

## STRUTTURA E CINEMATICA DELLE MACCHINE

### 1-1 Macchine e meccanismi

Si indica con il termine *macchina* (*machine*) una costruzione dell'uomo il cui stato evolve nel tempo, ideata per il raggiungimento di un prefissato obiettivo. In senso più ristretto con il termine *macchina* si farà riferimento ai sistemi nei quali: a) il movimento relativo fra le parti componenti la macchina sia significativo e, b) avvengano scambi di energia meccanica (lavoro) fra le parti e fra queste e l'esterno.

Le macchine vengono spesso classificate in base alle loro funzioni: una convenzione tipica distingue fra: *macchine motrici a fluido* la cui funzione è convertire l'energia di un fluido in energia meccanica (ne sono esempi i motori a combustione interna, le turbine a gas, le turbine a vapore); *macchine operatrici a fluido* la cui funzione, duale di quella delle macchine motrici, è convertire l'energia meccanica in energia di un fluido (ne sono esempi le pompe, che forniscono energia ad un liquido, e i compressori, che forniscono energia ad un gas); *macchine elettriche* la cui funzione è convertire l'energia elettrica in energia meccanica (in tal caso sono dette *motori elettrici*; ne sono esempi i motori asincroni, i motori senza spazzole, i motori a passo) o, reciprocamente, convertire l'energia meccanica in energia elettrica (in questo caso sono dette *generatori*; ne sono esempi gli alternatori, le dinamo); *macchine utensili* che eseguono lavorazioni meccaniche trasformando la forma di corpi solidi, da materiale grezzo a pezzi finiti (ne sono esempi i torni, le fresatrici, le trapanatrici, le rettificatrici, le alesatrici); *macchine in genere* che comprendono tutte le macchine non classificabili nelle precedenti (ne sono esempi le macchine da trasporto, quelle tessili, agricole, confezionatrici, scavatrici e per movimentazione terra, per la stampa, i robot).

Ogni macchina è un sistema costituito da più componenti, ciascuno definito convenzionalmente in base al livello di aggregazione al quale lo si vuol studiare. Al livello di aggregazione tipico della Meccanica delle macchine i componenti delle macchine possono essere schematizzati come:

- *meccanismi* (*mechanisms*), ossia aggregati di parti prevalentemente solide caratterizzati funzionalmente, quali: ingranaggi, camme, freni, giunti, innesti;
- *motori* (*motors, drivers*) e *generatori*, ossia componenti in cui lo scambio energetico prevalente non è puramente meccanico, quali motori termici, elettrici, oleoidraulici e pneumatici, pompe, dinamo;
- *componenti elettrici e di regolazione*, ossia componenti di misura, di elaborazione di segnali e di generazione di comandi.

I meccanismi sono dunque insiemi di corpi opportunamente vincolati che realizzano una specifica funzione all'interno di una macchina. Le loro realizzazioni sono le più diverse, ma se ne può fare una classificazione per funzioni distinguendo:

- *meccanismi che realizzano un rapporto di trasmissione costante* nei quali il rapporto fra le velocità di uscita e di ingresso del meccanismo è costante;
- *variatori di velocità*, nei quali si può comandare in modo continuo il valore del rapporto fra le velocità di uscita e di ingresso del meccanismo;
- *giunti e innesti* che collegano due parti di una macchina in modo permanente o a comando.
- *freni* che diminuiscono la velocità o mantengono ferma la macchina;
- *meccanismi per moto vario*, che consentono di realizzare leggi di moto prestabilite: ne sono esempi le *camme* e i *meccanismi articolati*.

I meccanismi dei primi quattro gruppi (a rapporto di trasmissione costante, variatori di velocità, giunti e innesti, freni) vengono anche detti *organi di trasmissione*.

Le macchine possono funzionare con il diretto e continuo controllo da parte di un operatore (per esempio le automobili o le scavatrici) o in modo autonomo: in questo secondo caso si parla di *macchine automatiche*.

## 1-2 Corpi e vincoli

Una macchina e' costituita da *corpi (bodies)*, detti anche *membri (links)* solidi o fluidi. I corpi solidi possono essere distinti in *rigidi (rigid)* e *deformabili (flexible)*: in realtà tutti i corpi reali sono deformabili, ma in molti casi la loro deformazione e' irrilevante ai fini del movimento della macchina e li si può quindi considerare approssimativamente come corpi rigidi. I corpi deformabili possono essere *elastici, anelastici, flessibili*. I corpi elastici (ad esempio le molle) ammettono uno stato naturale prefissato, in assenza di forze esterne, a partire dal quale il solido può deformarsi sotto l'azione di forze, indipendentemente dalle modalità di applicazione e rimozione delle stesse: si realizza cioè una corrispondenza biunivoca fra forze applicate e deformazioni del corpo. I corpi flessibili (si pensi alle funi o alle cinghie) ammettono l'esistenza di un asse (o di un piano) che può essere disposto secondo una linea (o una superficie) qualsiasi senza che sia richiesto lavoro. I corpi fluidi possono essere liquidi (poco comprimibili o idealmente incomprimibili) e gassosi (comprimibili).

Nelle macchine i corpi sono collegati fra di loro da vincoli (*constraints*), ossia sono *vincolati*. Esiste un elevatissimo numero di modi diversi in cui le parti di una macchina possono essere vincolate fra di loro (si pensi ad esempio ai diversi tipi di cuscinetti a rotolamento disponibili: radiali a sfere, obliqui a sfere, a rulli cilindrici, a rullini, orientabili a rulli, a rulli conici, assiali a sfere, assiali a rulli cilindrici, assiali a rullini, assiali orientabili a rulli, combinati, ecc.). E' merito del Reuleaux aver individuato l'importanza degli elementi geometrici comuni a vari tipi di vincolo, caratterizzando un vincolo attraverso il movimento ideale che il vincolo stesso impone al movimento relativo fra due corpi che esso collega, indipendentemente dalla realizzazione effettiva. Il movimento viene idealizzato trascurando "piccoli" effetti dovuti a imperfetta realizzazione del vincolo, quali i giochi e le deformazioni dovute alle forze agenti sui corpi vincolati: si considera cioè il movimento relativo fra i corpi, ammettendo che le superfici di contatto con le quali il vincolo è realizzato siano indeformabili, perfettamente lavorate e sempre in contatto, cioè prive di *gioco (backlash o clearance)*. In tali ipotesi il vincolo fra i corpi viene detto *coppia cinematica (kinematic pair)*.

La classificazione tradizionale delle coppie cinematiche può essere fatta per enumerazione.

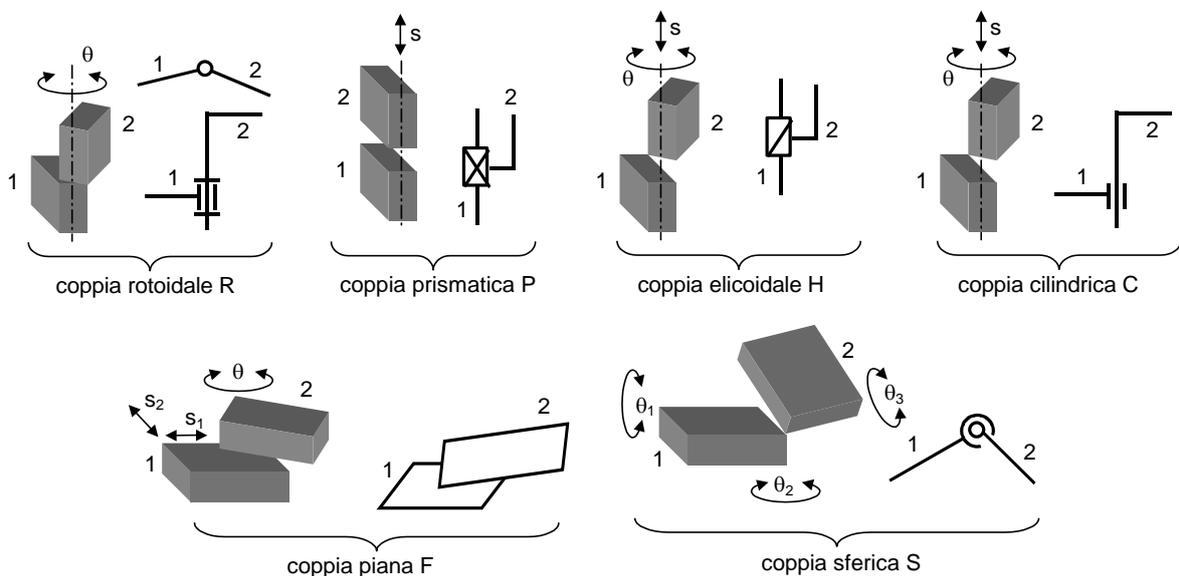


Fig. 1.1 Spostamenti e simboli delle coppie inferiori

*Coppie inferiori (lower pairs)*, Fig. 1.1: sono costituite dai seguenti vincoli fra corpi rigidi:

- *coppia rotoidale (revolute pair)*: consente la rotazione relativa fra due corpi attorno ad un asse comune, è indicata con la lettera R: lascia 1 grado di libertà (1 rotazione  $\theta$ ) al movimento relativo (sopprime 5 gradi di libertà);

- *coppia prismatica (prismatic pair)*: consente la traslazione relativa fra due corpi lungo un asse comune, è indicata con la lettera P: lascia 1 grado di libertà (1 traslazione  $s$ ) al movimento relativo (sopprime 5 gradi di libertà);
- *coppia elicoidale o vite (helical pair o skew)*: consente la traslazione e la rotazione relative, sincronizzate fra due corpi lungo un asse comune, è indicata con la lettera H: lascia 1 grado di libertà (1 traslazione  $s$  ed 1 rotazione  $\theta$  sincronizzate) al movimento relativo (sopprime 5 gradi di libertà); la coppia impone la relazione lineare fra rotazione e traslazione  $s = \theta p / 2\pi$ , dove  $p$  è il *passo (pitch)* della coppia e  $\theta$  va espresso in radianti;
- *coppia cilindrica (cylindrical pair)*: consente la traslazione e la rotazione relative fra due corpi lungo un asse comune, è indicata con la lettera C: lascia 2 gradi di libertà (1 traslazione  $s$  ed 1 rotazione  $\theta$ ) al movimento relativo (sopprime 4 gradi di libertà);
- *coppia piana (planar o flat pair)*: consente il movimento fra due corpi secondo un piano comune, è indicata con la lettera F: lascia 3 gradi di libertà (2 traslazioni  $s_1$  ed  $s_2$  ed una rotazione  $\theta$  ortogonale al piano individuato dalle due traslazioni) al movimento relativo (sopprime 3 gradi di libertà);
- *coppia sferica (spherical pair)*: consente il movimento fra due corpi mantenendo un punto in comune, è indicata con la lettera S: lascia 3 gradi di libertà (3 rotazioni attorno al punto centro della coppia) al movimento relativo (sopprime 3 gradi di libertà).

