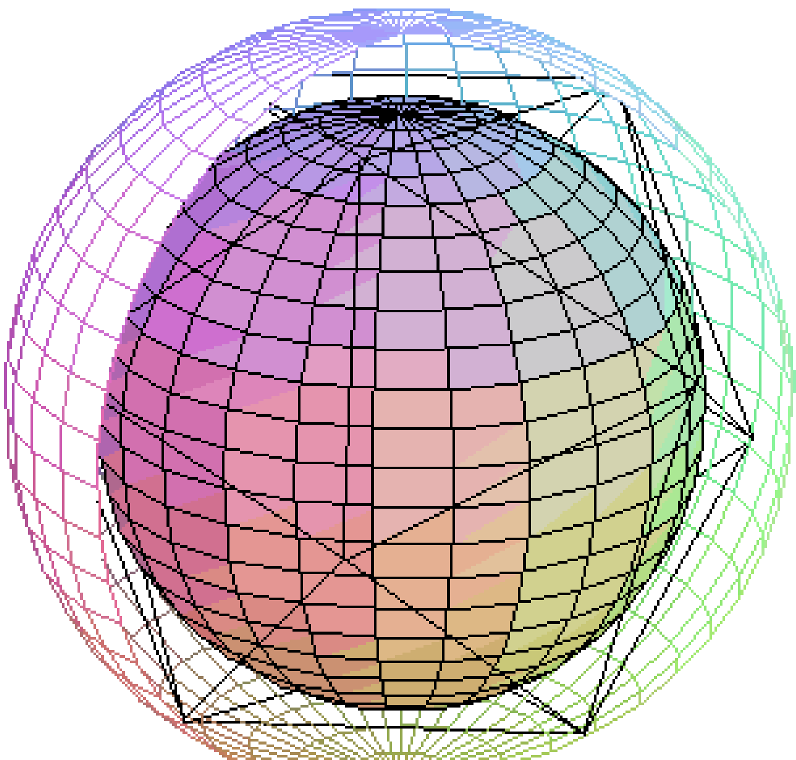
Marte

Giove

Saturno

Tuttavia non trovò riscontri sperimentali.

Tentò allora di usare i poliedri regolari, che tra l'altro erano tanti quanti necessari per essere inseriti tra i pianeti allora conosciuti, e dopo aver provato tutte le possibili combinazioni ne trovò una che aveva una certa corrispondenza con i dati orbitali dell'epoca.



