

VIBRAZIONI DEI SISTEMI LINEARI AD UN GRADO DI LIBERTÀ

Nei modelli di macchine usati nei precedenti capitoli si è fatta sempre l'ipotesi che i corpi fossero solidi e rigidi o liquidi e incomprimibili. Per conseguenza l'energia interna di un sistema meccanico era definita solo dal contributo di energia cinetica di traslazione: $E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2$ o di rotazione

$E_{cin} = \frac{1}{2}J\omega^2$ (avendo escluso significative variazioni di temperatura). Nelle macchine reali questo

non è vero: può essere una ragionevole approssimazione della realtà, ma spesso i modelli rigidi non corrispondono al funzionamento osservato di un sistema. Per esempio una macchina che utilizza aria compressa (per es. nel pneumatico di un'automobile o in componenti di azionamento pneumatici) è sottoposta a variazioni di volume che non sono corrispondenti al modello con fluido incomprimibile. Infatti quando un fluido si comprime o un corpo si deforma si verifica un ulteriore accumulo di energia (detta energia potenziale di deformazione) che non può essere trascurato.

Per ottenere modelli che tengano conto della deformazione dei corpi, ma non siano troppo difficili da trattare matematicamente, si considerano modelli a parametri concentrati (descritti da equazioni differenziali ordinarie, ovvero non alle derivate parziali), lineari (equazioni lineari), tempo invarianti (equazioni a coefficienti costanti). Queste ipotesi sono realistiche per alcuni tipi di sistemi reali, ma largamente approssimative per altri. Infatti:

- In nessun sistema reale i parametri sono concentrati. In particolare in una macchina tutti i corpi sono deformabili e hanno massa; tuttavia in molte macchine si possono riconoscere parti molto più deformabili di altre (per esempio i pneumatici e le sospensioni di un veicolo) e parti molto meno deformabili (per esempio il telaio del veicolo); per converso, le sospensioni hanno massa decisamente meno elevata di quella del complesso formato dal telaio, dalla carrozzeria, dal motore, dalla trasmissione, etc. Si può allora considerare un modello formato da parti in cui è concentrata la deformabilità delle quali è trascurata la massa e parti in cui è concentrata la massa e trascurata la deformabilità.
- Nessun sistema reale è lineare, tuttavia in molti casi il comportamento, almeno nel campo di funzionamento previsto, può essere ben approssimato con un modello lineare. In altri casi, anche in presenza di forti non linearità il sistema presenta "piccoli" movimenti attorno a stati di equilibrio ed è ancora possibile considerare modelli lineari.
- In tutti i sistemi reali i parametri variano nel tempo: per esempio la temperatura varia per effetto della produzione di calore dovuta agli attriti e a sua volta la temperatura fa variare le forze di attrito; la massa dei corpi diminuisce nel tempo perché i corpi si usurano, etc. Tuttavia molti fenomeni a cui è dovuta la variazione dei parametri sono estremamente lenti (ad esempio l'usura), il loro effetto è trascurabile su intervalli di tempo ragionevoli e i parametri possono essere considerati costanti.

Per i modelli di sistemi considerati nel seguito si determinano le equazioni di moto e se ne studia il movimento (integrando le equazioni rispetto al tempo) nei casi seguenti:

- sistema libero, senza forze attive esterne agenti su di esso;
- sistema forzato da forze attive esterne. Vengono considerate forzanti sinusoidali in quanto una generica funzione periodica può essere espressa come somma di sinusoidi con opportune ampiezze e fasi (sviluppo in serie di Fourier); l'effetto di una singola sinusoide può essere valutato e i vari effetti sommati (dato che il sistema è lineare) ottenendo il comportamento del sistema forzato da forzante generica.

Vengono esaminati in dettaglio sistemi traslanti in una direzione assegnata e si mostra poi come i risultati possano essere applicati a sistemi rotanti.

Si riportano alcuni termini utili nello studio delle vibrazioni. Un *moto armonico* è un movimento descritto dall'espressione sinusoidale

$A \sin \omega t + B \cos \omega t$
 ovvero dalla sua equivalente

$$X \sin (\omega t + \varphi)$$

nelle quali la grandezza ω (rad/s) è detta *pulsazione* ; la grandezza $f = \omega/2\pi$ (Hz) è detta *frequenza*; la grandezza $T = 1/f$ (s) è detta *periodo*; la grandezza X è detta *ampiezza*; la grandezza φ (rad) è detta *fase*. Fra le costanti che compaiono nelle espressioni precedenti valgono le relazioni

$$A = X \cos \varphi, \quad B = X \sin \varphi, \quad X = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \varphi = \text{atan} (B/A) \quad (7.1)$$

Il *valore quadratico medio* (*root mean square, RMS*) di una sinusoidale di ampiezza X è

$$F_{\text{RMS}} = \frac{1}{\sqrt{2}} X$$

La Fig. 7.1 mostra tre funzioni sinusoidali $X (\sin \omega t + \varphi)$ con uguali pulsazioni ($\omega=1$ rad/s) e fasi ($\varphi=0$ rad), ma con tre differenti ampiezze ($X=1, 1.5, 2$). La Fig. 7.2 mostra tre funzioni sinusoidali con uguali pulsazioni ($\omega=1$ rad/s) e ampiezze ($X=1$), ma con differenti fasi ($\varphi=0, 1, 1.57$). La Fig. 7.3 mostra tre funzioni sinusoidali con uguali ampiezze ($X=1$) e fasi ($\varphi=0$ rad), ma con differenti pulsazioni ($\omega=1, 2, 3$).

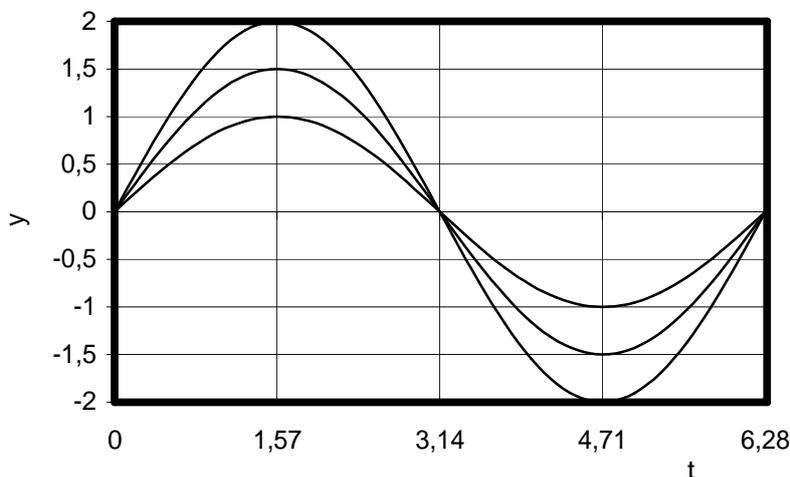


Fig. 7.1 Sinusoidi con diverse ampiezze

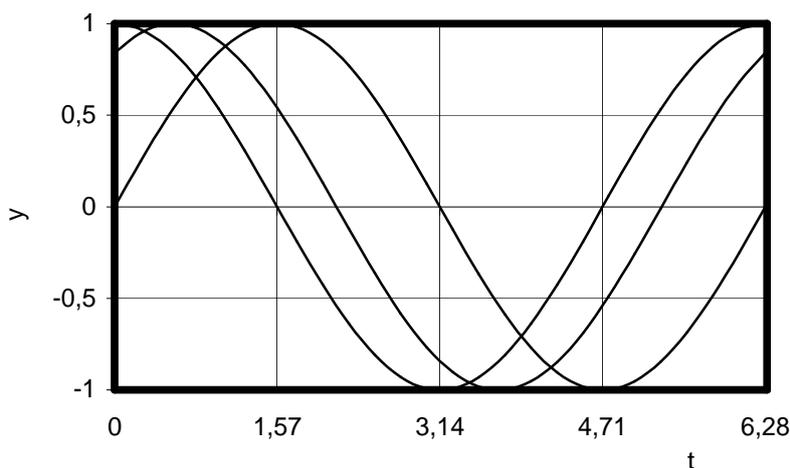


Fig. 7.2 Sinusoidi con diverse fasi

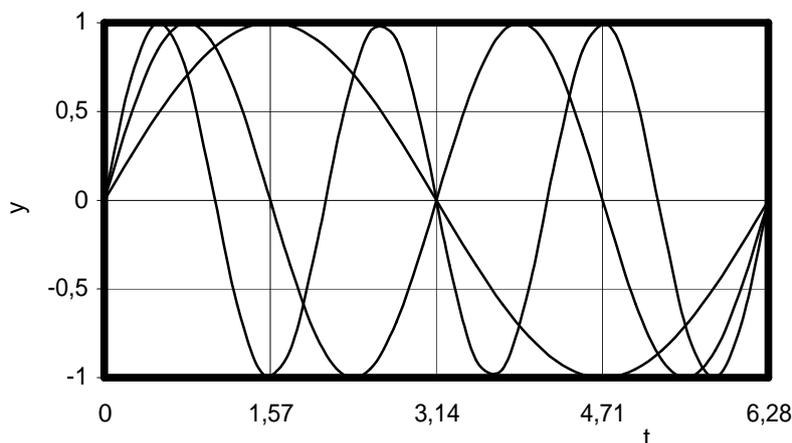


Fig. 7.3 Sinusoidi con diverse pulsazioni

7-1 Sistemi non smorzati

7-1.1 VIBRAZIONI LIBERE

Uno schema di sistema con due accumuli di energia (potenziale elastica e cinetica) è riportato in Fig. 7.4.