*Coppie superiori (higher pairs)* sono tutte le coppie cinematiche ad esclusione delle precedenti; ad esempio (Fig. 1.2):

- *coppia camma piana (planar cam)*: consente il movimento fra due corpi con 1 rotazione attorno ad un asse ed 1 traslazione in un piano ortogonale al precedente: lascia 2 gradi di libertà (1 rotazione ed 1 traslazione ortogonale alla traslazione) al movimento relativo (sopprime 4 gradi di libertà);
- *coppia cilindro-piano (cylinder-plane)*: consente il movimento fra due corpi con 2 traslazioni lungo assi ortogonali, 1 rotazione lungo uno di tali assi, 1 rotazione attorno ad un asse ortogonale al piano individuato dagli assi di traslazione: lascia 4 gradi di libertà (2 rotazioni ed 2 traslazioni) al movimento relativo (sopprime 2 gradi di libertà);
- *coppia sfera-piano (cylinder-plane)*: consente il movimento fra due corpi con 2 traslazioni lungo assi ortogonali e 3 rotazioni: lascia 5 gradi di libertà (3 rotazioni ed 2 traslazioni) al movimento relativo (sopprime 1 grado di libertà);
- tutti i vincoli con corpi flessibili: catene, cinghie e funi (*chains, belts, ropes*).

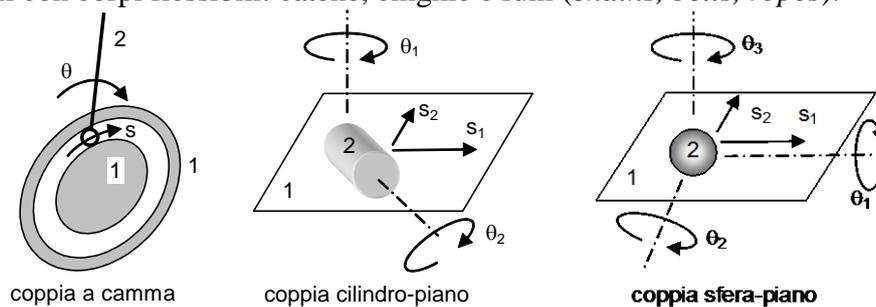


Fig. 1.2 Spostamenti in coppie superiori

La definizione di coppia cinematica mette in evidenza l'aspetto del movimento relativo fra i corpi, piuttosto che quello relativo alla forma effettiva delle parti che realizzano il vincolo (dette *superfici coniugate*) e prescinde quindi dagli aspetti costruttivi dell'effettiva realizzazione. Le parti della coppia potranno toccarsi realizzando, a seconda dei casi, contatti fra superfici, contatti lineari o contatti puntiformi. Il tipo di contatto avrà influenza sulla trasmissione delle forze, l'usura, l'ingombro, i costi di produzione, le modalità di lubrificazione delle parti, ma non sul movimento significativo. Tutte le coppie inferiori possono essere realizzate con contatti fra superfici identiche e combacianti (Fig. 1.3).

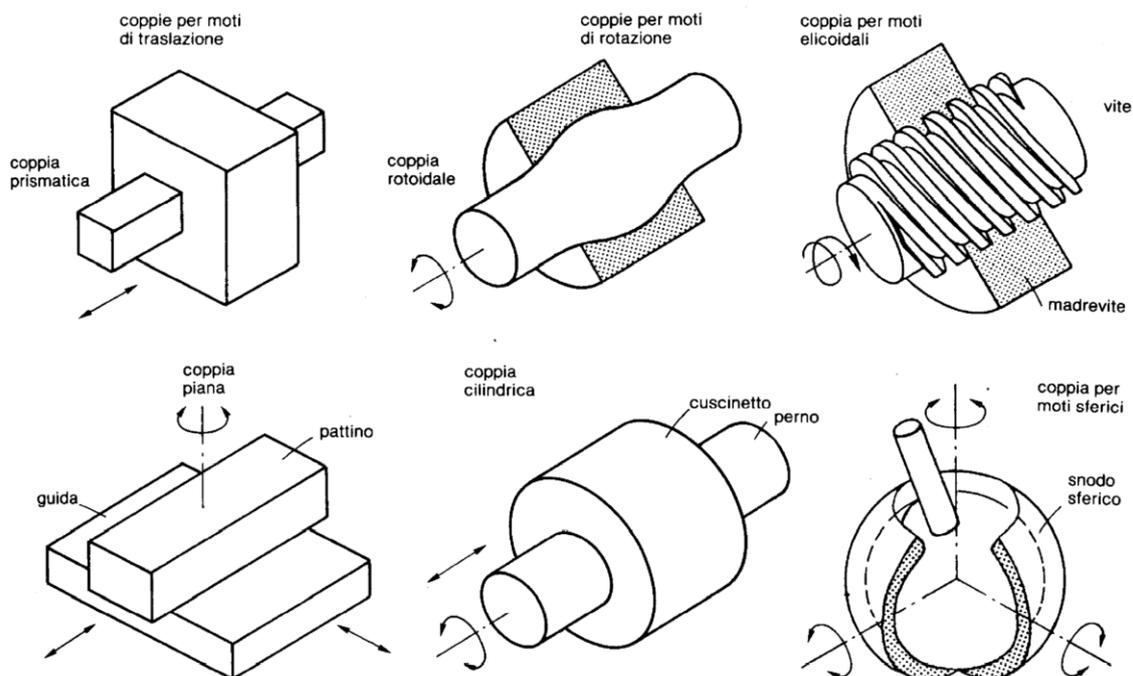


Fig. 1.3 Possibili realizzazioni delle coppie inferiori

La Fig. 1.4 mostra due diverse realizzazioni della coppia rotoidale che collega la puleggia di una carrucola ad una staffa di supporto (nella parte superiore i pezzi sono sezionati, nella parte inferiore sono in vista). Nel disegno a sinistra il collegamento fra il perno della carrucola e la puleggia è realizzato con un cuscinetto radente: le superfici laterali del perno (costituito da un pezzo cilindrico pieno) e della puleggia (forata in modo da realizzare un cilindro cavo) sono identiche (a meno delle tolleranze) e a contatto. Le tolleranze sono scelte in modo che fra i due elementi esista un piccolo gioco in cui, attraverso un foro obliquo, può essere introdotto il lubrificante. Nella soluzione di destra la coppia è realizzata con la mediazione di un cuscinetto a sfere (due corone di sfere) il cui foro interno è a contatto forzato con l'albero, mentre l'anello esterno è a contatto forzato con il foro della puleggia. I forzamenti dei contatti evitano strisciamenti indesiderati fra le parti collegate, lasciando possibilità di movimento solo attraverso le sfere.

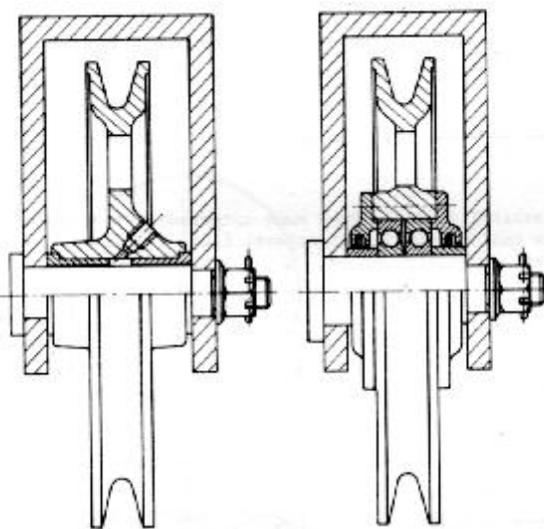


Fig. 1.4 Realizzazioni alternative delle coppie rotoidale

### 1-3 Catene cinematiche

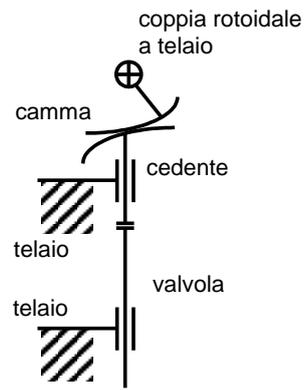
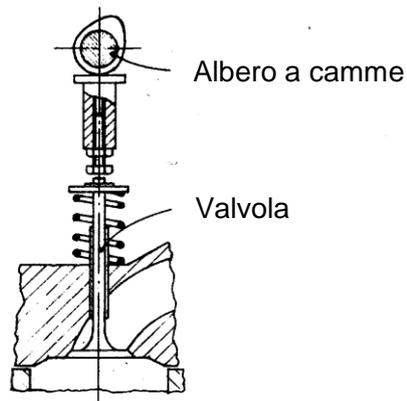
Si chiama *catena cinematica* (*kinematic chain*) un insieme di corpi collegati fra loro con coppie cinematiche. La catena è detta *chiusa* (*closed chain*) se seguendo la catena si può instaurare almeno un percorso chiuso, *aperta* (*open chain*) in caso contrario. I corpi nella catena possono presentare un numero qualsiasi di coppie: se un corpo porta 2 sole coppie è detto *binario* (*binary link*), se ne porta 3 è detto *ternario* (*ternary link*), ecc. Lo *schema cinematico* (*kinematic sketch*) di una catena è ottenuto tracciando segmenti, in genere rettilinei, che congiungono le coppie appartenenti ad uno stesso membro. Nel caso di meccanismi con corpi rigidi i segmenti sono indeformabili. Lo schema cinematico riporta esattamente l'informazione essenziale (dal punto di vista del movimento) della catena cinematica, sopprimendo la rappresentazione di ogni informazione superflua alla definizione del movimento che la catena può effettuare.

La Fig. 1.5 riporta esempi di catene cinematiche chiuse e di loro schemi. In ogni caso almeno un corpo di una catena cinematica è ritenuto fisso (per esempio è collegato alla terra) e costituisce il *telaio* (*frame*) della macchina.

