Strumenti per l'Analisi Finanziaria

Savona, 21 Febbraio 2002

O.Caligaris - P.Oliva

L'equazione di Black-Scholes

Problema

Stima del prezzo f di un'opzione di acquisto o di vendita di un bene il cui valore S cresce nel tempo con tasso μ ed è affetto da un fattore casuale gaussiano con media 0 e varianza σ con riferimento ad un tasso di investimento senza rischio r.

Il possesso di una opzione di acquisto o di vendita conferisce il diritto di acquistare o vendere una unita' del bene S al tempo stabilito T ad un prezzo stabilito K.

Il prezzo di una opzione deve essere tale che sia possibile trovare una combinazione di quote del bene e quote di investimento privo di rischio che garantiscano un rendimento pari a quello privo di rischio.

Il valore del bene S cresce seguendo la legge

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

Il valore dell'investimento privo di rischio B cresce seguendo la legge

$$dB = rBdt$$

Il prezzo dell'opzione è funzione del tempo t e del prezzo S del bene sottostante

$$f(t, S(t))$$

I é un portafoglio composto da beni S, opzioni f ed investimenti B a tasso r privo di rischio

$$I = -f + \alpha S + \beta B$$

In ipotesi di autofinanziamento ed usando la formula di Itô si ottiene

$$dI = \left((-f_t + \mu S f_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f_{SS}) + (\alpha \mu S + \beta r B) \right) dt + (-f_S + \alpha)\sigma S dW$$

Per eliminare il rischio si richiede che

$$-f_S + \alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = f_S$$

Supponendo impossibile l'arbitraggio

$$dI = rIdt = r(-f + \alpha S + \beta B)dt = r(-f + f_S S + \beta B)dt$$

Combinando le due espressioni di dI si ottiene l'equazione di Black-Scholes

$$f_t + rSf_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f_{SS} = rf \qquad t < T$$

alla quale si associa (nel caso di una opzione di vendita, tipo PUT) la condizione

$$f(T,S) = \max(K - S, 0)$$

che si può usare per determinare $f(t, S(t))$.

Per le opzioni di tipo CALL di acquisto si usa la condzione

$$f(T,S) = \max(S - K, 0)$$

Variabili aleatorie e Processi Stocastici

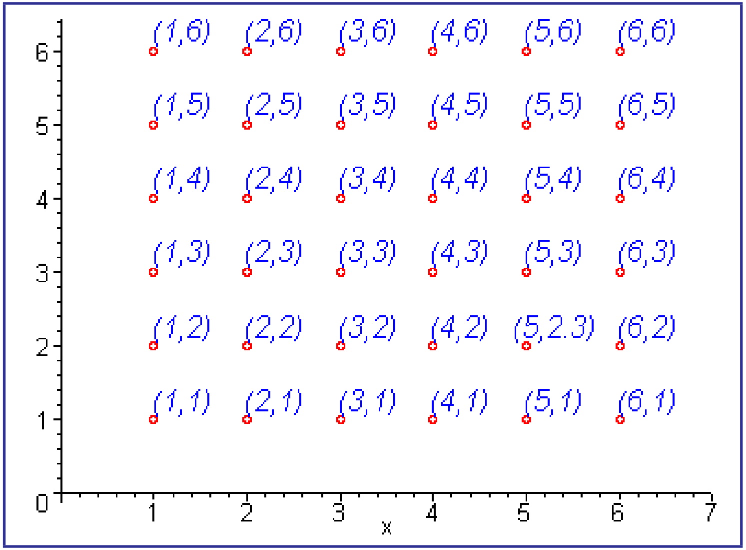
Sia

$$(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

uno spazio di probabilità.

- Ω , spazio dei campioni;
- $\mathcal{F}$, $\sigma-$algebra di sottoinsiemi di Ω
  (Famiglia di sottoinsiemi di Ω chiusa rispetto a complementazione, unione ed intersezione numerabili)
- P misura di probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$
  ($P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, $\quad P(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{F}$, $\quad \sigma-$additiva)

ESEMPIO 0.1. *Consideriamo gli eventi che si presentano quando si lanciano due dadi: possiamo identificare l'esito del lancio con la coppia di numeri (i, j) (punteggio) che si leggono sulla faccia superiore dei dadi.*



ogni evento è equiprobabile e

$$\mathcal{P}(A_{i,j}) = \frac{1}{36}$$

$\Omega =$ insieme delle coppie di valori (i,j) con $i,j = 1,2,3,4,5,6$
$\mathcal{F} =$ famiglia di tutti i sottoinsiemi di Ω
$\mathcal{P}(A) = \frac{1}{36}\big($numero degli elementi di$A\big)$

Chiamiamo Variabile Aleatoria una funzione

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

ESEMPIO 0.2.

$$X(i,j) = i + j$$

X definisce su $\mathbb{R}$ una misura di probabilità ξ mediante la

$$\xi((\alpha,\beta)) = P(\alpha \leq X \leq \beta) =$$
$$= P(\{\omega \in \Omega : \alpha \leq X(\omega) \leq \beta\}) =$$
$$= P(X^{-1}((\alpha,\beta)))$$