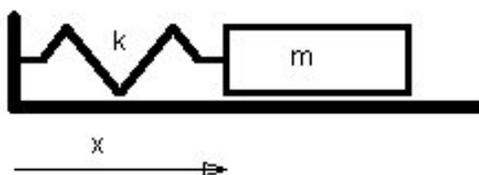


Fig. 7.4 Sistema lineare massa-molla.

Lo scambio fra l'energia cinetica della massa e quella elastica della molla può provocare un movimento detto *vibrazione meccanica*. La maggior parte delle macchine e delle costruzioni meccaniche presenta vibrazioni di varia entità, talvolta tali da pregiudicare il funzionamento della macchina e la stabilità della costruzione.

Il moto libero del sistema avviene in assenza di forze esterne ad esso. L'equazione di moto per il corpo mobile di massa m a cui è collegata la molla viene dedotta proiettando l'equazione cardinale $\mathbf{F}=\mathbf{ma}$ nell'unica direzione di movimento (asse x) tenendo conto, in ipotesi di linearità, che la forza di una molla deformata della quantità x è proporzionale alla deformazione e quindi è data da $-kx$, essendo k una costante detta *rigidezza della molla*. Il segno negativo tiene conto del fatto che la forza della molla si oppone sempre alla sua deformazione. Pertanto

$$-kx = m\ddot{x}$$

ovvero

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Si scrivere equivalentemente:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{7.2}$$

avendo posto

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{7.3}$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$x = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t$$

che, in base alle (7.1), può anche essere espresso nella forma

$$x = X \sin(\omega_n t + \varphi) \tag{7.4}$$

I valori della coppia di costanti utilizzata in una qualsiasi delle due ultime espressioni (A e B o X e φ) sono determinati dalle condizioni iniziali: trattandosi di equazione del secondo ordine sono richieste due condizioni iniziali definite dai valori della posizione e della velocità della massa ad un istante dato. Nel caso in cui si imponga che al tempo $t=0$ sia x_0 la posizione della massa e v_0 la sua velocità, si ottiene l'espressione della *risposta naturale* del sistema

$$x = x_0 \cos \omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t$$

che è identica alla (7.4) in cui si ponga

$$X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} \quad \text{e} \quad \varphi = \text{atan}\left(\frac{x_0 \omega_n}{v_0}\right)$$

Le precedenti espressioni, mostrano che la risposta del sistema del secondo ordine senza smorzamento è un movimento sinusoidale con pulsazione ω_n detta *pulsazione naturale* o *pulsazione propria* (ovvero con *frequenza naturale* $f_n = \omega_n/2\pi$ e *periodo naturale* $T_n = 1/f_n$); la pulsazione naturale dipende solo dai parametri del sistema (k e m), mentre l'ampiezza e la fase dipendono dalle condizioni iniziali. Il movimento permane nel tempo data l'assenza di dissipazioni di energia (attrito nullo).

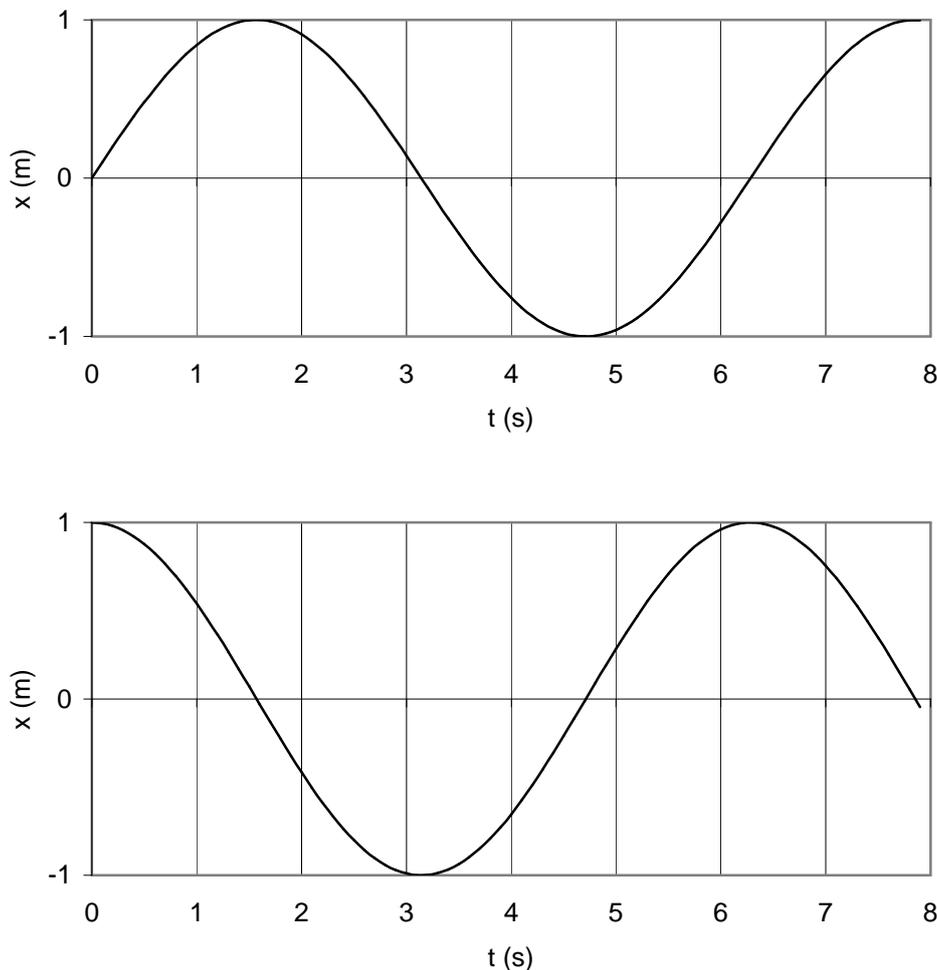


Fig. 7.5 Risposte libere di un sistema per due diverse condizioni iniziali

La Fig. 7.5 riporta due esempi di risposta libera per un unico sistema avente $\omega_n=1$ rad/s in corrispondenza di due diverse coppie di condizioni iniziali: nella prima si ha $x_0=0$, $v_0 \neq 0$ (la curva di risposta parte dall'origine con pendenza non nulla); nella seconda si ha $x_0 \neq 0$, $v_0=0$ (la curva di risposta parte da una x diversa dall'origine con pendenza non nulla).

ESEMPIO Una macchina ha una massa $m=2000$ kg ed è montata su una fondazione elastica costituita da 4 supporti in parallelo ciascuno dei quali ha rigidità $k_1=2500$ kN/m. Trovare la frequenza naturale e il periodo delle oscillazioni non smorzate della macchina.

I quattro supporti equivalgono ad un'unica elasticità con costante $k=4k_1=10000$ kN/m (vedi paragrafo 7-3.1). La pulsazione naturale è $\omega_n=(k/m)^{0.5}=70.7$ rad/s. La frequenza naturale è $f_n=\omega_n/2\pi=11.3$ Hz. Il periodo naturale è $T_n=1/f_n=0.089$ s.

ESEMPIO Un carrello per autoveicoli ha massa a pieno carico $m=505$ kg. La sospensione del carrello è realizzata con due molle a balestra, ciascuna con rigidità $k_1=45$ kN/m. I due pneumatici hanno ciascuno rigidità $k_2=80$ kN/m. Si vuol calcolare frequenza naturale del carrello.

La rigidità della molla equivalente ad un pneumatico in serie con una delle due sospensioni è (vedi paragrafo 7-3.1)

$$k^* = 1/(1/k_1 + 1/k_2) = 28800 \text{ N/m}$$

Essendoci due di tali molle in parallelo, la rigidità totale (sospensioni più pneumatici) vale

$$k = 2k^* = 57600 \text{ N/m}$$

La frequenza naturale del carrello è $f_n=\omega_n/2\pi=(k/m)^{0.5}/2\pi = 1.7$ Hz. Il periodo di oscillazione è $T_n = 1/1.7 = 0.85$ s.