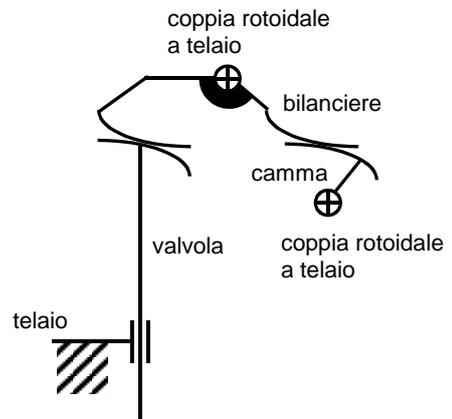
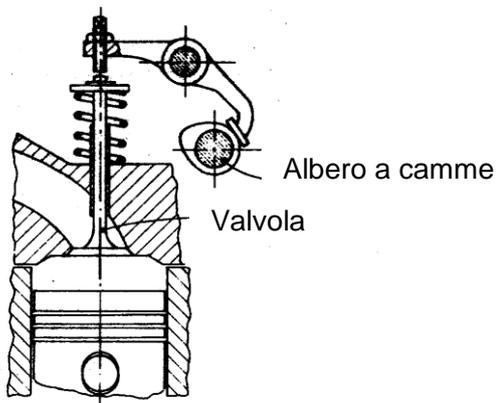
Esempi interessanti di catene cinematiche aperte si trovano nelle architetture dei robot industriali (*industrial robot*). Scopo di un robot industriale è far assumere ad uno dei suoi corpi, detto *terminale* (*end-effector*), un insieme continuo di posizioni definito da un programma memorizzato nel sistema di controllo del robot (un robot è quindi una macchina *programmabile*; dato che il programma che controlla il movimento del robot può essere modificato, con i robot si realizzano sistemi di *automazione flessibile*). Nel caso più generale il terminale del robot deve poter assumere una generica posizione nello spazio e quindi deve avere 6 gradi di libertà. Sul terminale può poi essere applicato un ulteriore sistema meccanico (p. es. un utensile o una pinza) provvisto di altri gradi di libertà. Molto spesso i 6 gradi di libertà del terminale sono ottenuti collegando il terminale al telaio attraverso una catena cinematica aperta ottenuta disponendo in serie 2 catene aperte: la prima, a 3 gradi di libertà, detta *braccio* (*arm*), ha il compito di posizionare nello spazio un punto; la seconda, a 3 gradi di libertà, detta *polso* (*wrist*), ha il compito di orientare (far ruotare) nello spazio il terminale.

Si prende ora in considerazione la catena cinematica aperta del braccio: questa consentirà di muovere nello spazio un punto del corpo di estremità (3 gradi di libertà) controllandone il movimento mediante 3 motori applicati a 3 coppie cinematiche P o R.

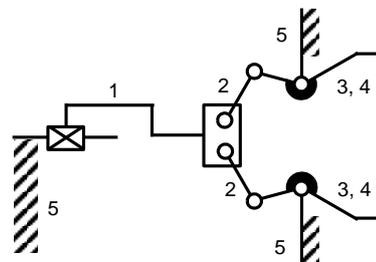
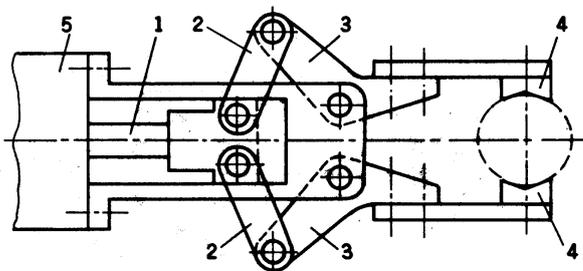
Le cinque architetture tipiche dei bracci dei robot industriali sono schematizzate in Fig. 1.6. Le corrispondenti catene cinematiche sono riportate in Fig. 1.7.



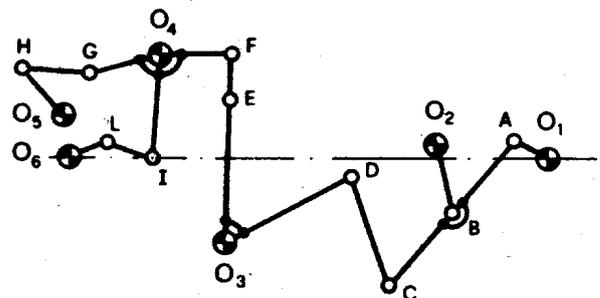
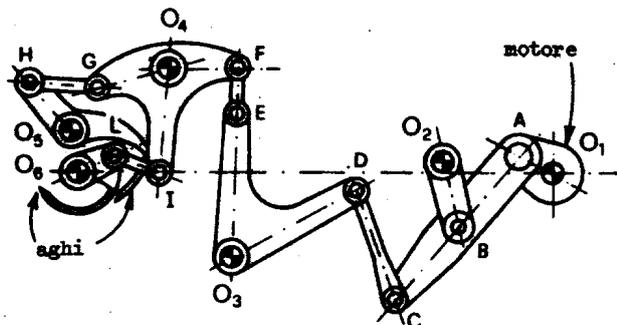
Distribuzione di motore a combustione interna con albero a camme in testa senza bilanciere



Distribuzione di motore a combustione interna con albero a camme in testa e bilanciere



Pinza per robot



Cucitrice

Fig. 1.5 Esempi di meccanismi e catene cinematiche

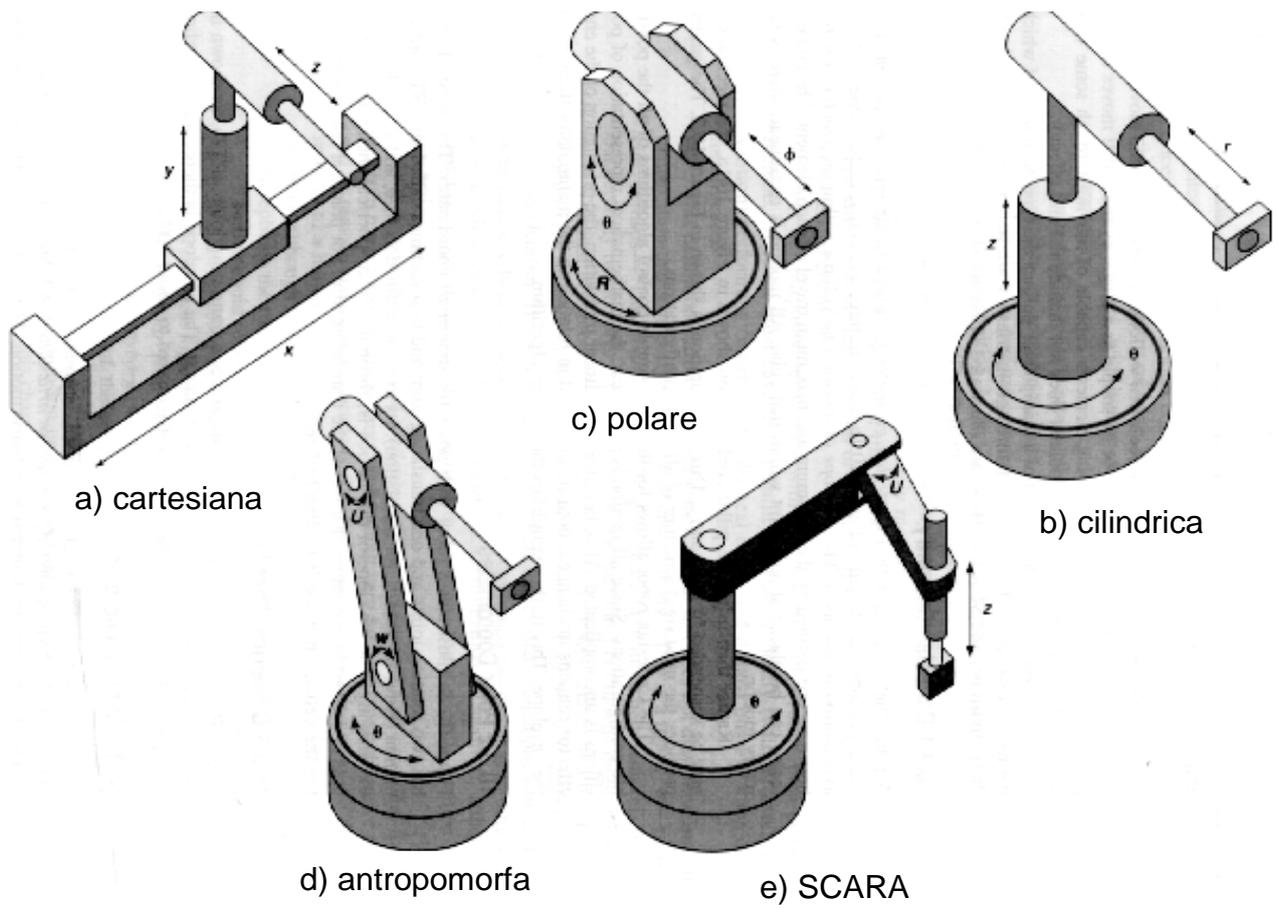


Fig. 1.6 Architetture di robot industriali

Le architetture sono dette: a) cartesiana, b) cilindrica, c) polare, d) antropomorfa, e) SCARA (*Selective Compliance Assembly Robotic Arm*).

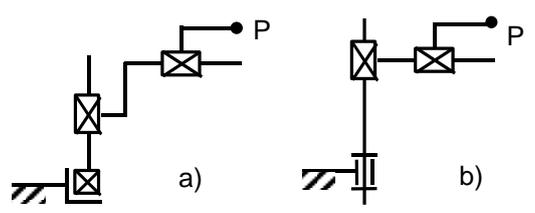


Fig. 1.7 Catene cinematiche di robot industriali: a) cartesiana, b) cilindrica

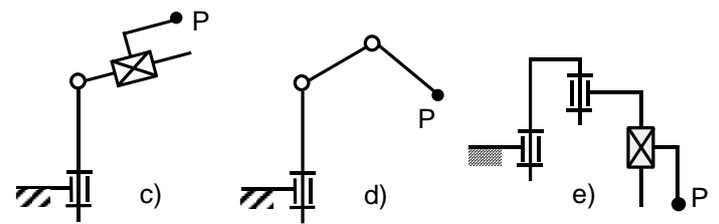


Fig. 1.8 Catene cinematiche di robot industriali: c) polare, d) antropomorfa, e) SCARA

In linea di principio il movimento della catena di un robot e il conseguente posizionamento di un punto del corpo di estremità possono essere controllati collegando un motore ai corpi di ciascuna delle 3 coppie cinematiche R o P della catena. In realtà per vari motivi (riduzione dell'inerzia e del peso, necessità di inserire riduttori di velocità tra il motore e la coppia, opportunità di avere strutture reali poco deformabili anche in presenza di forze elevate, convenienza per gli operatori che azionano il robot di ottenere buona visibilità in particolari applicazioni) può essere opportuno trasferire tutti o parte degli azionamenti sul telaio. In questo caso, alla catena cinematica aperta base si aggiungono altri corpi ai quali connettere i motori. Per esempio, per far ruotare due corpi connessi da una coppia rotoidale si può disporre un motore rotativo direttamente sulla coppia, con lo statore collegato ad uno dei corpi ed il rotore all'altro (Fig. 1.9-a), ma si può anche variare la distanza fra due punti dei corpi collegando, a ciascuno di essi, tramite due coppie rotoidali un motore lineare (Fig. 1.9-b) oppure un motore rotativo in serie con una coppia elicoidale (Fig. 1.9-c).