Naturalmente deve risultare che

$$X^{-1}((\alpha,\beta)) \in \mathcal{F}$$

L'ultima condizione si esprime dicendo che

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ è misurabile si può verificare che, sotto ipotesi non restrittive, esiste una funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \xi((\alpha, \beta)) = \int_\alpha^\beta \varphi(s) ds$$

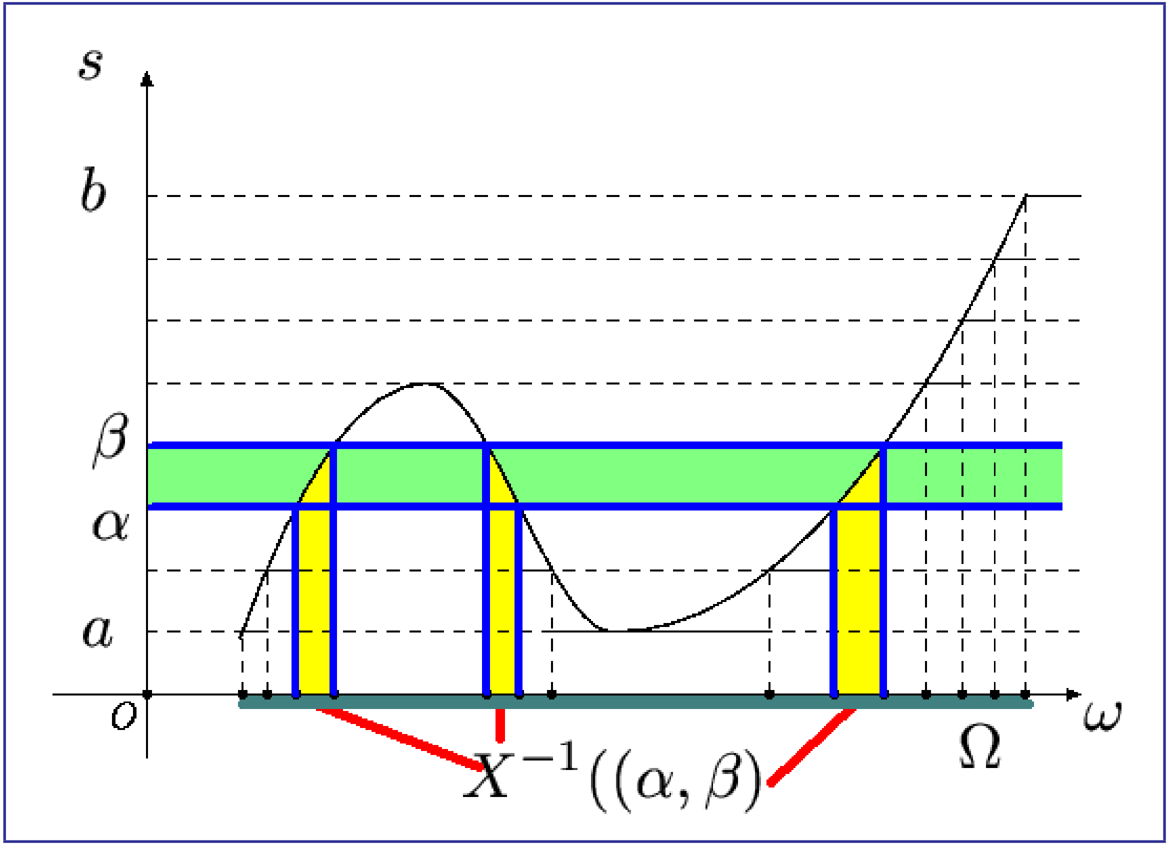
φ è la densità di probabilità di X

Abbiamo anche che

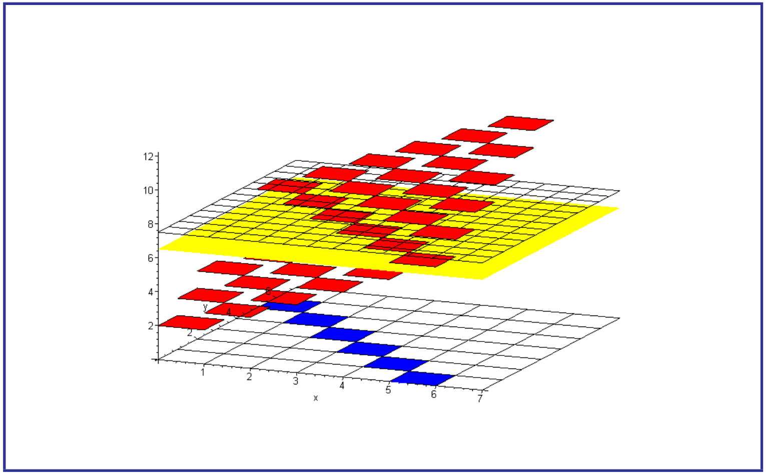
$$\int_\Omega X(\omega) d\omega \approx \sum \alpha P(X^{-1}(\alpha, \beta)) \approx \sum \int_\alpha^\beta s\varphi(s) ds = \int_a^b s\varphi(s) ds$$