7-1.2 VIBRAZIONI FORZATE

Il moto forzato del sistema avviene in presenza di una forza $F(t)$, detta *forzante*, applicata dall'esterno alla massa m . L'equazione di moto per il corpo mobile di massa m a cui è collegata la molla, dedotta proiettando $\mathbf{F}=\mathbf{ma}$ sull'asse x , è

$$-kx + F(t) = m\ddot{x}$$

ovvero

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, lineare, a coefficienti costanti, non omogenea. La soluzione è ottenuta aggiungendo all'integrale generale dell'omogenea, una soluzione particolare x_f . È possibile trovare integrali particolari per tutti i casi di forzanti interessanti le applicazioni (per esempio forzanti impulsive, a gradino, a rampa, etc.), ma per una trattazione elementare è sufficiente considerare una forza esterna sinusoidale, $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$, in cui F_0 è l'ampiezza della forzante e ω la pulsazione della forzante: in tal caso la soluzione particolare è sinusoidale,

$$x_f = X_f \sin(\omega t + \varphi_f) \tag{7.5}$$

con

$$X_f = \frac{F_0/k}{\left|1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right|} \quad \varphi_f = \begin{cases} 0 & \text{per } \omega < \omega_n \\ \pi & \text{per } \omega > \omega_n \end{cases} \tag{7.6}$$

La Fig. 7.6 riporta gli andamenti di $x_f(t)$ per 8 diversi valori della pulsazione ω della forzante sinusoidale: i parametri del sistema sono: $k=10000$ N/m, $m=400$ kg, per i quali la pulsazione naturale è $\omega_n=5$. La forzante sinusoidale ha ampiezza $F_0=20000$ N.

Con una bassa pulsazione della forzante ($\omega=1$ in figura) l'ampiezza delle oscillazioni è quasi uguale a $F_0/k=2$ m; aumentando ω l'ampiezza delle oscillazioni aumenta fino ad un valore tendente ad infinito quando la pulsazione della forzante tende a quella naturale del sistema ($\omega=\omega_n$); per valori di ω maggiori di ω_n l'ampiezza delle oscillazioni diminuisce e tende a zero per elevati valori della pulsazione della forzante. Quando $\omega=\omega_n$ si ha continua immissione di energia nel sistema e le oscillazioni diventano infinite: questa è la condizione di *risonanza* per un sistema non smorzato. Questa condizione non è stata riportata in figura, ma sono stati riportati gli andamenti della risposta per due valori "a cavallo" della risonanza ($\omega=4.75$ e $\omega=5.25$) per i quali l'ampiezza delle oscillazioni è circa 20, cioè circa 10 volte quella con pulsazione della forzante $\omega=1$.

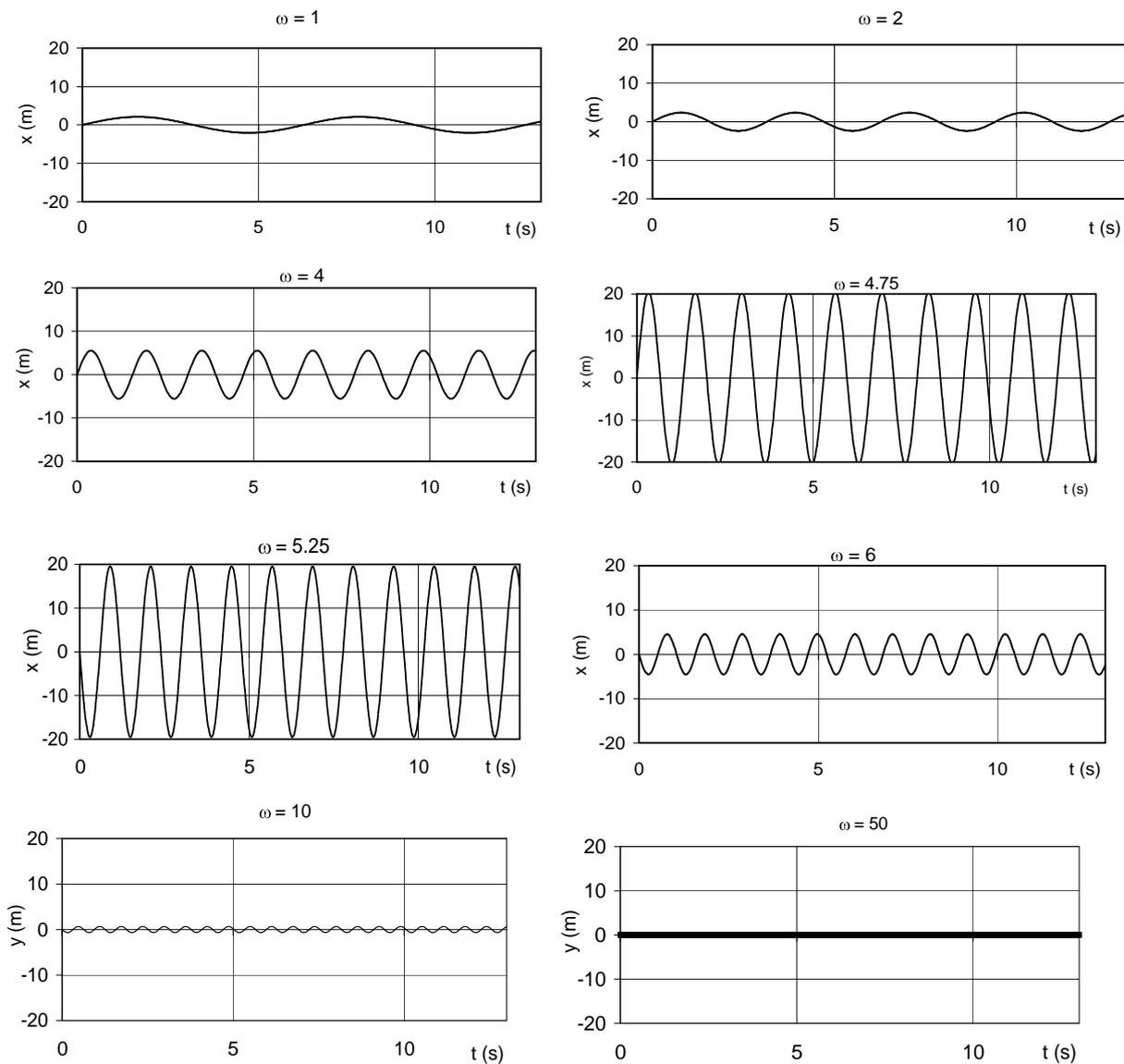


Fig. 7.6 Risposta forzata (integrale particolare), al variare della ω della forzante.

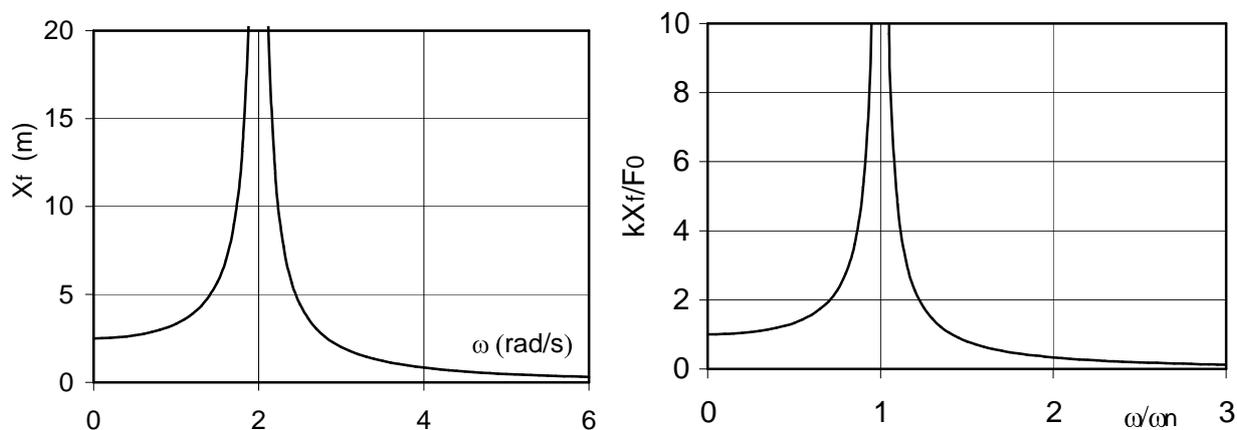


Fig. 7.7 Risposta in frequenza dimensionale e adimensionale

La Fig. 7.7 riporta a sinistra un grafico, rappresentativo della (7.6), dell'andamento di X_f in funzione di ω per un sistema con $k=4$ N/m, $m=1$ kg, $\omega_n=2$, $F_0=10$ N. In questo grafico la variabile in ascisse ha unità di misura in radianti al secondo, quella in ordinate ha unità di misura in metri. La (7.6) può

anche essere scritta come

$$\frac{X_f}{F_0/k} = \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right|} \quad (7.7)$$

il cui grafico in funzione di ω/ω_n è riportato in Fig. 7.7 a destra. In questo caso sia in ascisse sia in ordinate le variabili sono adimensionali. Entrambi i grafici in Fig. 7.7 rappresentano la *risposta in frequenza del sistema del secondo ordine non smorzato*.