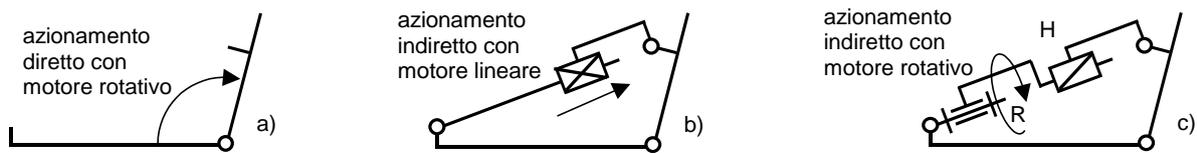


Fig. 1.9 Azionamento diretto e indiretto di una coppia di corpi con vincolo rotoidale

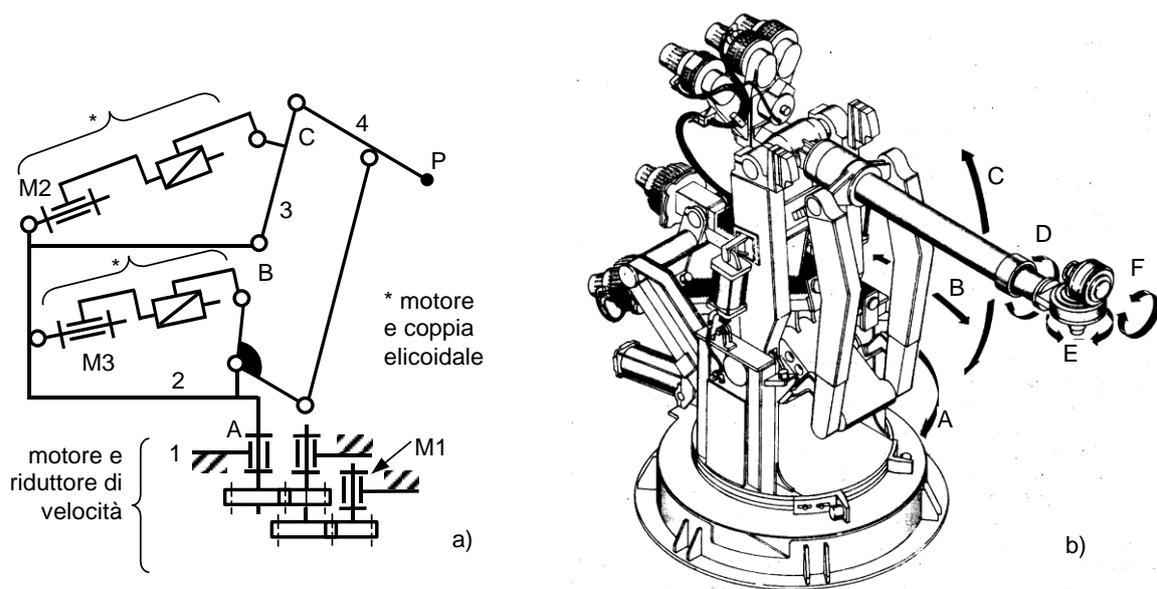


Fig. 1.10 Struttura completa di un robot industriale

La Fig. 1.10-a riporta la catena cinematica completa di un robot industriale. In essa si può riconoscere una catena costituita dalla sequenza di corpi e coppie 1, A, 2, B, 3, C, 4, corrispondente alla struttura di un robot antropomorfo (Fig. 1.7-d): a tale struttura sono state aggiunte altre catene di corpi e coppie per collocare i motori M1, M2, M3 del robot in modo tecnicamente più conveniente. La catena che a partire dal motore M1 aziona la coppia A è realizzata con ingranaggi riduttori della velocità, in modo da adeguare la velocità del motore (spesso elevata) a quella richiesta per la coppia A (in genere modesta). La catena che dal motore M2 aziona la coppia B è realizzata con tre coppie rotoidali e una elicoidale, come in Fig. 1.9-c, per ridurre fortemente la velocità di rotazione del motore attraverso la coppia elicoidale. In modo analogo funziona la doppia catena che muove la coppia C. La catena aperta originale si trasforma in un certo numero di catene cinematiche chiuse. La Fig. 1.10-b riporta una realizzazione industriale dello stesso robot, comprensiva del polso realizzato con tre coppie rotoidali (D, E, F).

## 1-4 Movimento piano

Molto spesso i meccanismi costituenti una macchina sono realizzati in modo che tutti i corpi muovano in un piano. In questo caso i singoli corpi (che sono per definizione vincolati a muovere nel piano) hanno 3 gradi di libertà ciascuno. Le coppie rigide più comuni che ammettono movimento piano sono la prismatica (che lascia un grado di libertà di traslazione e quindi nel piano ne toglie 2) e la rotoidale (che lascia un grado di libertà di rotazione e quindi nel piano ne toglie 2). Altre coppie, come quelle a camma, lasciano due gradi di libertà di rotazione-traslazione e quindi nel piano ne tolgono 1). Se un meccanismo ha  $m$  corpi in movimento (oltre al telaio fisso),  $c_1$  coppie inferiori (R o P) e  $c_2$  coppie che tolgono un grado di libertà, il numero di gradi di libertà del meccanismo è dato dall'equazione di mobilità:

$$n = 3 \cdot m - 2 \cdot c_1 - c_2 \quad (1.1)$$

I sistemi con  $n > 0$  sono detti *labili*, o semplicemente *meccanismi*, quelli con  $n = 0$  sono detti *isostatici*, quelli con  $n < 0$  sono detti *iperstatici*. I sistemi isostatici e iperstatici sono anche detti *strutture*.

La terza e la quarta catena di Fig. 1.5 sono piane, mentre le altre due e tutte quelle di Fig. 1.8 non lo sono. Applicando la (1.1) alla terza catena (pinza di robot) si ha  $m=5$ ,  $c_1=7$  (sei R e una P) per cui  $n=1$  grado di libertà: azionando con un motore la traslazione del corpo 1 si ottiene il movimento di apertura e chiusura delle due dita della pinza. Applicando la (1.1) alle quarta catena (cucitrice) si ha  $m=11$ ,  $c_1=16$  (tutte R) per cui  $n=1$  grado di libertà: azionando con un motore la rotazione del corpo  $AO_1$  si ottiene il movimento sincronizzato dei due aghi della cucitrice collegati ai corpi  $LO_6$  e  $HO_5$ .

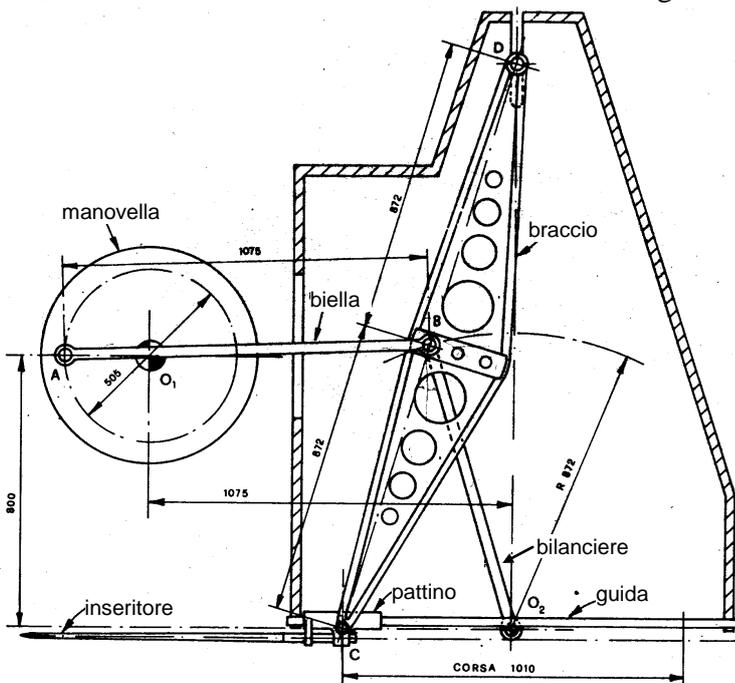


Fig. 1.11 Meccanismo di una cucitrice

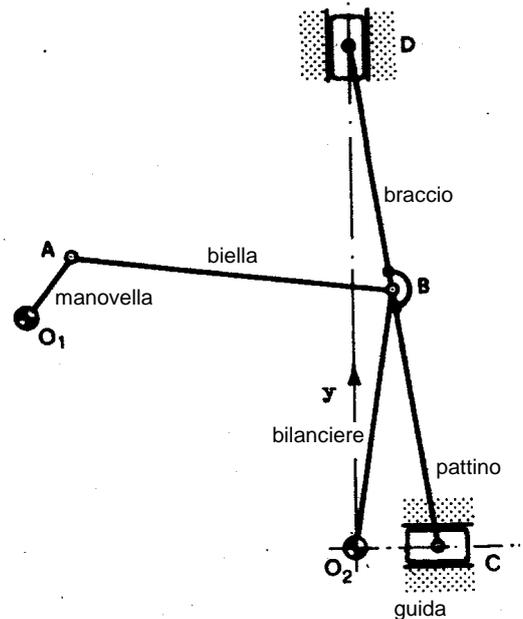


Fig. 1.12 Catena cinematica del meccanismo

Dato che l'equazione di mobilità "conta" semplicemente il numero di corpi e di coppie e non tiene in alcun conto la geometria della catena cinematica, è possibile che cada in difetto. Un primo ovvio caso in cui ciò avviene si ha quando la catena presenta parti labili e parti iperstatiche. Un secondo caso si verifica quando la geometria del meccanismo è tale da diminuire i vincoli effettivi imposti dalle coppie. Per esempio la catena di Fig. 1.12 ha  $m=6$ ,  $c_1=9$  (sette R e due P: le R sono 7 e non 6 come potrebbe sembrare, in quanto quella nel punto B collega 3 corpi e va dunque contata due volte) e l'equazione di mobilità indica  $n=0$ . In realtà, se le dimensioni dei corpi sono tali che  $BO_2=BC=BD$ , il meccanismo presenta una particolare simmetria per cui ha un grado di libertà.

## 1-5 Disegno di meccanismi e schemi cinematici

Gli schemi cinematici discussi in precedenza sono utili per rappresentare in modo semplice ed intuitivo una parte minima di tutta l'informazione necessaria per descrivere completamente una macchina. Sebbene l'informazione sia estremamente ridotta rispetto a quella necessaria per definire completamente tutte le parti, essa si rivela sufficiente per analizzare (e in gran parte progettare) il movimento del meccanismo, nonché per determinare una parte considerevole delle forze in gioco. Si consideri ad esempio il frantoio per minerali di Fig. 1.13. In Fig.1.13-a è riportata un disegno tridimensionale (parzialmente sezionato) del frantoio, i cui elementi principali sono facilmente riconoscibili: una mascella fissa e una mascella mobile fra le quali il minerale viene frantumato; un albero cilindrico, a sezione variabile, che aziona la mascella mobile; i cuscinetti a rulli che sostengono l'albero sul telaio della macchina e la mascella mobile sull'albero; due volani alle estremità dell'albero, uno dei quali scanalato per ricevere le cinghie che collegano l'albero al motore che aziona la macchina, fornendole energia. L'asse della parte di albero a cui si appoggia la mascella mobile è eccentrico (ossia non è coassiale) all'asse della parte dell'albero che si appoggia al telaio.