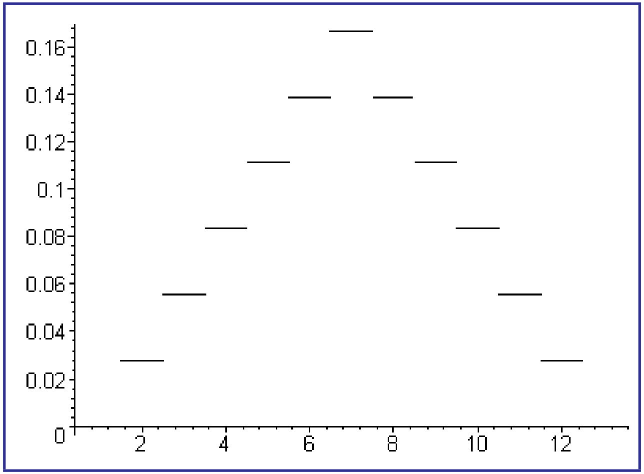
$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \xi((\alpha, \beta)) = \int_\alpha^\beta \varphi(s)ds$$

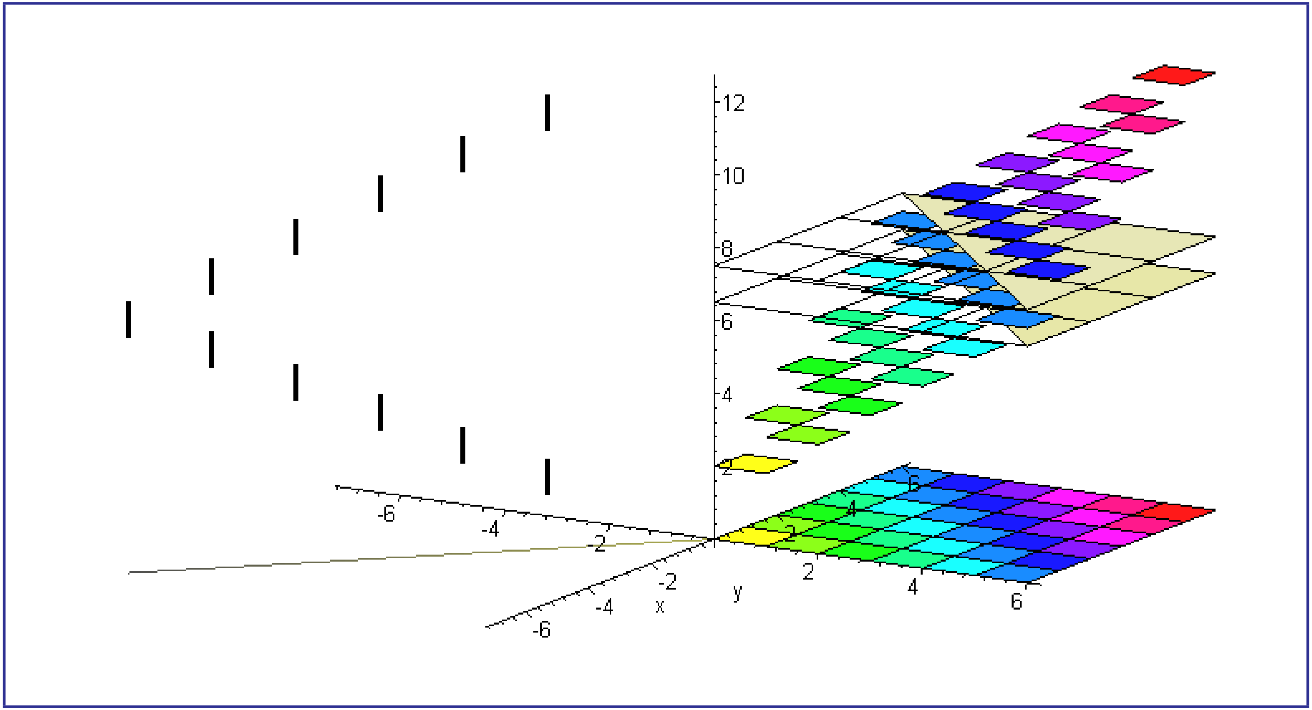
$$\int_\Omega X(\omega)d\omega \approx \sum \alpha P(X^{-1}(\alpha, \beta)) \approx \sum \int_\alpha^\beta s\varphi(s)ds = \int_a^b s\varphi(s)ds$$



ESEMPIO 0.3. *Nel caso del punteggio ottenuto con i dadi la funzione densità ha il grafico in figura.*







$$P(\alpha \le X \le \beta) = \xi((\alpha,\beta)) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(s)ds$$

Chiamiamo Processo Stocastico una funzione

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto X(t)$$

dove $X(t)$ è una variabile aleatoria su Ω

Avremo

$$X = X(t, \omega) \qquad\qquad (t, \omega) \in \mathbb{R} \times \Omega$$

$$\mathbb{R} \times \Omega \ni (t, \omega) \mapsto X(t, \omega)$$

Per ogni t fissato $X(t, \omega)$ ha una densità di probabilità $\varphi(t, s)$

$$P(\alpha \leq X(t) \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t, s) ds$$

$$E(X(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} s\varphi(t, s) ds$$

Il Processo di Wiener

È un processo stocastico W con le seguenti caratteristiche:

- $W(0) = 0$
- $W(t) - W(s)$ ha una densità di probabilità Gaussiana normale di media 0 e varianza $(t-s)$, $N(0, \sqrt{t-s})$.
- W ha incrementi indipendenti: cioè
  $W(t_1) - W(s_1)$ e $W(t_2) - W(s_2)$ sono variabili aleatorie indipendenti.