7-2 Sistemi smorzati

In questi sistemi sono ancora presenti accumuli di energia cinetica (nella massa) e di energia potenziale di deformazione (nell'elemento elastico), ma sono anche presenti dissipazioni di energia concentrate in un elemento lineare detto *smorzatore*. Lo scambio fra l'energia cinetica della massa e quella elastica della molla può provocare un movimento detto *vibrazione meccanica* che può o meno prodursi effettivamente a seconda dell'entità dell'effetto dello smorzatore.

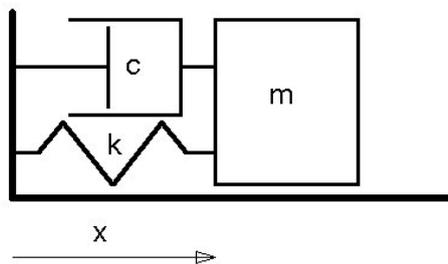


Fig. 7.8 Sistema lineare massa-molla-smorzatore

Pur essendo un semplicissimo modello di sistema meccanico, contiene tutti gli effetti energetici meccanici rilevanti: inerziali (massa), elastici (molla), di attrito (smorzatore) e può fornire utili informazioni nell'analisi dei sistemi vibranti. Tutti i sistemi meccanici sono soggetti a dissipazioni di energia dovute agli attriti e ad altre resistenze (per esempio la resistenza dell'aria); se non viene fornita energia dall'esterno il movimento vibratorio di estinguerà nel tempo; la vibrazione può invece essere mantenuta se una forza esterna fornisce energia pari a quella dissipata.

7-2.1 VIBRAZIONI LIBERE

L'equazione di moto per il corpo mobile di massa m a cui sono collegati la molla e lo smorzatore è ottenuta aggiungendo alla forza elastica della molla una forza proporzionale alla velocità della massa; indicando con c la costante di proporzionalità detta *costante di smorzamento* si ottiene

$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, lineare, a coefficienti costanti, omogenea. Si usa scrivere l'equazione nella forma equivalente:

$$\ddot{x} + 2z\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$$

essendo $z = c/(2\sqrt{km})$. Il valore del coefficiente c per il quale $z=1$ è detto *smorzamento critico* ed è dato da $c_c = 2\sqrt{km}$.

Lo studio dell'equazione di moto porta ai seguenti risultati

- Se $z < 1$ il sistema, tolto dalla posizione di equilibrio vi ritorna oscillando con ampiezza decrescente nel tempo. Il sistema è detto *sottosmorzato*.
- Se $z > 1$ il sistema, tolto dalla posizione di equilibrio vi ritorna senza oscillare. Il sistema è detto *sovrasmorzato*.

7-2.2 VIBRAZIONI FORZATE

Il moto forzato avviene in presenza di una forza $F(t)$, detta forzante; l'equazione di moto è:

$$-kx - c\dot{x} + F = m\ddot{x}$$

equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, lineare, a coefficienti costanti, non omogenea. La soluzione è ottenuta aggiungendo all'integrale generale dell'omogenea una soluzione particolare $x_f(t)$ dell'equazione completa. Ricordando che l'integrale generale dell'omogenea ha andamento che tende a zero per tempo tendente ad infinito, si può dire che l'integrale particolare della completa descrive il movimento della massa *a regime*.

Quando la forza esterna è sinusoidale, $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ e l'equazione di moto è'

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t) \quad (7.8)$$

L'integrale particolare dell'equazione completa è sinusoidale

$$x_f = X_f \sin(\omega t + \varphi_f) \quad (7.9)$$

con

$$X_f = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2z \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad \text{e} \quad \varphi_f = a \tan \frac{2z\omega/\omega_n}{\left(\omega/\omega_n\right)^2 - 1} \quad (7.10)$$

Come si vede, l'integrale particolare, che descrive il movimento della massa a regime, è sinusoidale, ha pulsazione uguale a quella della forzante, ha ampiezza e fase che dipendono dalla pulsazione della forzante (ω), dall'intensità della forza applicata (F_0) e dai parametri del sistema (k , c , m); non dipende dalle condizioni iniziali. Questa proprietà è comune ai sistemi lineari per ogni tipo di forzante e consente di semplificare lo studio delle macchine, poiché spesso è interessante studiarne il funzionamento a regime e si può ignorare l'effetto delle condizioni iniziali sul movimento a regime.

Come nel caso non smorzato, la relazione che fornisce X_f è spesso scritta come rapporto fra X_f e F_0/k (detto *rapporto di amplificazione* o *coefficiente di amplificazione*):

$$\frac{X_f}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2z \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (7.11)$$

Della (7.11) si può disegnare un grafico, per ogni valore di z , in funzione della variabile adimensionale ω/ω_n (Fig. 7.9). La relazione (7.11) e la sua rappresentazione grafica costituiscono la *risposta in frequenza* del sistema smorzato.

Ovviamente per $z=0$ il grafico della (7.11) coincide con quello della (7.7), con ampiezza infinita in corrispondenza di una forzante con pulsazione pari a quella naturale del sistema. Per valori di $z>0$ il denominatore della frazione non si annulla mai (è la somma di due quadrati che non si annullano mai contemporaneamente) e l'ampiezza delle oscillazioni si mantiene limitata, anche se per piccoli z può comunque essere molto grande (e danneggiare o non essere accettabile per una macchina reale). Il valore di ω per cui ad un dato z l'ampiezza di oscillazione forzata è massima si chiama *pulsazione di risonanza* ed è dato dall'espressione

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2z^2}$$

Per $z < 1/\sqrt{2}$ ($z < 0.707$), la pulsazione di risonanza è un numero reale (esiste fisicamente), e quindi l'ampiezza di oscillazione aumenta con ω fino al valore ω_r e poi diminuisce. Invece per $z > 1/\sqrt{2}$ ($z > 0.707$) il valore della pulsazione di risonanza è immaginario e non esiste quindi un massimo per l'ampiezza di oscillazione che decresce sempre all'aumentare di ω/ω_n .

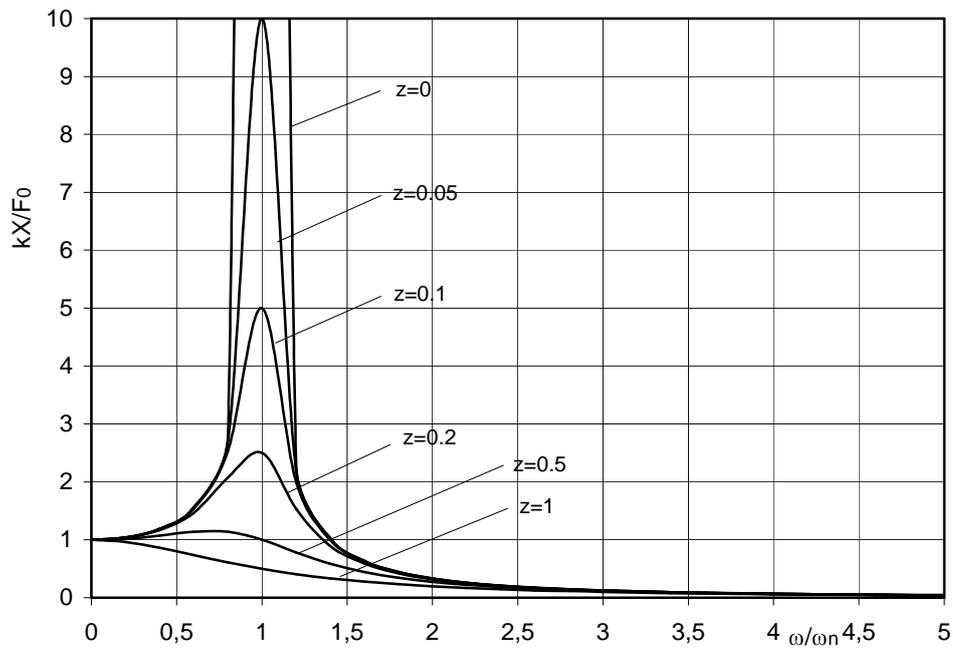


Fig. 7.9 Risposta in frequenza ($z=0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1$)