La Fig. 1.13-b riporta un disegno semplificato di una possibile realizzazione della macchina. Sebbene l'informazione tecnica non sia affatto completa (mancano per esempio tutte le dimensioni geometriche) ci sono comunque molti particolari non essenziali per comprendere il movimento del meccanismo di cui la mascella fa parte. Una notevole semplificazione è possibile come segue:

- la mascella mobile è costituita da più corpi collegati fra loro: un corpo principale, due piastre disposte sulla superficie di lavoro che possono essere realizzate con materiale antiusura più costoso (dato che lo schiacciamento e lo sfregamento del minerale provocheranno usura rilevante delle superfici a contatto con esse), che sono collegate al corpo principale mediante tiranti tenuti da bulloni e che possono quindi essere sostituite rapidamente quando usurate; la mascella è poi collegata ad un cuscinetto a rotolamento (in alto nel disegno) attraverso un dispositivo elastico di serraggio con vite. Pertanto in uno schema cinematico tutto questo insieme di corpi può essere considerato come un unico corpo rigido;
- l'albero di azionamento è un corpo rigido appoggiato tanto alla mascella che al telaio;
- un ulteriore corpo rigido (farfalla) è interposto fra la mascella e il telaio;
- i cuscinetti a rotolamento fra mascella e albero e fra albero e telaio possono essere schematizzati con due coppie rotoidali;
- i vincoli fra mascella e farfalla e fra farfalla e telaio sono costituiti da parti di superfici cilindriche che possono essere schematizzati con due altre coppie rotoidali; la particolare realizzazione è possibile in quanto le rotazioni relative fra i corpi accoppiati non sono complete, ed è opportuna in quanto, in caso di sovraccarico, la farfalla è l'elemento "debole" del meccanismo che si rompe e può essere sostituito rapidamente; la forza necessaria per tenere il vincolo sempre "chiuso" è assicurata da un tirante azionato da una molla (in basso a destra).

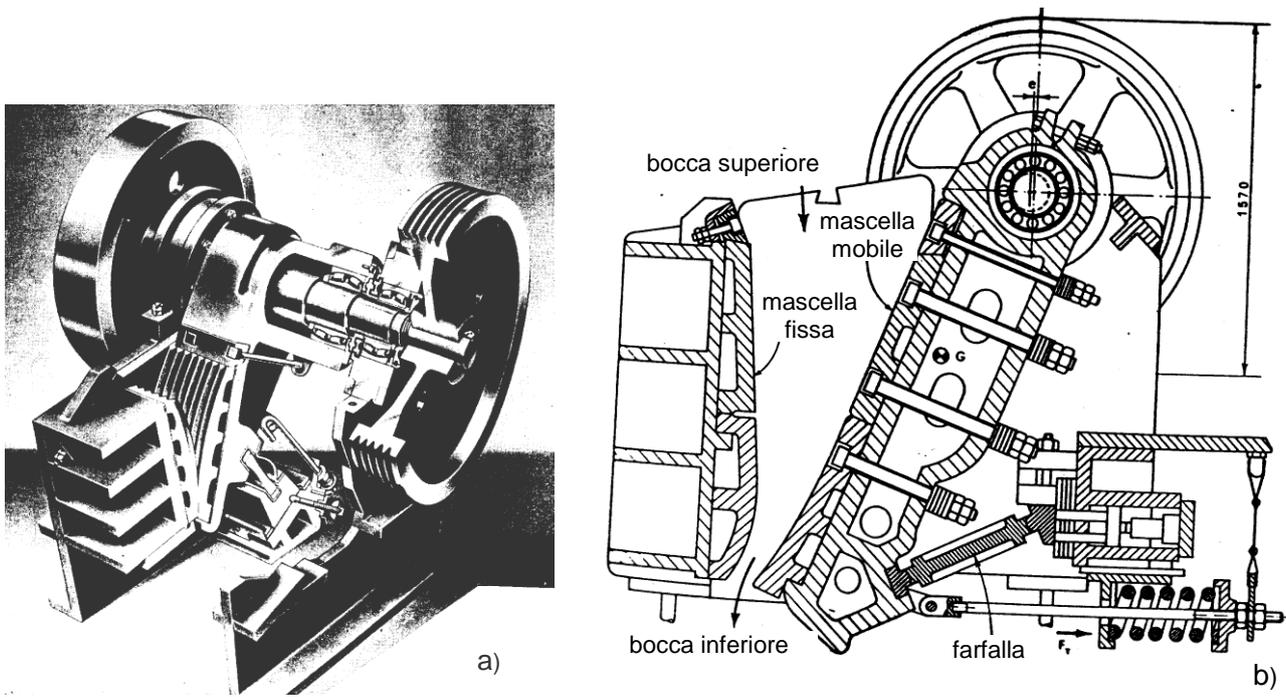


Fig. 1.13 Frantoio a mascelle

In definitiva il meccanismo può essere schematizzato con 3 corpi rigidi mobili, il telaio e 4 coppie rotoidali (Fig. 1.14). Il meccanismo così ottenuto è detto *quadrilatero articolato (four bar linkage)* e le sue parti mobili sono: la *manovella (crank) AC*, la *biella (coupler) CD*, il *bilanciere (follower) DB*. Questo schema cinematico si presta ad una analisi del movimento del meccanismo quando si faccia ruotare la manovella AC (il che equivale a far ruotare l'albero della macchina).

E' facile capire che lo schema cinematico contiene una parte minima dell'informazione necessaria a descrivere e a costruire un macchina. E' però l'informazione essenziale per analizzarne il movimento cinematico che è in genere utilizzata nella fase di sintesi del meccanismo stesso. In Fig. 1.14 la catena è anche disegnata nelle due posizioni in cui il movimento del bilanciere si inverte, dette punti morti del meccanismo.

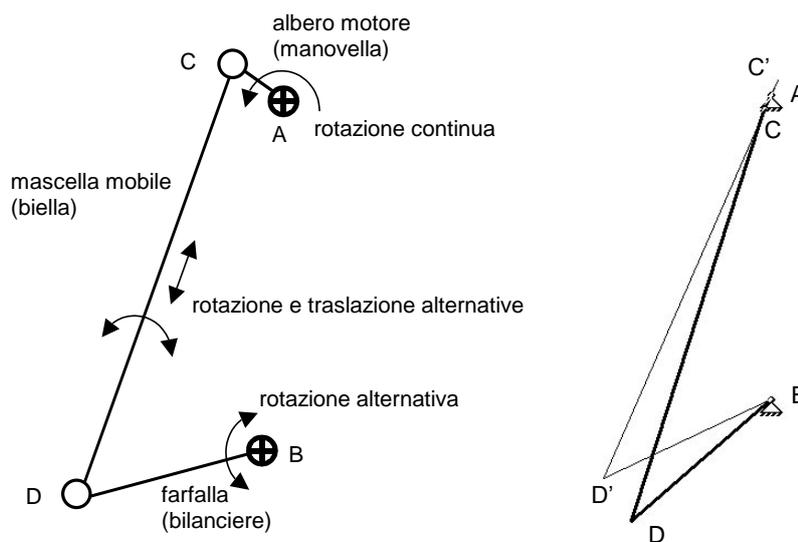


Fig. 1.14 Catena cinematica del quadrilatero articolato del frantoio e posizioni ai punti morti

## 1-6 Esercizi sulle catene cinematiche piane

1-6.1 Identificare le coppie cinematiche, tracciare lo schema cinematico e determinare il numero di gradi di libertà dei meccanismi utilizzati per lo sbarramento sullo Haringvliet, Olanda, riportati in Fig. 1.15.

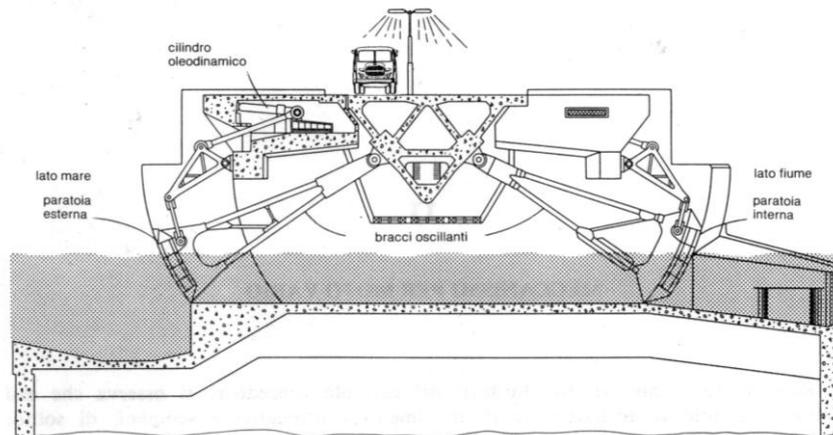


Fig. 1.15 Sbarramento sullo Haringvliet

In figura sono visibili due meccanismi, uno a destra, l'altro a sinistra, simmetrici, per azionare le rispettive paratoie. Scopo di ciascuno di essi è realizzare l'apertura di una paratoia a braccio oscillante con un punto fisso a telaio, mediante il movimento di traslazione di un pistone inserito in un cilindro oleodinamico collocato in alto. Il movimento è trasmesso dal pistone (che trasla nel cilindro fissato al telaio) al braccio (che ruota), attraverso due tiranti e una leva intermedia di forma triangolare con un punto fisso a telaio. Lo schema cinematico è pertanto costituito da (Fig. 1.16):

- 2 coppie rotoidali a telaio (A, B)
- 4 coppie rotoidali mobili (C, D, E, F)
- 1 coppia prismatica (G)
- 5 corpi mobili, indicati con i numeri da 1 a 5.

Pertanto il meccanismo ha  $m=5$  corpi in movimento,  $c_1 = 7$  coppie inferiori (R o P) e il suo numero di gradi di libertà dato dalla (1.1) è:

$$n=3*m - 2 c_1 = 3*5-2*7 = 1$$

pertanto l'azionamento del pistone nel cilindro idraulico determina univocamente la rotazione del braccio oscillante e della paratoia.