Sfera dell'orbita di Saturno

Cubo

Sfera dell'orbita di Giove

Tetraedro

Sfera dell'orbita di Marte

Dodecaedro

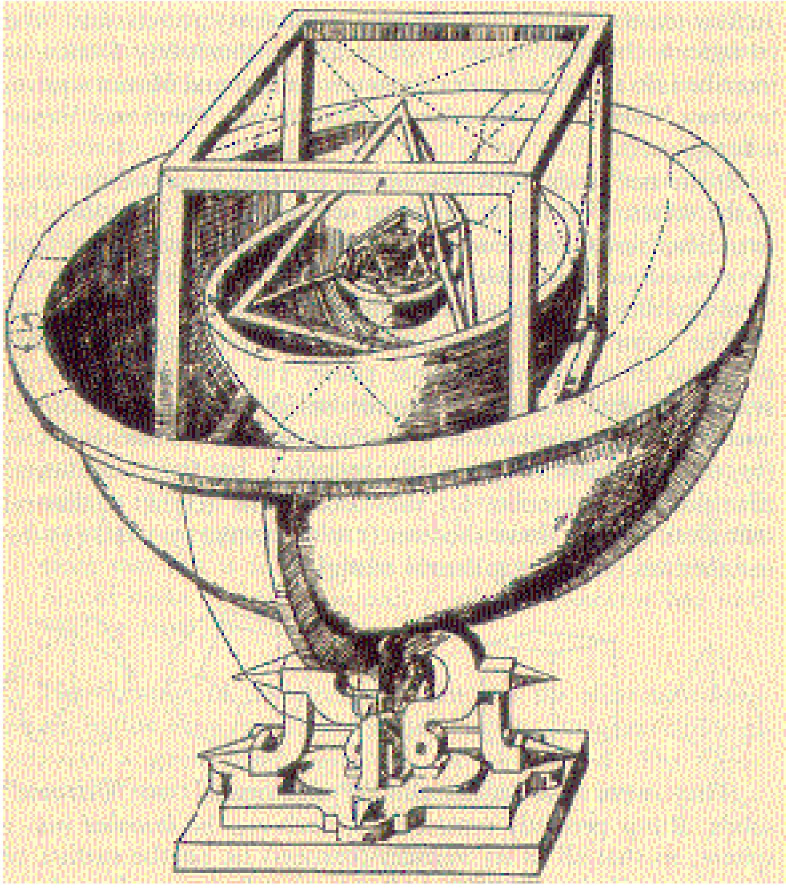
Sfera dell'orbita di Terra

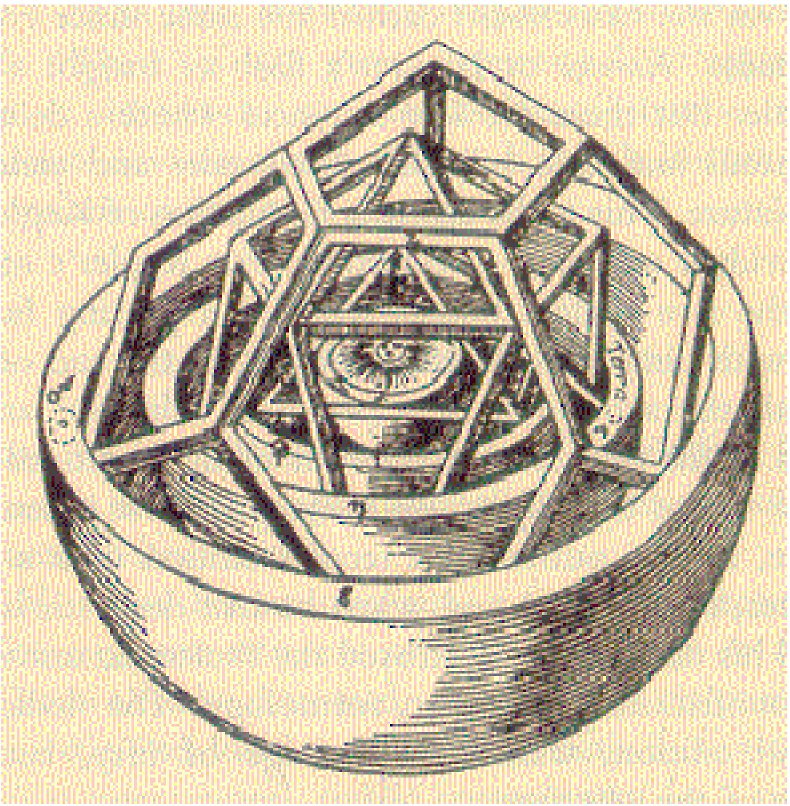
Icosaedro

Sfera dell'orbita di Venere

Ottaedro

Sfera dell'orbita di Mercurio





Ad una valutazione mediante i dati dell'epoca tale ipotesi poteva sembrare plausibile ma Keplero stesso si rese conto che i dati sperimentali non concordavano con la sua teoria e dedicò la sua vita allo studio delle orbite dei pianeti ricavando le sue tre celebri leggi.