È possibile costruire un processo stocastico con le caratteristiche indicate.

Si ha

$$P(\alpha \leq W(t) - W(s) \leq \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_\alpha^\beta e^{-\frac{1}{2(t-s)}\tau^2} d\tau$$

La funzione $t \mapsto W(t, \omega)$ è continua per quasi ogni $\omega \in \Omega$ e non è derivabile con probabilità 1.

Modelli di Crescita

Sia x una quantità scalare che cresce nel tempo con tasso costante a

Allora

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = a$$

La precedente uguaglianza può essere espressa in diversi modi

$$\dot{x}(t) = a \quad , \quad \frac{dx}{dt} = a \qquad dx = adt \quad , \quad \int_0^t dx = \int_0^t ads$$

$$x(t+h) = x(t) + \int_t^{t+h} ads = x(t) + ah$$

Se x cresce con tasso proporzionale alla sua consistenza

Allora

$$\frac{x(t) - x(s)}{t - s} = \mu x(t)$$

La precedente uguaglianza può essere espressa da

$$\dot{x}(t) = \mu x(t) \ , \ \frac{dx}{dt} = \mu x \ , \ dx = \mu x dt \ , \ \int_0^t dx = \int_0^t \mu x(s) ds$$

Non si può procedere esplicitamente con l'integrazione,

Si può usare la definizione di integrale per ottenere una formula discreta che approssima x (Metodo di Eulero).

$$x(t+h) = x(t) + \int_t^{t+h} x(\bar{s}) ds = x(t) + x(\bar{s}) h$$

Crescita con tasso costante alterata da un fattore di incertezza W.

Avremo

$$x(t) + \sigma W(t) - (x(s) + \sigma W(s)) = \mu(t - s)$$

da cui

$$x(t) - x(s) = \mu(t - s) + \sigma(W(t) - W(s))$$

e

$$dx = \mu dt + \sigma dW$$

Possiamo integrare numericamente

$$\int_t^{t+h} dx = \int_t^{t+h} \mu dt + \int_t^{t+h} \sigma dW$$

se siamo in grado di dare una definizione di

$$\int_t^{t+h} \sigma dW$$

Nel caso in cui σ sia costante possiamo usare l'idea di integrale di Riemann:

$$\int_0^t \sigma dW \approx \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(W(t_{i+1}) - W(t_i) = \sigma(W(t) - W(0)) = \sigma W(t)$$

Osserviamo che

$$E\left(\sum_{i=1}^{n-1} \sigma(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right) = 0$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \sigma(W(t_{i+1}) - W(t_i))\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma^2(t_{i+1} - t_i) = \sigma^2(t-0) = \sigma^2 t$$

Ne viene che

$$\int_0^t \sigma^2 dW$$

è una variabile aleatoria di media 0 e di varianza $\sigma^2 t$

Nel caso in cui σ sia funzione della sola t possiamo approssimare

$$\int_0^t \sigma(s)dW(s)$$

mediante le somme di Riemann - Stieltjes

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sigma(s_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i))$$

Paley e Wiener hanno dimostrato che le somme di Riemann, in questo caso, convergono ad un processo stocastico nel caso in cui

$$\sigma \in \mathcal{C}^1$$

Non è difficile estendere la definizione a funzioni della sola t meno regolari.

Il caso in cui $\sigma = \sigma(t, W)$ è necessario per poter considerare equazioni del tipo

$$dX = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW$$

Per questo scopo è necessario definire

$$\int_0^t \sigma(s, X(s))dW$$

dove X è un processo stocastico.

Calcoliamo ad esempio il più semplice di questi integrali:

$$\int_0^t W dW$$

Procedendo come per gli integrali di Riemann-Stieltjes

Consideriamo una partizione dell'intervallo $[0,t]$

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots\ldots < t_{n-1} < t_n = t$$

ed una scelta di punti s_i

$$t_i \leq s_i \leq t_{i-1}$$

Le corrispondenti somme di Riemann Stieltjes sono

$$RS_n = \sum_{i=1}^{n-1} W(s_i)(W(t_i) - W(t_{i-1}))$$

Si ha

$$W(s_i)(W(t_i) - W(t_{i-1})) =$$

$$= W(t_{i-1})(W(t_i) - W(t_{i-1})) + (W(s_i) - W(t_{i-1}))(W(t_i) - W(t_{i-1})) =$$