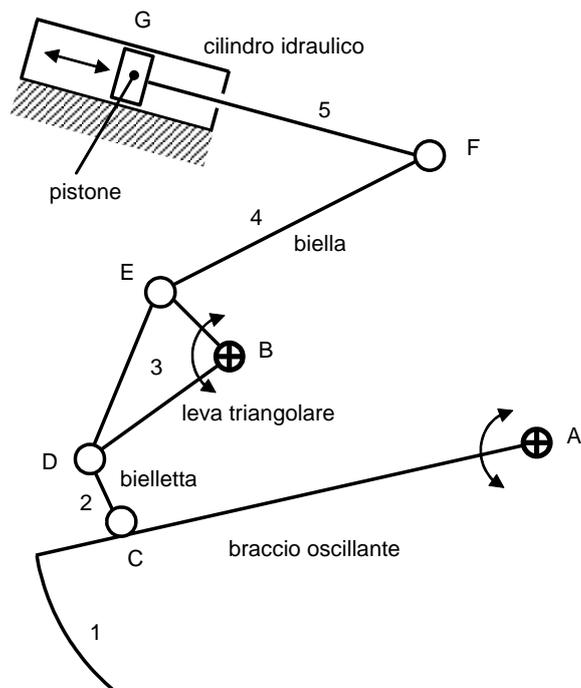


Fig. 1.16 Catena cinematica di un meccanismo di Fig. 1.15

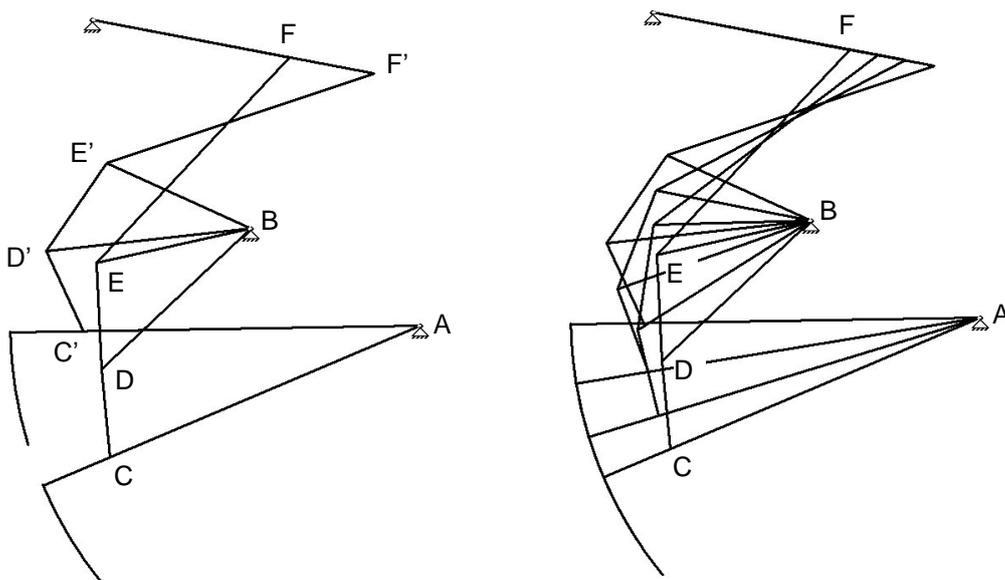


Fig. 1.17 Movimento della catena cinematica di Fig. 1.16

Nella parte sinistra di Fig. 1.17 la catena cinematica è visualizzata in due posizioni, nella parte destra in quattro posizioni. Si può vedere che lo spostamento del pistone lungo l'asse del cilindro (spostamento del punto finale dell'asta da F ad F') produce la rotazione del braccio dal punto C al punto C'.

1-6.2 Identificare le coppie cinematiche e determinare il numero di gradi di libertà della catena cinematica di Fig. 1.18-a. Le dimensioni dei corpi sono tali che  $AB=FG=IL$ ,  $AG=BF=LF=IG$ ,  $DH=GE$ ,  $DE=HG$ .

Occorre notare che il corpo 3 non è interrotto dalla coppia E, ma solo collegato da questa al corpo 8; il corpo 5 non è interrotto dalla coppia H, ma solo collegato da questa al corpo 7.

La catena presenta una coppia prismatica C e 9 coppie rotoidali. Ciascuna delle coppie D, F, G

collega fra loro tre corpi (rispettivamente 7, 8, 9; 1, 2, 4; 2, 3, 5) ed equivale quindi a due coppie; pertanto nell'equazione (1.1) dovrà essere contata due volte. Le altre coppie rotoidali collegano ciascuna due corpi.

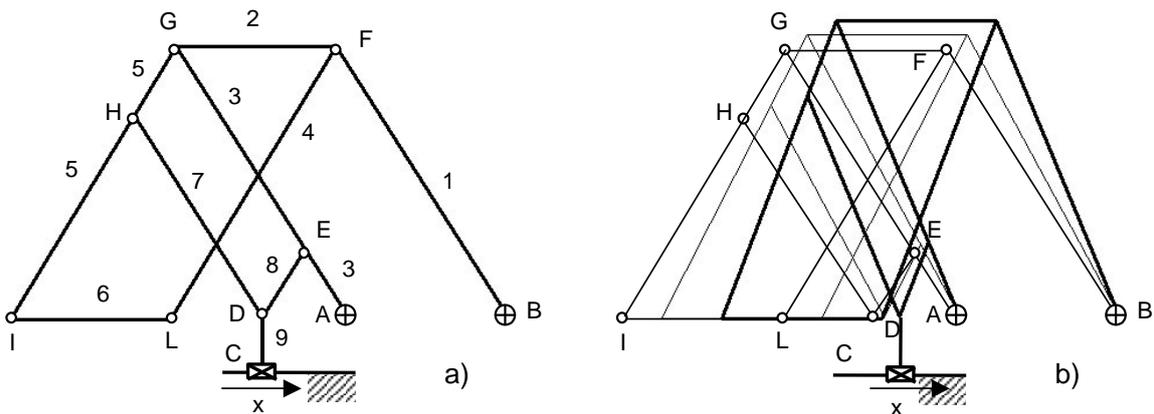


Fig. 1.18 Catena cinematica e suo movimento

Il totale delle coppie P o R, contando due volte quelle che collegano tre corpi è  $c_1 = 13$ . Il numero di corpi mobili è  $m=9$ , per cui dalla (1.1) si ottiene il numero di gradi di libertà  $n=3*9-2*13=1$ . E' pertanto possibile controllare il movimento della catena azionando una delle sue coppie, ad esempio la coppia prismatica C (lo spostamento della coppia C è indicato con  $x$  nella figura).

Date le dimensioni dei corpi sopra specificate si osserva che la il percorso (*loop*) chiuso A, B, F, G realizza un parallelogrammo, pertanto il corpo 2 resterà sempre parallelo al telaio AB: Analogamente anche il percorso chiuso F, G, I, L realizza un parallelogrammo, per cui il corpo 6 resterà sempre parallelo al corpo 2, e quindi al telaio AB. Si vede dunque che la catena farà sempre traslare il corpo 6 rispetto al telaio, senza che il corpo possa ruotare. Siccome anche il percorso D, E, G, H realizza un parallelogrammo, si può provare che il movimento del corpo 6 è una traslazione parallela alla direzione della coppia prismatica C. In Fig. 1.18-b si vedono tre posizioni della catena ottenute per effetto di tre successivi spostamenti della coppia C nella direzione  $x$  disegnata in figura: con linea sottile sono disegnate la posizione iniziale e quella intermedia, con linea spessa quella finale. Le coppie cinematiche sono state disegnate solo nella posizione iniziale. Si noterà che la traslazione del corpo 6 è maggiore di quella della coppia C: la catena *amplifica* il movimento.

In Fig. 1.19 la catena cinematica precedente è stata modificata ruotando di  $90^\circ$  l'asse della coppia prismatica C. Nulla cambia dal punto di vista della mobilità e dell'analisi del movimento, e il movimento del corpo 6 è una traslazione parallela alla direzione della coppia prismatica C. Nella figura si vedono due e tre posizioni della catena in corrispondenza di altrettanti spostamenti della coppia C. Anche in questo caso lo spostamento di C è amplificato.

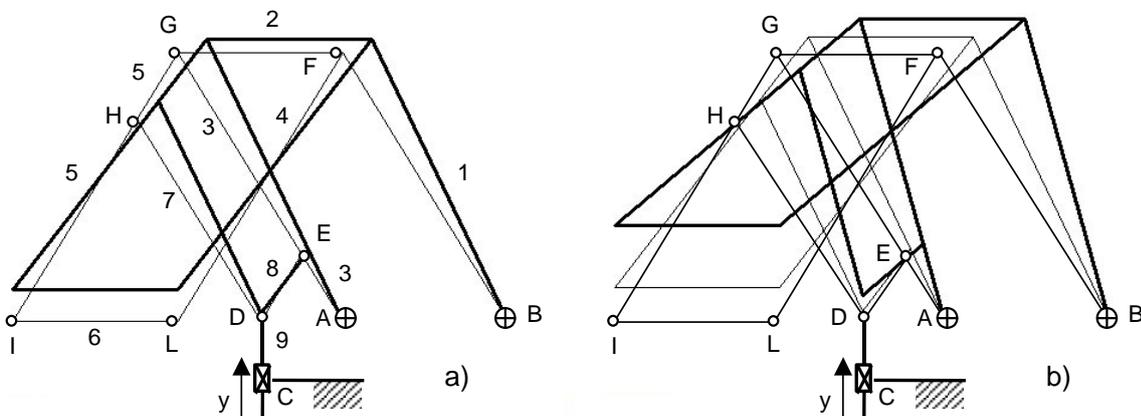


Fig. 1.19 Catena cinematica e suo movimento



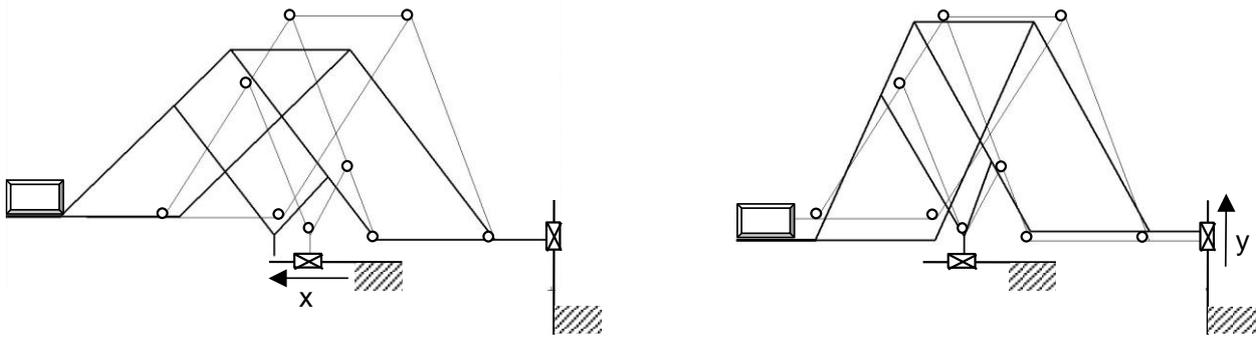


Fig. 1.21 Spostamenti del robot MELKONG

1-6.4 Schematizzare le catene cinematiche e determinare il numero di gradi di libertà dei meccanismi che azionano un escavatore e una pala caricatrice schematizzati in Fig. 1.22.