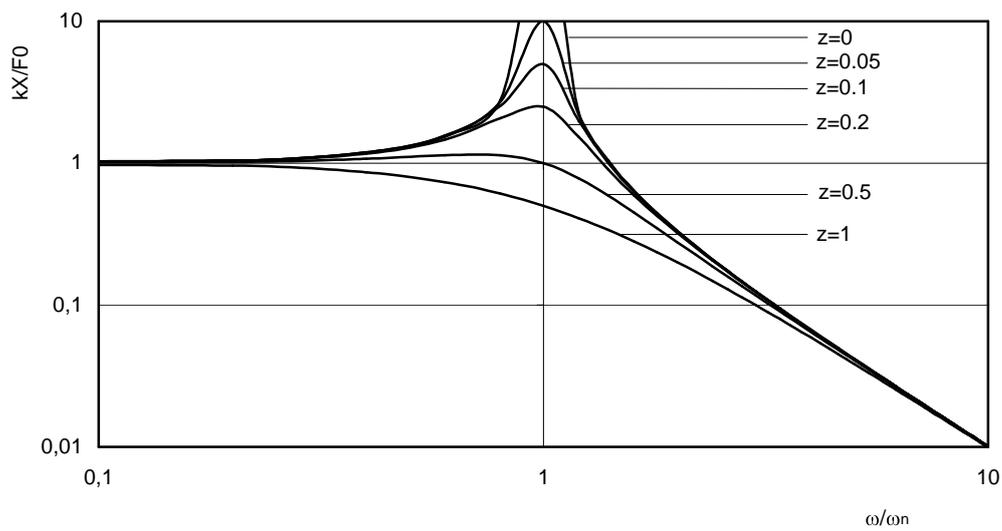


Fig. 7.10 Grafico della risposta in frequenza in scala bilogarithmica ($z=0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1$)

E' possibile avere anche rappresentazioni in scala bilogarithmica della risposta in frequenza. La Fig. 7.10 ne riporta un esempio.

7-3 Applicazioni

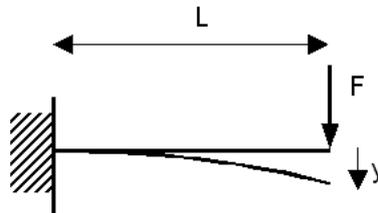
7-3.1 REALIZZAZIONE E DISPOSIZIONE DI COMPONENTI ELASTICI

I componenti elastici il cui modello è stato determinato in base al parametro k (rigidezza) possono nella pratica avere realizzazioni e disposizioni molto varie.

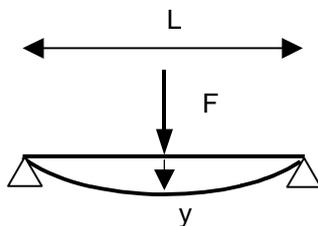
Realizzazioni a trave inflessa

Un caso che si incontra di frequente è quello di un elemento strutturale nel quale una delle dimensioni L (detta lunghezza) è nettamente più grande delle altre due: questo elemento è detto *trave*. La trave inflessa è caricata perpendicolarmente al suo asse con una forza F e subisce una deformazione y in corrispondenza del punto di applicazione della forza. La costante elastica della trave è $k=F/y$. I risultati seguenti valgono per una trave uniforme, omogenea e a sezione costante. Si considerano: E = modulo di elasticità longitudinale (di Young) del materiale della trave ($E=210$ GPa per l'acciaio), J = momento quadratico equatoriale di area della sezione trasversale

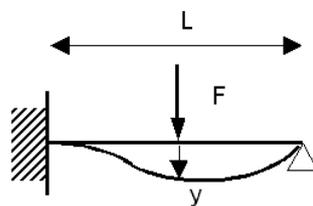
- Trave incastrata ad un estremo, caricata all'altro: $k = \frac{3EJ}{L^3}$



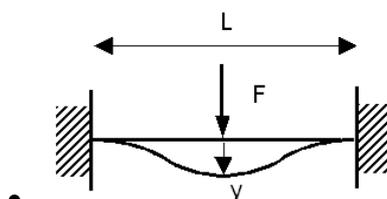
- Trave appoggiata agli estremi, caricata al centro: $k = \frac{48EJ}{L^3}$



- Trave incastrata ad un estremo e appoggiata all'altro, caricata al centro: $k = \frac{768EJ}{7L^3}$

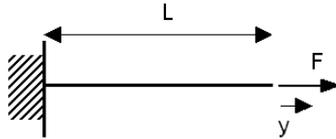


- Trave incastrata agli estremi, caricata al centro: $k = \frac{192EJ}{L^3}$



Realizzazione a trazione

La trave è sollecitata ad una delle estremità da una forza assiale F e subisce una deformazione y alla stessa estremità. Posto A = area della sezione trasversale, la costante elastica è $k=F/y$: $k = \frac{EA}{L}$



Realizzazione a torsione

La trave è sollecitata da un momento torcente M_t ad una delle estremità e subisce una deformazione di rotazione θ alla stessa estremità. Posto J_t = momento quadratico polare di area della sezione trasversale, $G = E/2(1+\nu)$ modulo di elasticità tangenziale del materiale ($\nu= 0.3$ per l'acciaio), la costante elastica è:

$$k_t=M_t/\theta = \frac{GJ_t}{L}$$



Realizzazione ad elica

Le molle ad elica sono realizzate avvolgendo secondo un'elica di raggio R un filo di diametro d . L'elica è composta da un numero n di *spire*. La rigidezza assiale della molla (ossia il rapporto fra una forza applicata assialmente alla molla e la deformazione assiale) è: $k = \frac{Gd^4}{64nR^3}$

Le disposizioni dei componenti elastici, comunque realizzati, possono essere: in serie, in parallelo, mista.

Elasticità in parallelo

Due (o più) elementi elastici si dicono in parallelo quando gli estremi sono collegati tutti in punti comuni e subiscono pertanto gli stessi spostamenti (Fig. 7.11).

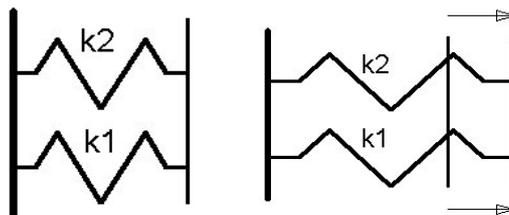


Fig. 7.11 Elasticità in parallelo

E' possibile determinare la costante elastica di una elasticità equivalente (nel senso che fornisce forza uguale a quella delle due elasticità date a parità di deformazione) tenendo conto che:

- le deformazioni delle molle date δ_1 e δ_2 sono uguali fra di loro e uguali a quella della molla equivalente δ_e ; dunque $\delta_1 = \delta_2 = \delta_e$;
- la somma delle forze prodotte dalle molle date è pari alla forza della molla equivalente; dunque $F_e = F_1 + F_2$;
- valgono al solito le relazioni lineari: $F_e = k_e \delta_e$; $F_1 = k_1 \delta_1$; $F_2 = k_2 \delta_2$;

Si ha pertanto $F_e = k_e \delta_e = k_1 \delta_e + k_2 \delta_e$; da cui si ottiene

$$k_e = k_1 + k_2.$$

Nel caso di n elasticità in parallelo la relazione precedente si generalizza a

$$k_e = \sum_{i=1}^n k_i$$

Elasticità in serie

Due (o più) elementi elastici si dicono in serie quando l'estremo di uno dei due elementi è collegato ad un estremo dell'altro (Fig. 7.12).

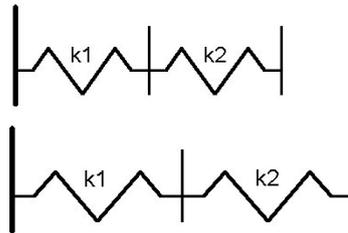


Fig. 7.12 Elasticità in serie

E' possibile determinare la costante elastica di una elasticità equivalente (nel senso che fornisce forza uguale a quella delle elasticità date a parità di deformazione) tenendo conto che

- la somma delle deformazioni delle molle date e' pari alla deformazione della molla equivalente; dunque $\delta_e = \delta_1 + \delta_2$;
- le forze trasmesse dalle molle date sono uguali fra di loro e uguali a quella della molla equivalente $F_1 = F_2 = F_e$;
- valgono al solito le relazioni lineari: $F_e = k_e \delta_e$; $F_1 = k_1 \delta_1$; $F_2 = k_2 \delta_2$;

Si ha pertanto $\delta_e = F_e/k_e = F_1/k_1 + F_2/k_2$; da cui si ottiene

$$1/k_e = 1/k_1 + 1/k_2.$$

Nel caso di n elasticità in serie la relazione precedente si generalizza a

$$\frac{1}{k_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}$$

7-3.2 TRASMISSIONE DELLE FORZE E ISOLAMENTO ATTIVO

Le forze agenti nelle diversi parti di una macchina vengono trasmesse alle altre parti attraverso i vincoli e possono provocare eccessive sollecitazioni o eccessivi movimenti. E' quindi necessario procedere alla valutazione di tali forze e, se possibile, alla loro riduzione. Esistono due modi fondamentali di operare: il primo modo consiste nell'isolare le masse ove ha origine la vibrazione, ossia nel ridurre le forze trasmesse ai vincoli da una massa che vibra in quanto sollecitata da rilevanti forze periodiche agenti su di essa: è detto *isolamento attivo*; il secondo modo consiste nel

ridurre le sollecitazioni che attraverso i vincoli vengono applicate a parti non soggette a forze periodiche ed è detto *isolamento passivo*.