$$\frac{1}{2}W(t_{i-1})(W(t_i) - W(t_{i-1})) + \frac{1}{2}W(t_{i-1})(W(t_i) - W(t_{i-1})) +$$

$$+ (W(s_i) - W(t_{i-1}))(W(t_i) - W(t_{i-1})) =$$

$$\frac{1}{2}(W(t_i) + W(t_{i-1}))(W(t_i) - W(t_{i-1})) - \frac{1}{2}(W(t_i) - W(t_{i-1}))(W(t_i) - W(t_{i-1})) +$$

$$+ (W(s_i) - W(t_{i-1}))(W(t_i) - W(t_{i-1}))$$

Inoltre

$$(W(s_i) - W(t_{i-1}))(W(t_i) - W(t_{i-1})) =$$

$$= (W(s_i) - W(t_{i-1}))(W(t_i) - W(s_i)) + (W(s_i) - W(t_{i-1}))(W(s_i) - W(t_{i-1}))$$

per cui

$$W(s_i)(W(t_i) - W(t_{i-1})) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big((W^2(t_i) - W^2(t_{i-1})) - (W(t_i) - W(t_{i-1}))^2\Big) +$$

$$(W(s_i) - W(t_{i-1}))(W(t_i) - W(s_i)) + (W(s_i) - W(t_{i-1}))(W(s_i) - W(t_{i-1}))$$

Ne deduciamo che

$$
\begin{aligned}
RS_n = \sum_{i=1}^{n} W(s_i)(W(t_i) - W(t_{i-1})) = \\
\frac{1}{2}\left(W^2(t) - W^2(0)\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (W(t_i) - W(t_{i-1}))^2 + \\
+ \sum_{i=1}^{n} (W(s_i) - W(t_{i-1}))^2 + \\
+ \sum_{i=1}^{n} (W(s_i) - W(t_{i-1}))(W(t_i) - W(s_i))
\end{aligned}
$$

Se $s_i = (1-\theta)t_{i-1} + \theta t_i$ si ha

$$E\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(W(t_i) - W(t_{i-1})\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = \frac{1}{2}(t-0)$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(W(s_i) - W(t_{i-1})\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n}(s_i - t_{i-1}) = \theta(t-0)$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}(W(s_i) - W(t_{i-1}))(W(t_i) - W(s_i))\right) = 0$$

Si dimostra che

$$RS_n \to \frac{1}{2}\left(W^2(t) - W^2(t_0)\right) + \left(\theta - \frac{1}{2}\right)(t-0)$$

Il limite dipende dalla scelta di punti s_i attraverso θ.

Stratonovich propose di scegliere $\theta = \frac{1}{2}$: continua a valere la formula di integrazione per parti.

Itô propose di scegliere $\theta = 0$:

- non vale l'integrazione per parti
- ma la variabile aleatoria

$$X(t) = \int_0^t W\, dW$$

che si ottiene è non anticipativa.
cioè dipende solo dagli avvenimenti passati.

Con metodi simili si prova che

$$\sum_{i=1}^{n} (W(t_i) - W(t_{i-1}))^2 \longrightarrow (t - 0) = t$$

più precisamente

$$\sum_{i=1}^{n} (W(t_i) - W(t_{i-1}))^2$$

tende ad una variabile aleatoria di media t e di varianza 0.

Si esprime questo fatto dicendo che

$$\int_{t_0}^{t} (dW)^2 = \int_{t_0}^{t} dt$$

ed introducendo la regola formale

$$(dW)^2 = dt$$

Analogamente si prova che è ragionevole introdurre anche le seguenti regole formali

$$dt\,dW = dW\,dt = 0$$

Usando le precedenti informazioni possiamo farci un'idea su come si deriva la formula di Itô.

Si tratta essenzialmente di stabilire una formula di derivazione di funzione composta.

La Formula di Itô

Sia

X un processo stocastico tale che

$$dX = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t)$$

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Consideriamo

$$y(t) = g(t, X(t))$$

e studiamo il problema di derivare la funzione ottenuta

Itô ha dimostrato che

$$dy(t) = \left(g_t(t, X(t)) + a(t, X(t)) g_x(t, X(t)) + \frac{b^2(t, X(t))}{2} g_{xx}(t, X(t)) \right) dt + \\ + b(t, X(t)) g_x(t, X(t)) dW(t)$$

La formula si dimostra in forma integrale:

$$y(t) - y(t_0) = g(t, X(t)) - g(t_0, X(t_0)) = \\ = \int_{t_0}^{t} \left(g_t(t, X(t)) + a(t, X(t)) g_x(t, X(t)) + \frac{b^2(t, X(t))}{2} g_{xx}(t, X(t)) \right) dt + \\ + \int_{t_0}^{t} b(t, X(t)) g_x(t, X(t)) dW(t)$$

Si può ricavare formalmente usando la Formula di Taylor e le regole formali di moltiplicazione di dt e dW