La catena cinematica dello scavatore (Fig. 1.23-a) deve azionare il cucchiaio consentendogli di traslare nel piano del disegno e di ruotare nel piano stesso (un ulteriore movimento si ottiene facendo ruotare il braccio dell'escavatore rispetto al telaio della macchina). La catena è costituita da 9 corpi mobili, 3 coppie prismatiche (C, D, E) e 9 coppie rotoidali due delle quali fisse al telaio del braccio. Dalla (1.1) si ricava il numero di gradi di libertà  $n = 3$ , coerente con la richiesta di movimentazione del cucchiaio. L'azionamento avviene applicando tre motori alle tre coppie prismatiche, in genere realizzati con cilindri oleodinamici, come nel caso del sollevamento delle paratoie in Fig. 1.15.

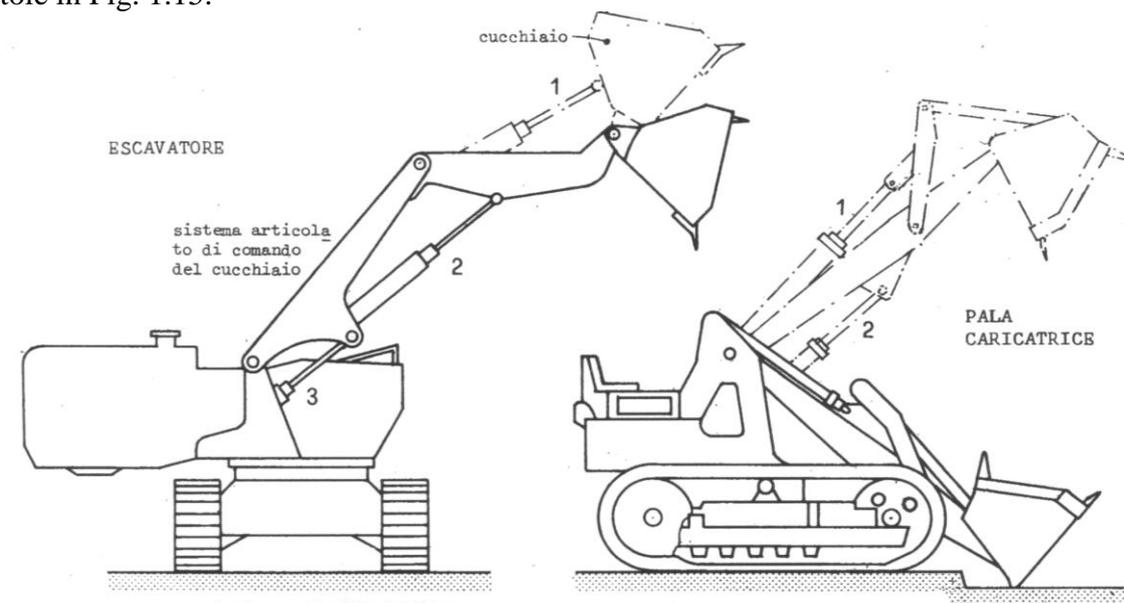


Fig. 1.22 Meccanismi di azionamento di uno scavatore e di una pala caricatrice

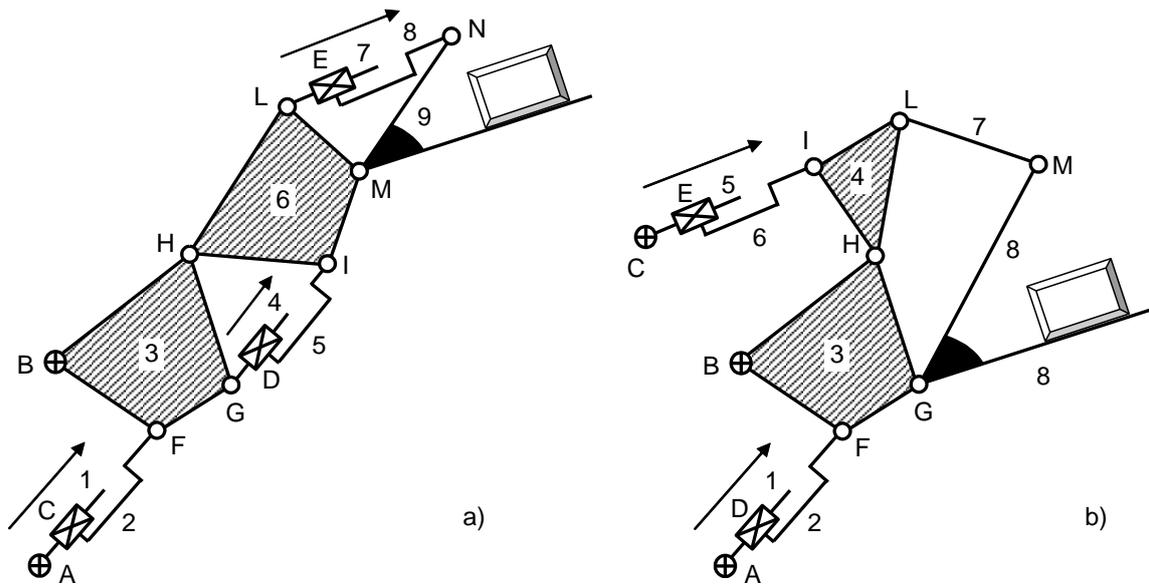


Fig. 1.23 Catene cinematiche di un escavatore e di una pala caricatrice

La catena cinematica della pala (Fig. 1.23-b) è costituita da 8 corpi mobili, 2 coppie prismatiche (D, E) e 9 coppie rotoidali due delle quali fisse al telaio del braccio. Dalla (1.1) si ricava il numero di gradi di libertà  $n = 2$ . L'azionamento avviene applicando due motori alle due coppie prismatiche, in genere realizzati con cilindri oleodinamici, come nel caso dell'escavatore.

1-6.5 Schematizzare la catena cinematica e determinare il numero di gradi di libertà del meccanismo riportato in Fig. 1.24 che aziona il cassone ribaltabile di un autocarro.

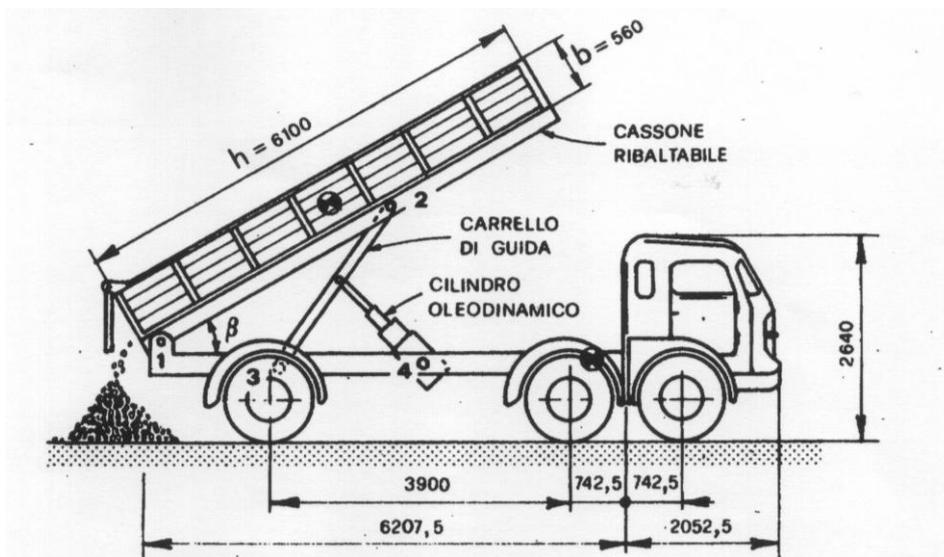


Fig. 1.24 Autocarro con cassone ribaltabile

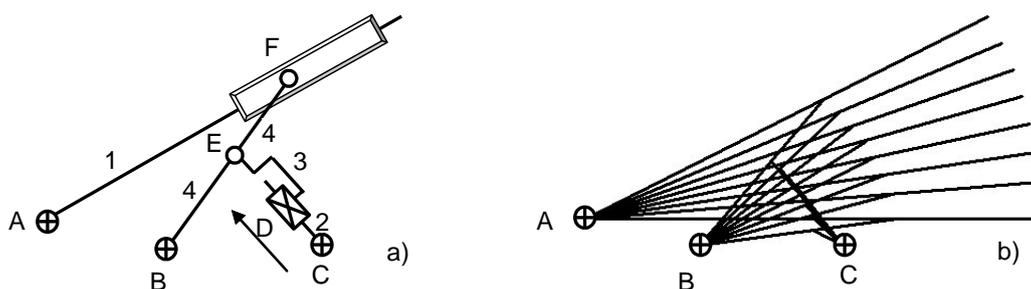


Fig. 1.25 Catena cinematica del meccanismo di ribaltamento del cassone e suo movimento

La catena cinematica riportata in Fig. 1.25 è costituita da 4 corpi mobili, 3 coppie rotoidali fisse al telaio dell'autocarro (A, B, C), da una coppia prismatica D che rappresenta il cilindro oleodinamico che aziona il meccanismo, da una coppia rotoidale E e da una coppia F fra i corpi 1 e 4 che può essere schematizzata come un elemento cilindrico con asse ortogonale al piano del disegno (rappresentato da un cerchio in figura) e da una guida rettilinea in cui può scorrere l'elemento cilindrico. Tale coppia corrisponde alla definizione di coppia "a camma piana" (si veda la Fig. 1.2 in cui si ponga una guida rettilinea al posto di quella curva). Notare che la coppia E non interrompe il corpo 4. Si ha pertanto  $m=4$ ,  $c_1=5$  (le coppie R e la P),  $c_2=1$  (la coppia a camma piana), per cui la catena ha  $n = 3*4 - 2*5 - 1 = 1$  grado di libertà e può essere azionata comandando il cilindro oleodinamico. Una successione di posizioni della catena cinematica è riportata in Fig. 1.25-b.

### 1-7 Movimento delle catene cinematiche piane

I vari corpi di una catena cinematica si muovono con modalità che dipendono dalla struttura della catena e dal modo con cui vengono azionati i motori che controllano il movimento dei gradi di libertà della catena.