Si può facilmente determinare l'espressione della forza trasmessa al vincolo dal sistema con inerzia, elasticità e smorzamento (Fig. 7.13), a cui sia applicata una forza sinusoidale $F=F_0\sin\omega t$. La forza trasmessa al vincolo F_t è la somma della forza $F_k = kx$ trasmessa attraverso la molla e della forza $F_c = c\dot{x}$ trasmessa attraverso lo smorzatore. Tenendo conto dell'espressione a regime $x=X_f\sin(\omega t + \varphi_f)$ e della sua derivata $\dot{x} = \omega X_f \cos(\omega t + \varphi_f)$, si ottiene

$$F_t = k X_f \sin(\omega t + \varphi_f) + c\omega X_f \cos(\omega t + \varphi_f)$$

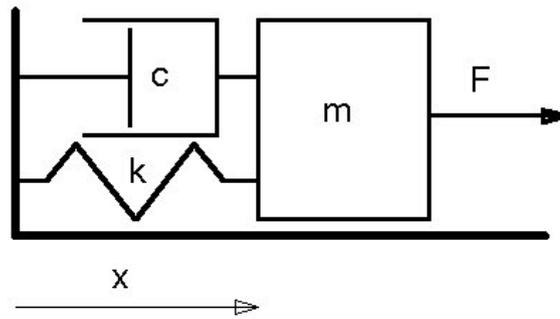


Fig. 7.13 Analisi delle forze trasmesse al vincolo

Come si è visto in precedenza a tale espressione si può dare la forma alternativa

$$F_t = F_T \sin(\omega t + \varphi_t)$$

dove l'ampiezza della forza trasmessa è data da

$$F_T = \sqrt{(kX_f)^2 + (c\omega X_f)^2} = X_f \sqrt{k^2 + (c\omega)^2}$$

e l'espressione di X_f si ricava dalla (7.10). Effettuando questa sostituzione si ottiene il *fattore di trasmissione delle forze* o *trasmissibilità*

$$TR = \frac{F_T}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + \left(2z \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2z \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (7.12)$$

il cui andamento è riportato in Fig. 7.14 per alcuni valori di z .

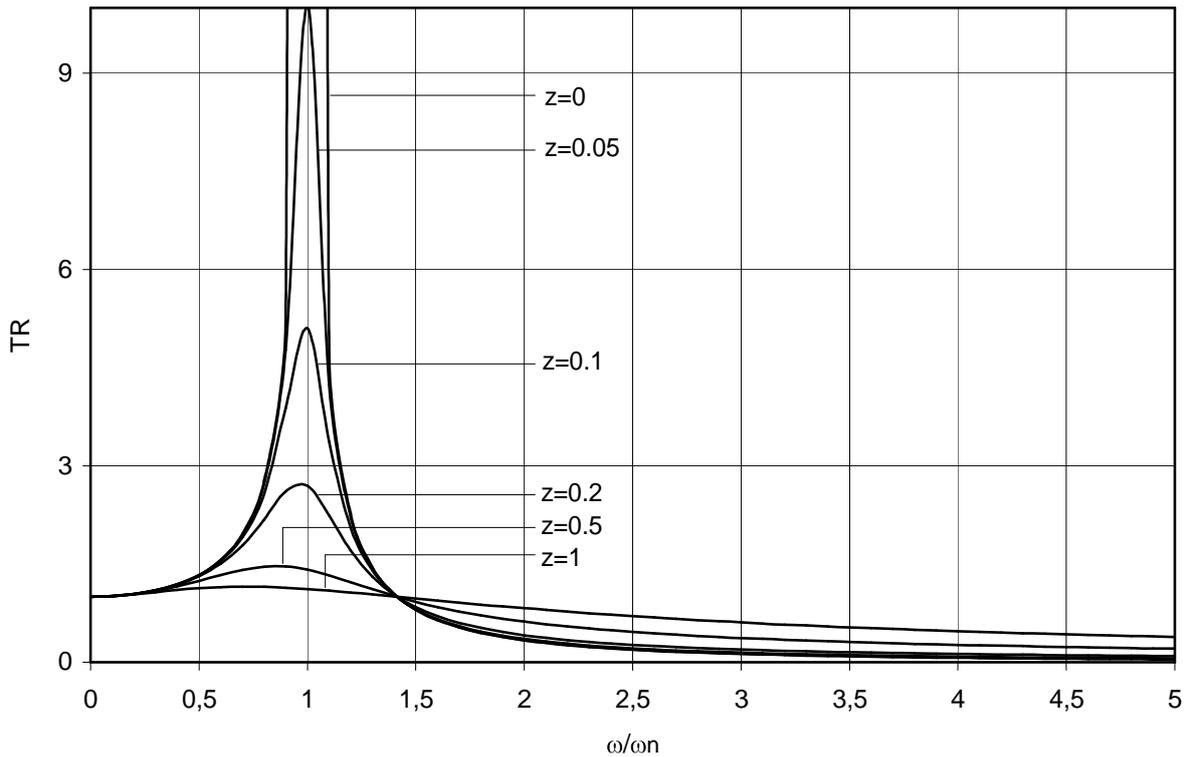


Fig. 7.14 Fattore di trasmissibilità ($z=0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1$)

Si può osservare che a basse pulsazioni della forzante ($\omega \ll \omega_n$) la forza trasmessa al vincolo è sostanzialmente uguale a quella forzante ($TR=1$); per valori crescenti della pulsazione si aumenta la forza trasmessa e se il fattore di smorzamento z è piccolo, l'ampiezza di tale forza può diventare molto grande per $\omega \cong \omega_n$ (infinita se $z=0$). Ad alti valori della pulsazione della forzante ($\omega \gg \omega_n$) la forza trasmessa diminuisce e tende a zero al tendere di ω all'infinito. L'andamento della (7.12) è dunque simile a quello della (7.11), ma con una differenza importante per le applicazioni: come si vede dalla Fig. 7.14 per valori di $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$, l'effetto del fattore z sul decremento delle curve si inverte rispetto a quanto si vede nella Fig. 7.9; in altri termini, mentre dalla Fig. 7.9 si osserva che per limitare l'ampiezza delle oscillazioni è sempre opportuno avere elevati smorzamenti, nel caso della Fig. 7.14 si vede che uno smorzamento elevato è conveniente solo fino a che $\omega/\omega_n < \sqrt{2}$. Questo fatto si comprende considerando che quando la velocità angolare ω è grande viene trasmessa una grande forza attraverso lo smorzatore, data da $c\dot{x} = c\omega X_f \cos(\omega t + \varphi_f)$, che non è completamente compensata dalla riduzione di ampiezza delle oscillazioni conseguente all'effetto filtro degli spostamenti che ha il sistema alle alte frequenze.

Quando la trasmissibilità è inferiore a 1 l'ampiezza della forza trasmessa al vincolo è minore dell'ampiezza della forzante: questo fenomeno avviene quando $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$ ed è detto *isolamento attivo* dalle vibrazioni. Perché ciò avvenga è necessario dotare il sistema di una frequenza naturale "bassa" rispetto a quella della forzante. In tale caso una molla da sola produce un'attenuazione della forza trasmessa maggiore di quella che si ottiene inserendo anche uno smorzatore. Va però tenuto presente che quando la ω dell'eccitazione dovesse passare, anche solo saltuariamente, nella zona di risonanza sarebbe comunque utile avere un certo smorzamento per limitare l'ampiezza delle vibrazioni all'attraversamento di questa zona.

Per realizzare l'isolamento attivo si trovano in commercio appositi *supporti antivibranti*, costituiti da elementi elastici, predisposti per il montaggio tra la macchina e la fondazione (Fig. 7.15). I supporti possono essere fatti di vari materiali, ma i più comuni sono in gomma (mescole a base di elastomeri con additivi antinvecchiamento, autoestinguenti, resistenti agli agenti atmosferici) o in metallo (molle di acciaio). Possono essere anche di tipo pneumatico (molle ad aria).