Equazione di crescita per il prezzo di un bene

Il prezzo $S(t)$ di un bene si può descrivere mediante l'equazione

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

$S(t) = S(t, \omega)$ è un processo stocastico

Se consideriamo

$$g(t) = \ln(S(t))$$

usando la formula di Itô si ottiene

$$dg(t) = d\ln(S(t)) = \frac{dS(t)}{S(t)} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^2 S^2(t)}{S^2(t)}\right)dt = rdt - \frac{\sigma^2}{2}dt + \sigma dW(t)$$

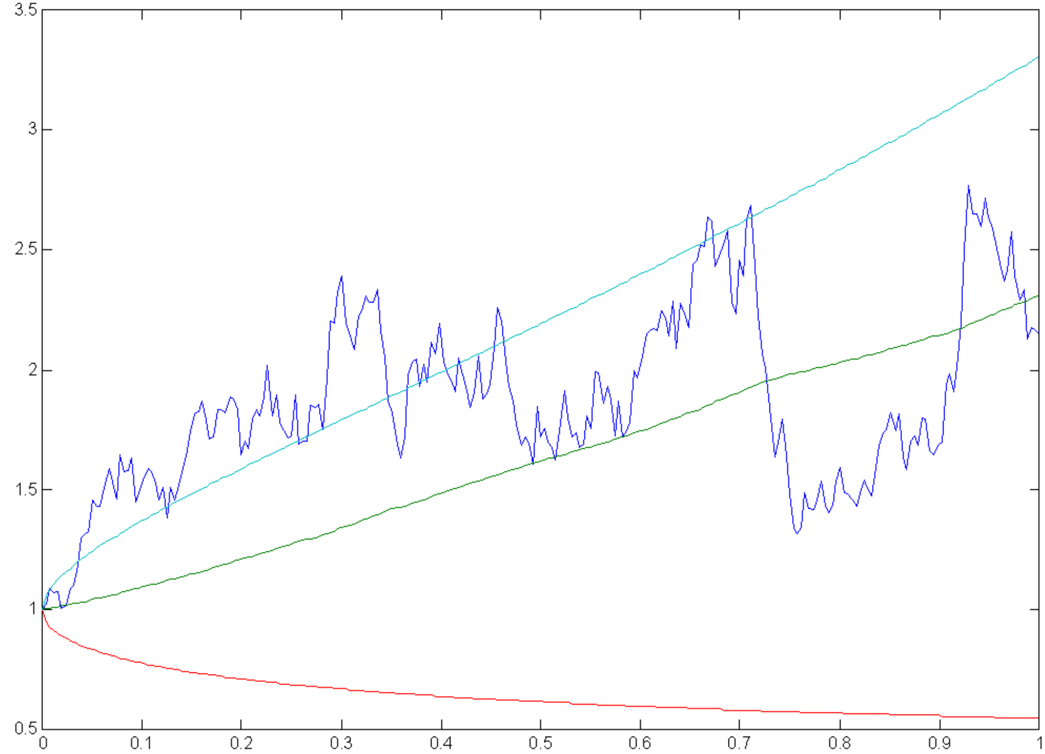
Si ha

$$g(t) - g(0) = \ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) = rt - \frac{t\sigma^2}{2} + \sigma W(t)$$