Riportiamo per la cronaca i valori dei rapporti tra sfera circoscritta e sfera inscritta di ogni poliedro regolare

$\frac{O_{Saturno}}{O_{Giove}} = 1.83$	$\frac{R_{Cubo}}{r_{Cubo}} = 1.73$
$\frac{O_{Giove}}{O_{Marte}} = 3.41$	$\frac{r_{Tetraedro}}{R_{Tetraedro}} = 3$
$\frac{O_{Marte}}{O_{Terra}} = 1.52$	$\frac{r_{Dodecaedro}}{R_{Dodecaedro}} = 1.26$
$\frac{O_{Terra}}{O_{Venere}} = 1.38$	$\frac{r_{Icosaaedro}}{R_{Icosaedro}} = 1.26$
$\frac{O_{Venere}}{O_{Mercurio}} = 1.86$	$\frac{r_{Ottaedro}}{R_{Ottaedro}} = 1.73$

Dualità tra i solidi

Dato un poliedro regolare se ne può costruire un altro usando come vertici i punti medi delle sue facce.

I solidi così ottenuti si dicono duali l'uno della'altro si può verificare che

Ottaedro ed esaedro

e

Dodecaedro ed icosaedro

sono mutuamente duali, mentre il tetraedro è duale di se stesso

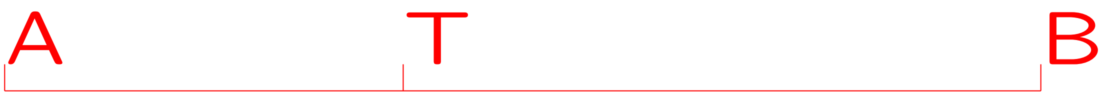
Dodecaedro, Icosaedro

e

Sezione Aurea

La Sezione Aurea

Problema: Dividere il segmento AB in due parti AT e TB delle quali una sia media proporzionale tra l'altra ed il segmento intero.



Deve essere

$$\frac{AB}{TB} = \frac{TB}{AT}$$

$$\frac{AT + TB}{TB} = \frac{TB}{AT}$$

$$\frac{AT}{TB} + 1 = \frac{TB}{AT}$$

Se chiamiamo

$$\tau = \frac{TB}{AT}$$

avremo

$$\tau = 1 + \frac{1}{\tau}$$

da cui

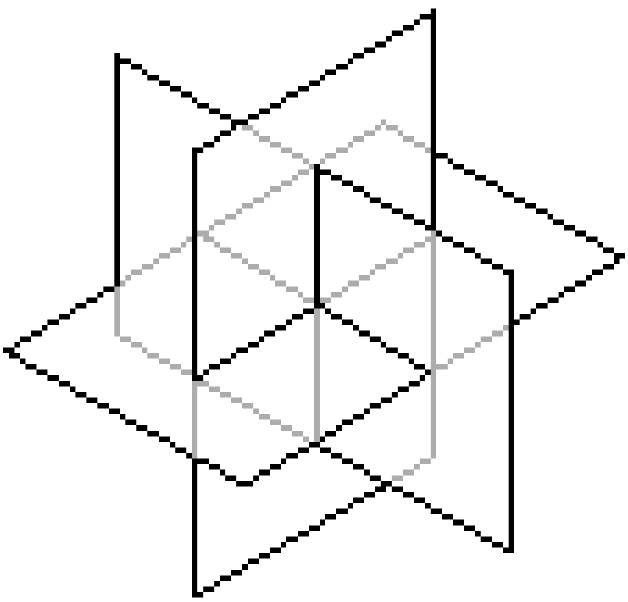
$$\tau = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} 1.618033987.... \\ -0.618033987.... \end{cases}$$

e

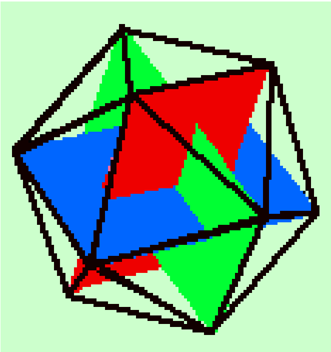
$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618033987$$

Consideriamo ora un rettangolo i cui lati abbiano lunghezze proporzionali ad 1 e a τ

e consideriamo tre rettangoli di questo tipo a due a due ortogonali



Congiungendo i vertici di cia- scuno dei rettangoli si ottiene un icosaedro,



Inoltre congiungendo i punti medi delle facce di un dodecaedro si ottengono tre rettangoli ortogonali i cui lati sono in proporzione aurea.