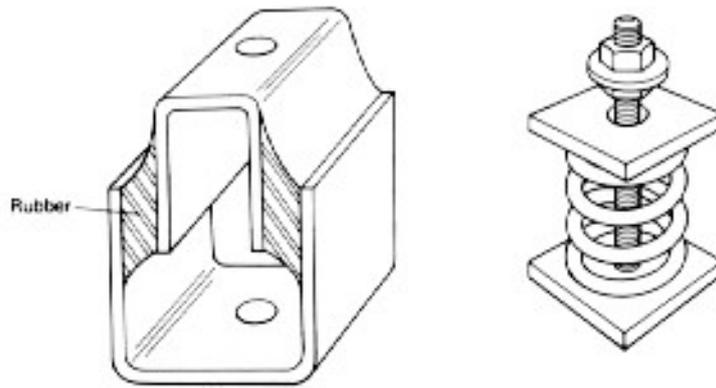


Fig. 7.15 Supporti antivibranti in gomma e in metallo

ESEMPIO

Una macchina di massa $M=2000$ kg è sottoposta ad una forza verticale sinusoidale con frequenza $f=4$ Hz e ampiezza $F_0=750$ N. Si vuol montare la macchina su 4 supporti antivibranti con smorzamento trascurabile in due casi: nel primo si vuol avere $\omega/\omega_n=2$, nel secondo $\omega/\omega_n=4$. In entrambi i casi si vogliono calcolare:

- la rigidezza di ciascun supporto;
- la deformazione statica dei supporti;
- il fattore di trasmissione delle forze;
- l'ampiezza di oscillazione della macchina.

Il modello del sistema è quello di Fig. 7.8, con la molla che corrisponde ai supporti antivibranti montati in parallelo.

Alla frequenza $f=4$ Hz della forzante corrisponde la pulsazione $\omega=25$ rad/s. Nella prima condizione ($\omega/\omega_n=2$), si ha: $\omega_n=\omega/2=12.5$ rad/s, $k=M\omega_n^2=312500$ N/m. Questa costante elastica equivale a quella dei 4 supporti in parallelo sui quali è montata la macchina, per cui la costante elastica di ogni supporto è $k_1=k/4=78$ kN/m. La deformazione statica dei supporti X_s è data dal rapporto fra il peso della macchina Mg e la costante elastica complessiva k , cioè $X_s=Mg/k=0.063$ m. Il fattore di trasmissione delle forze TR si ricava dalla (7.12) ponendo $z=0$ e risulta $TR=0.33$. L'ampiezza di oscillazione della macchina si ricava dalla (7.10), sempre con $z=0$ e risulta $X_0=0.8$ mm. I risultati sono riassunti nella prima riga della tabella seguente.

3

| Caso | ω_n | k (N/m) | k_1 (kN/m) | X_s (mm) | TR | X_0 (mm) |
|-----------------------------|------------|-----------|--------------|------------|-------|------------|
| $M=2000, \omega/\omega_n=2$ | 12.5 | 312500 | 78 | 63 | 0.33 | 0.8 |
| $M=2000, \omega/\omega_n=4$ | 6.25 | 78125 | 19.5 | 251 | 0.067 | 0.64 |
| $M=8000, \omega/\omega_n=2$ | 12.5 | 1250000 | 312 | 63 | 0.33 | 0.2 |

Ripetendo il calcolo per la seconda condizione ($\omega/\omega_n=4$), si ottengono i risultati riportati nella seconda riga della tabella. Confrontando i valori numerici si osserva che il secondo supporto riduce molto di più la forza trasmessa (di circa 5 volte), ma che aumenta la deformazione statica di quattro volte portandola a 251 mm, il che può essere eccessivo. L'ampiezza delle oscillazioni non è molto diversa nei due casi.

Si ponga ora la macchina su un basamento di cemento di massa $M'=6000$ kg, cosicché la massa vibrante totale diventi $M+M'=8000$ kg. Ripetendo i calcoli per $\omega/\omega_n=2$ si trovano i valori riportati nell'ultima riga della tabella. L'aggiunta della massa del basamento che ha quadruplicato la massa iniziale richiede supporti quattro volte più rigidi. La deformazione statica non è modificata, né lo è il fattore di trasmissibilità, ma l'ampiezza delle oscillazioni si è ridotta di quattro volte rispetto alla situazione iniziale.

ESEMPIO

Un compressore monocilindrico di massa $M=500$ kg ruota a regime a velocità $n=1500$ giri/min e deve essere montato su 4 supporti antivibranti. Sono disponibili a catalogo due tipi di supporti (un tipo in gomma, uno in metallo), le cui caratteristiche elastiche (k) e viscosi (c) sono riportate in tabella. Si devono scegliere i supporti in modo che il rapporto fra frequenza della forzante e frequenza naturale della macchina montata sui supporti (ω/ω_n) sia maggiore di 3. Discutere il comportamento dei diversi supporti riportati in tabella.

| | IN GOMMA | | METALLICI | |
|---|----------|----------|-----------|----------|
| | k (kN/m) | c (Ns/m) | k (kN/m) | c (Ns/m) |
| 1 | 250 | 2000 | 75 | 110 |
| 2 | 500 | 1800 | 150 | 115 |
| 3 | 1000 | 1500 | 250 | 140 |
| 4 | 1800 | 1000 | 500 | 160 |
| 5 | 2500 | 500 | 750 | 200 |

La rotazione del compressore a velocità di regime n fa nascere forze inerziali periodiche. Queste possono essere scomposte in una somma di forze sinusoidali la cui prima armonica ha pulsazione $\omega = 2\pi n/60 = 157$ rad/s. Il modello della macchina è ancora quello di Fig. 7.8 in cui la massa è quella del compressore; la costante elastica k_e è 4 volte quella del supporto scelto (le elasticità dei 4 supporti sono in parallelo); la costante viscosa c_e è 4 volte quella del supporto scelto (gli smorzamenti dei 4 supporti sono in parallelo).

Per ogni tipo di supporto scelto si possono calcolare la pulsazione naturale $\omega_n = (k_e/M)^{0.5} = (4k/M)^{0.5}$, il fattore di smorzamento $z = c_e/2(k_e M)^{0.5} = 4c/2(4kM)^{0.5}$; il fattore di trasmissione delle forze TR è calcolato con la (7.12). I risultati dei calcoli sono riportati in tabella.

| | IN GOMMA | | | | METALLICI | | | |
|---|--------------------|------|-------------------|------|--------------------|-------|-------------------|-------|
| | ω_n (rad/s) | z | ω/ω_n | TR | ω_n (rad/s) | z | ω/ω_n | TR |
| 1 | 45 | 0.18 | 3.51 | 0.14 | 24 | 0.018 | 6.41 | 0.026 |
| 2 | 63 | 0.11 | 2.48 | 0.22 | 35 | 0.013 | 4.53 | 0.051 |
| 3 | 89 | 0.07 | 1.76 | 0.49 | 45 | 0.012 | 3.51 | 0.088 |
| 4 | 120 | 0.03 | 1.31 | 1.40 | 63 | 0.010 | 2.48 | 0.19 |
| 5 | 141 | 0.01 | 1.11 | 4.24 | 77 | 0.010 | 2.03 | 0.32 |

I risultati mostrano che per tutti i supporti, ad eccezione dei n. 4 e 5 in gomma, si ha $\omega > 1.41\omega_n$ e quindi il fattore di trasmissione è inferiore all'unità: si ha cioè isolamento attivo. I supporti che rispettano la condizione $\omega/\omega_n > 3$ sono il n. 1 fra quelli in gomma e 1, 2, 3, fra quelli metallici. I supporti metallici forniscono miglior TR in quanto il loro smorzamento è nettamente minore. Il supporto n. 3 in metallo è adeguato per l'applicazione, ma è certamente più costoso di quello in gomma. La sua deformazione statica sotto il peso della macchina è $mg/4k = 4.9$ mm.

7-3.3 VIBRAZIONI DI ROTORI SBILANCIATI

In questo caso la forzante F agente su un sistema meccanico è dovuta a fenomeni inerziali generati o da masse che sono soggette a moto non uniforme, o da masse rotanti il cui baricentro non coincide con l'asse di rotazione (si veda il capitolo 8). Due sistemi di questo tipo sono schematizzati in Fig. 7.16.

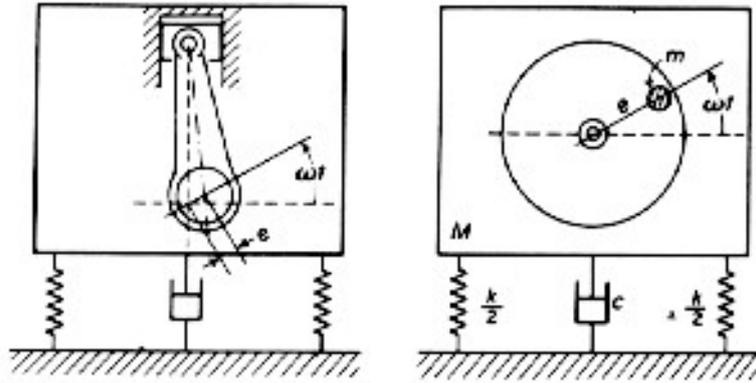


Fig. 7.16 Inerzie non bilanciate su supporti elastici

Nel primo sistema, che rappresenta un cilindro di un motore a combustione interna la forzante è costituita dal moto alternativo del pistone (il moto alternativo è, per definizione, non uniforme quindi produce effetti inerziali); nel secondo sistema la rotazione di un *rotore* non bilanciato (il cui baricentro non coincide con l'asse di rotazione) diventa sorgente della forza eccitante. I motori elettrici, le turbine, gli alberi a gomiti dei motori a combustione interna, le pompe, i ventilatori, le ruote dei veicoli, sono esempi tipici di inerzie rotanti che possono essere sbilanciate. L'analisi dinamica sarà effettuata per il secondo sistema in Fig. 7.16, ma i risultati possono essere applicati anche al primo.