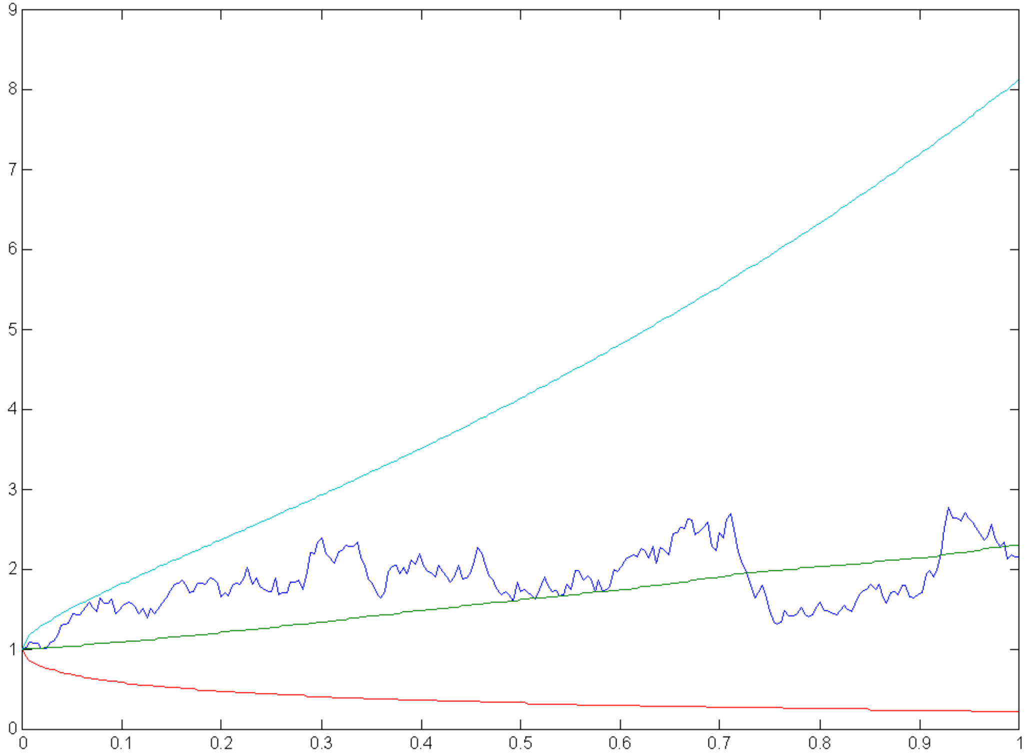
e di conseguenza

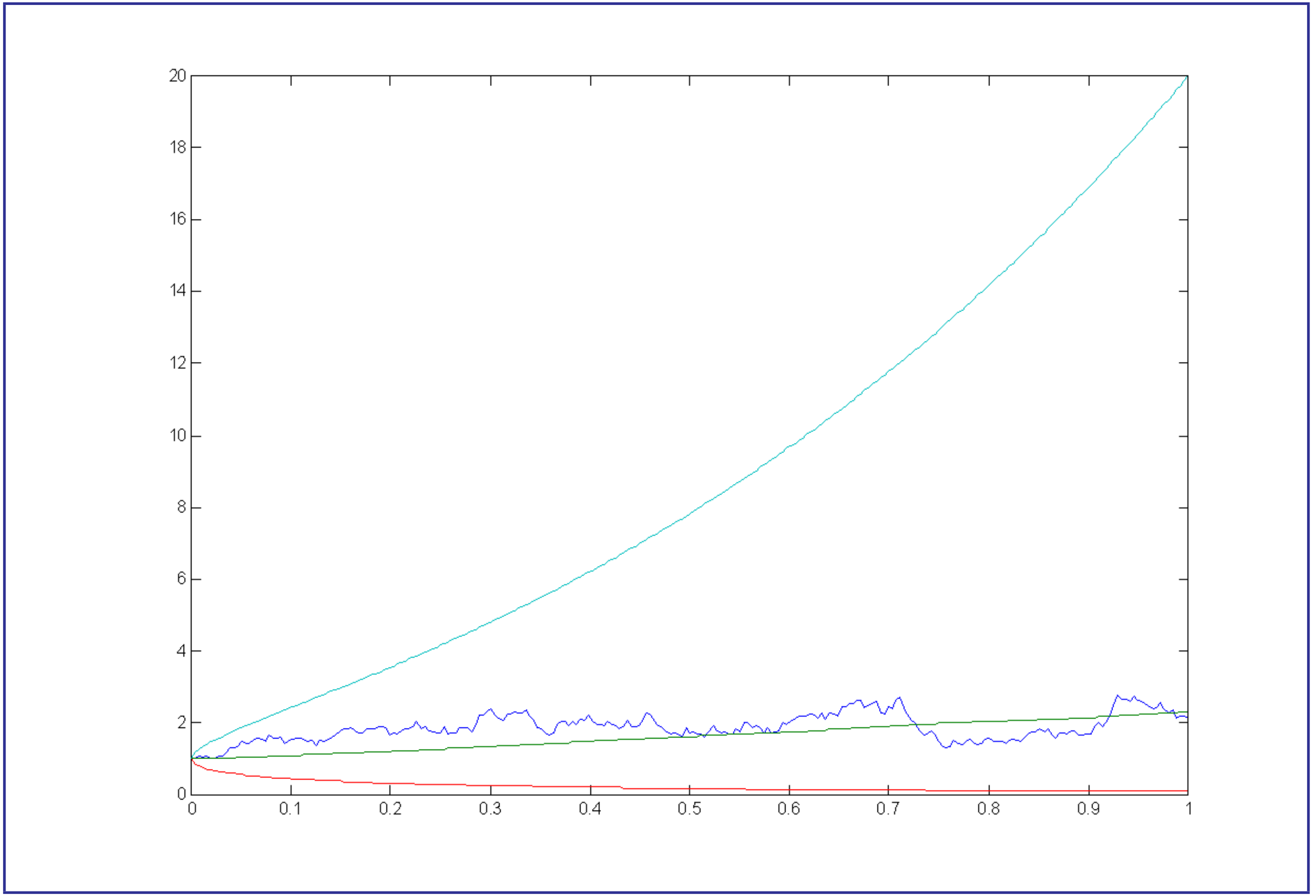
$$S(t) = S(0)e^{rt - \frac{t\sigma^2}{2} + \sigma W(t)}$$

Le figure che seguono riportano i grafici di una soluzione, il grafico della soluzione senza rumore e le bande di confidenza corrispondenti a σ, 2σ e 3σ.