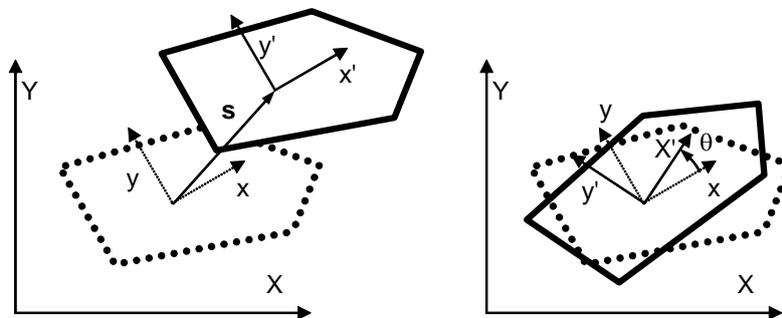


Fig. 1.26 Movimenti piani di traslazione e di rotazione

Considerando un corpo generico (Fig. 1.26) su cui sia fissato un riferimento cartesiano  $x, y$ , se ne consideri il movimento rispetto ad un riferimento  $X, Y$  fissato al telaio della catena alla quale il corpo appartiene. Durante il movimento del corpo il riferimento ad esso solidale  $x, y$  assume una sequenza di posizioni  $x, y; x', y'; \dots$

Si possono così distinguere:

- movimento di *traslazione* quando il riferimento sul corpo  $x, y$  trasla rispetto a quello fisso  $X, Y$  senza ruotare;
- movimento di *rotazione* quando il riferimento sul corpo  $x, y$  ha rotazione  $\theta$  rispetto a quello fisso  $X, Y$  ed un punto  $C$  del corpo resta fisso (il punto è il *centro di rotazione*): le traiettorie di tutti i punti del corpo sono circonferenze con centro nel punto fisso;
- movimento di *rototraslazione* quando si verifica una composizione dei movimenti precedenti.

Ovviamente i corpi vincolati al telaio con coppie prismatiche hanno movimenti di traslazione, quelli vincolati con coppie rotoidali hanno movimenti di rotazione.

Tutti i punti di un corpo che trasla hanno identici spostamenti  $s$ , identiche velocità  $v$  (definite dalle derivate rispetto al tempo di  $s$  (cioè  $v=ds/dt$ )), ovvero le velocità sono uguali in intensità e sono fra loro parallele; l'intensità e la direzione di  $v$  possono variare nel tempo. Tutti i punti di un corpo che trasla hanno identiche accelerazioni  $a$ , definite dalle derivate rispetto al tempo delle velocità  $v$  (cioè  $a=dv/dt$ ), ovvero le accelerazioni sono uguali in intensità e sono fra loro parallele. La velocità angolare  $\omega$  e l'accelerazione angolare  $\alpha$  del corpo sono nulle.

Un corpo che ruota ha velocità angolare  $\omega$  ortogonale al piano di movimento la cui intensità è data dalla derivata rispetto al tempo della rotazione  $\theta$  (cioè  $\omega=d\theta/dt$ ); il corpo ha accelerazione angolare  $\alpha$  ortogonale al piano di movimento la cui intensità è data dalla derivata rispetto al tempo della

velocità angolare  $\omega$  (cioè  $\alpha=d\omega/dt$ ). Si noti che essendo il corpo rigido esistono un'unica rotazione e un'unica velocità angolare e un'unica accelerazione angolare per tutto il corpo. Il generico punto P di un corpo che ruota ha il vettore velocità  $\mathbf{v}$  tangente alla sua traiettoria circolare ed è dunque perpendicolare alla congiungente il punto con il centro di rotazione. Indicando con  $\mathbf{r}$  il vettore che parte dal centro di rotazione e termina nel punto P, vale la relazione

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

ovvero, essendo i vettori  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\mathbf{r}$  fra loro ortogonali nel moto piano

$$v = \omega r \tag{1.2}$$

I punti del corpo hanno accelerazioni diverse: un generico punto P ha accelerazione  $\mathbf{a}$  definita dalla somma di due termini: *l'accelerazione normale*  $\mathbf{a}_n$ , diretta dal punto P al centro di rotazione C, detta anche *accelerazione centripeta*, che determina il movimento sulla traiettoria circolare, e *l'accelerazione tangenziale*  $\mathbf{a}_t$ , perpendicolare alla precedente  $\mathbf{a}_n$ , che determina la variazione dell'intensità della velocità lungo la traiettoria. Valgono le relazioni

$$a_n = r\omega^2 \tag{1.3}$$

$$a_t = r \, d\omega/dt = r\alpha \tag{1.4}$$

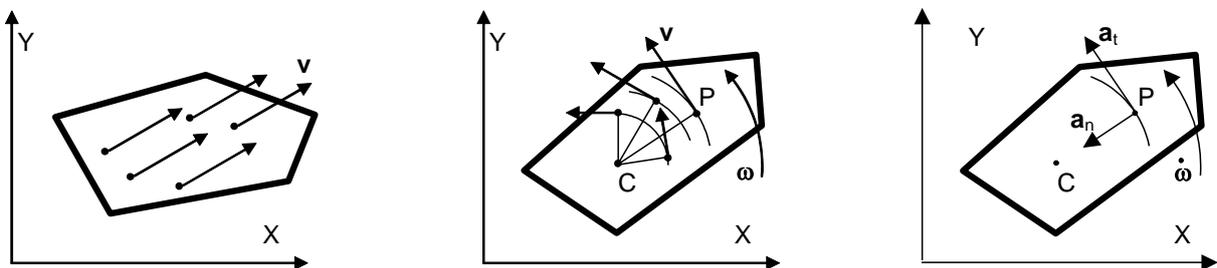


Fig. 1.27 Velocità ed accelerazioni in movimenti piani

*Esempio 1.* La ruota motrice di un motociclo ha raggio  $r = 25$  cm e velocità angolare costante  $n = 1000$  giri/min. Trovare la velocità di avanzamento del motociclo in condizioni di marcia "normale" su terreno in piano.

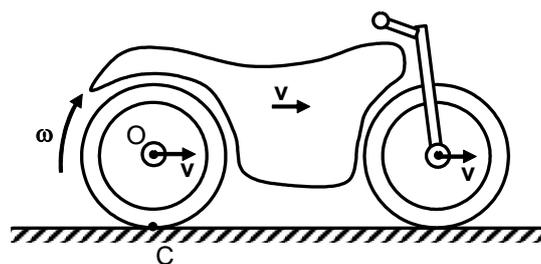


Fig. 1.28 Velocità in un motociclo

I movimenti dei tre corpi evidenziati in Fig. 1.28 (ruota posteriore, anteriore e telaio) sono rispettivamente: rototraslazione per le due ruote, traslazione per il telaio. In condizioni di marcia "normale" la ruota motrice (posteriore) non striscia rispetto al terreno per cui il punto di contatto C tra ruota e terreno è, istante per istante, fermo. Durante il moto il punto di contatto cambia, spostandosi lungo la periferia della ruota e lungo il terreno. In un istante generico essendo C il centro di rotazione (istantaneo) vale la (1.2) essendo  $r$  il raggio della ruota,  $\omega$  la velocità angolare della ruota,  $v$  la velocità del centro della ruota. Il vettore  $\mathbf{v}$  è perpendicolare alla direzione OC e quindi parallelo al terreno. Per procedere al calcolo occorre riportare i dati in unità SI, quindi  $r = 0.25$  m,  $\omega = 1000 \cdot 2\pi/60 = 105$  rad/s. Pertanto

$$v = 105 \cdot 0.25 = 26 \text{ m/s.}$$

Essendo la ruota motrice collegata al telaio con una coppia rotoidale nel punto O, anche il telaio ha la velocità  $v$  sopra calcolata. In km/h si ottiene

$$v = 26 \cdot 3600 / 1000 = 94 \text{ km/h.}$$

*Esempio 2.* Analizzare le leggi di moto applicabili ad un corpo in moto traslatorio la cui posizione debba essere cambiata "rapidamente" da una posizione iniziale ad una finale.

Indicata con  $s$  la posizione di un qualunque punto del corpo nella direzione di traslazione l'esempio richiede di far variare  $s$  "rapidamente" da un valore iniziale che si può assumere zero ad un valore finale non nullo. Ovviamente un cambiamento istantaneo (*a gradino*) di  $s$  come mostrato in Fig. 1.29-a sarebbe molto "rapido", ma comporterebbe velocità  $v$  infinita (la derivata del gradino sarebbe infinita). Dovendo quindi la velocità rispettare un valor massimo compatibile con la fisica della macchina, si può pensare di far variare a gradino la velocità. La variazione di  $s$  risulta proporzionale al tempo (*a rampa*). Però la variazione istantanea di velocità implica valore infinito della sua derivata, l'accelerazione (Fig. 1.29-b), il che sarebbe ottenibile solo applicando al corpo una forza infinita (si ricordi che l'accelerazione di un corpo è proporzionale alla forza ad esso applicata,  $F=ma$ ) il che, ammesso che si riuscisse a generare una forza infinita, comporterebbe la rottura della macchina. In conseguenza anche l'accelerazione non deve superare un valore massimo e quindi si può pensare di far variare l'accelerazione a gradino, in 3 fasi (Fig. 1.29-c): 1) gradino positivo in modo da portare il corpo alla velocità massima accettabile con la massima accelerazione accettabile, 2) accelerazione nulla per mantenere la velocità massima costante, 3) gradino negativo in modo da frenare il corpo fino a farlo fermare con la massima accelerazione accettabile. Nelle tre fasi la velocità varia a rampa in salita, rimane costante, varia a rampa in discesa. Congruentemente lo spostamento varia nelle tre fasi prima parabolicamente, poi crescendo linearmente, infine ancora parabolicamente. Con questo tipo di moto la derivata dell'accelerazione (*jerk*) raggiunge valore infinito. Nelle macchine veloci ciò provoca rilevanti vibrazioni e viene evitato facendo variare a gradino la derivata dell'accelerazione con conseguente modifica degli andamenti di accelerazione, velocità e spostamenti.

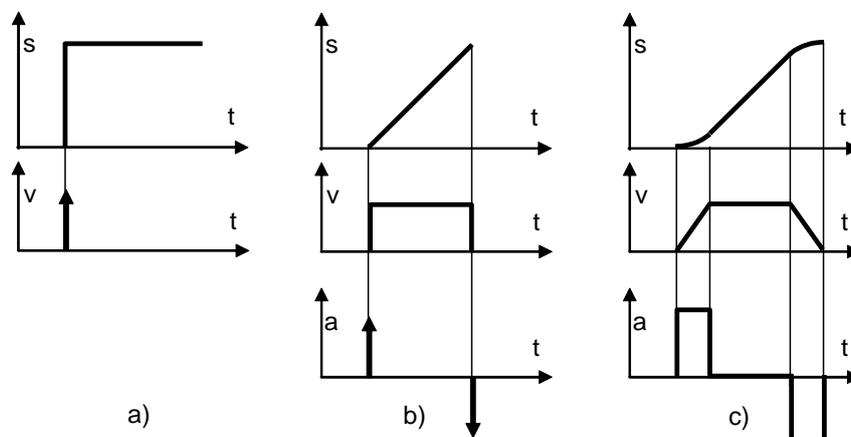


Fig. 1.29 Leggi di moto a gradino (di spostamento, di velocità, di accelerazione)