3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

L’equazione di Black-Scholes

Sia

$$f(t, S(t))$$

il prezzo dell’opzione di vendita di un bene S e sia B un investimento privo di rischio con rendimento r;

consideriamo un portafoglio

$$I = -f + \alpha S + \beta B$$

La variazione di I può essere calcolata mediante la

$$dI = -df + \alpha dS + \beta dB$$

df può essere calcolato mediante la formula di Itô.

per cui

$$dI = (-f_t + \mu S f_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f_{SS})dt + f_S \sigma dW + \alpha(\mu S dt + \sigma S dW) + \beta r B =$$

$$= \left((-f_t + \mu S f_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f_{SS}) + (\alpha \mu S + \beta r B) \right) dt + (-f_S + \alpha)\sigma S dW$$

Per eliminare la componente di incertezza occorre imporre che

$$\alpha = f_s$$

ed in tal caso

$$\begin{aligned} dI = \Big(& (-f_t + \mu S f_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f_{SS}) + \\ & + (f_S \mu S + \beta r B)\Big) dt + (-f_S + f_S)\sigma S dW = \\ & = \Big((-f_t + \mu S f_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f_{SS}) + \\ & + (f_S \mu S + \beta r B)\Big) dt = \end{aligned}$$

In condizioni di non arbitraggio si ha

$$dI = rIdt$$

per cui

$$dI = r(-f + \alpha S + \beta B)dt = r(-f + f_S S + \beta B)dt$$

e

$$\begin{aligned} r(-f + \alpha S + \beta B)dt = r(-f + f_S S + \beta B)dt = dI = \\ = rI = r(f + \alpha S + \beta B)dt = r(f - f_S S - \beta B)dt \end{aligned}$$

Si ottiene infine che

$$f_t + rsf_s + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f_{SS} = rf \qquad t < T$$

con la condizione

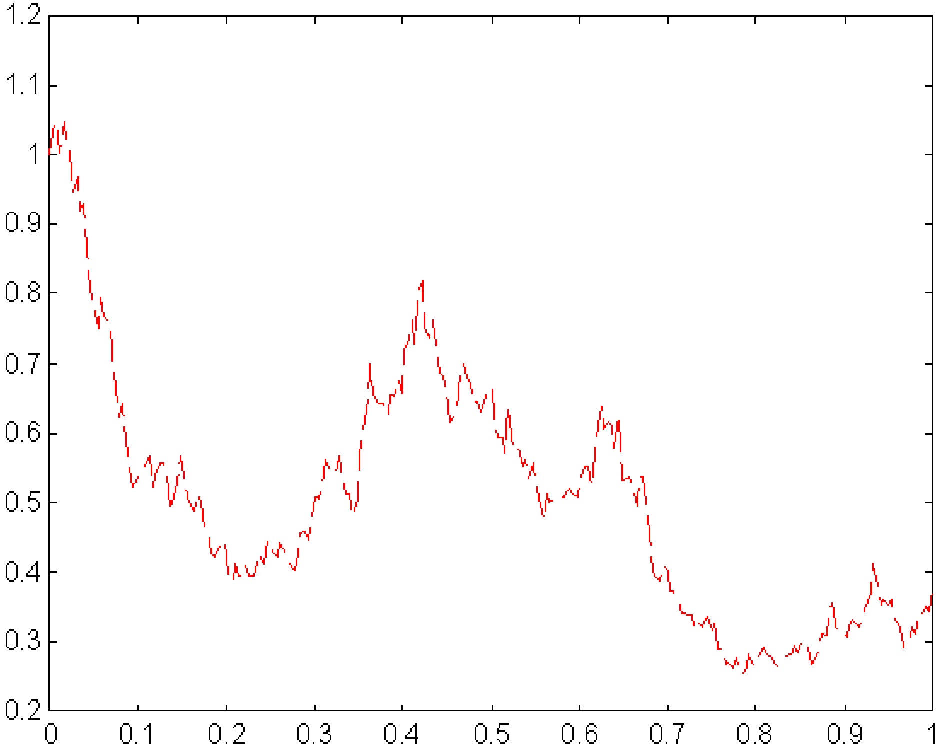
$$f(s,T) = \max(K - s, 0)$$

Il seguente è un programma scritto in Matlab che integra l'equazione stocastica

$$\begin{cases} dX = \lambda * X dt + \sigma * (X) dW \\ X(0) = Xzero. \end{cases}$$

```
clf
randn('state',1)
T = 1; N = 2^8; Delta = T/N;
lambda = 0.05; sigma = 0.8; Xzero = 1;
Xem = zeros(1,N+1);
Xem(1) = Xzero;
for j = 1:N
Winc = sqrt(Delta)*randn;
Xem(j+1) = Xem(j) + Delta*lambda*Xem(j) + sig-
ma*Xem(j)*Winc;
end
plot([0:Delta:T],Xem,'r--')
```

Questo è il grafico che si ottiene



Riferimenti Bibliografici

- Kyoung-Sook Moon - Anders Szepessy - Ràul Tempone - Georgios Zouraris *Stochastic and partial Differential Equations with Adapted Numerics* Download
- Tomas Bjork *Stochastic Calculus* Download
- L. Smith *Introduction to Probability and Statistics* Download
- John F. Price *Optional Mathematics Is Not Optional* Download

Per altro materiale

- Vai a home.zcu.cz/˜honik/SDE/
- Vai a www-personal.umich.edu/˜rwallace/econ605.html