Il rotore in Fig. 7.16 ha massa m , ruota con velocità angolare costante Ω ed il suo baricentro non coincide con l'asse di rotazione (il rotore è *eccentrico* con *eccentricità* e). La massa complessiva della macchina è M . La parte non rotante della macchina (*statore*) ha massa $M-m$

Per effetto dell'eccentricità nasce una forza inerziale centrifuga diretta dal centro di rotazione al baricentro del rotore, di intensità $e m \Omega^2$. La proiezione di questa forza in verticale costituisce la forzante del sistema ed è pari, in un istante generico, a $e m \Omega^2 \sin(\Omega t)$. La macchina, nel suo complesso ha massa M ; la sua posizione è definita dalla variabile x . L'equazione di moto della macchina è dunque

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\Omega^2 \sin(\Omega t) \quad (7.13)$$

Si può trovare la risposta a regime del sistema con rotore sbilanciato usando la soluzione (7.10) dell'equazione (7.8), che è identica alla (7.13) ove si ponga $F_0 = me\Omega^2$: si ottiene

$$X_f = \frac{me\Omega^2 / k}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2z \frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

avendo ora

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

Si può anche scrivere in forma adimensionale

$$\frac{X_f M}{em} = \frac{\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2z \frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (7.14)$$

il cui grafico è riportato in Fig. 7.17.

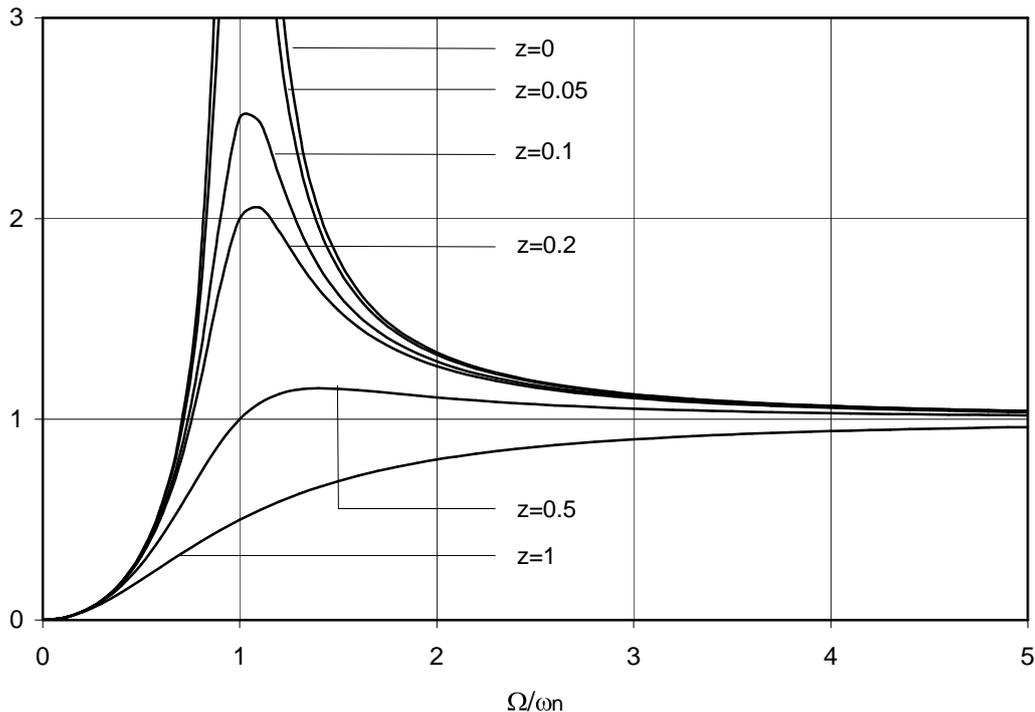


Fig. 7.17 Risposta in frequenza per rotore sbilanciato ($z=0, 0.1, 0.2, 0.25, 0.5, 1$)

Si può notare l'evidente differenza di questo grafico rispetto a quello della risposta in frequenza per forzante sinusoidale (Fig. 7.9) dovuta al fatto che in questo caso l'intensità della forzante non è costante, ma è dipendente da Ω . A basse velocità angolari i valori delle ampiezze di oscillazione sono piccoli e tendono a zero con Ω : infatti la forza di inerzia è piccola (al limite nulla) e la macchina non ne risente gli effetti; aumentando la velocità angolare aumentano gli effetti inerziali dovuti all'eccentricità e contemporaneamente la dinamica del sistema favorisce l'aumento delle oscillazioni, fino ad avere condizioni di risonanza (se lo smorzamento lo consente); per valori molto elevati della velocità angolare (al limite per valori che tendono ad infinito) le forze di inerzia diventano molto grandi (al limite infinite di ordine 2) mentre il sistema massa + elasticità si comporta come un filtro passabasso (di ordine 2) e tende ad annullare le oscillazioni. I due fenomeni, crescita dell'ampiezza della forzante con Ω^2 e decremento dell'ampiezza delle oscillazioni della macchina con Ω^2 , si compensano per cui l'effettiva ampiezza X_f del movimento verticale del corpo della macchina per Ω tendente ad infinito tende a em/M . Non è difficile dimostrare che questo corrisponde ad un movimento in cui il baricentro dell'intera macchina (di massa M) resta fermo, mentre il baricentro del rotore e dello statore si muovono con versi fra loro opposti.

7-3.4 VELOCITÀ CRITICHE

Un caso importante di analisi delle vibrazioni dovute a forze di inerzia sbilanciate si incontra quando la massa totale M del sistema vibrante e la massa m del rotore coincidono. Questo modello può essere applicato per esempio quando un rotore con albero deformabile è supportato rigidamente dallo statore a sua volta rigidamente connesso al telaio. In tal caso infatti la massa del rotore coincide con la massa vibrante. In un modello a parametri concentrati si può considerare un rotore rigido di massa m montato su un albero deformabile di massa trascurabile. La Fig. 7.18 riporta uno schema di questo modello.

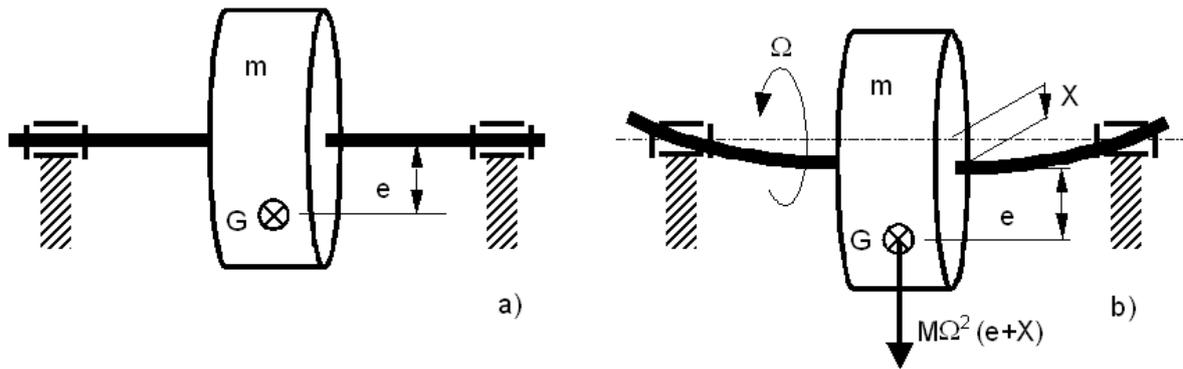


Fig. 7.18 Rotore su albero elastico

In figura il baricentro del rotore è spostato di e rispetto al suo centro geometrico, sul quale è fissato l'albero. Quando il rotore è fermo l'albero (a meno dell'effetto del peso) non è deformato ed assume configurazione orizzontale (Fig. 7.18-a). Quando il rotore ruota, a causa dell'eccentricità nasce una forza centrifuga che sposta il centro del rotore di una quantità X rispetto alla posizione indeformata e fa deformare l'albero della stessa quantità (Fig. 7.18-b), cosicché l'albero si comporta come una molla che si oppone alla forza centrifuga. L'espressione dell'ampiezza dello spostamento X può essere ricavata immediatamente dalla (7.14) ponendo $m=M$.

$$\frac{X_f}{e} = \frac{\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2z \frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

La pulsazione naturale $\omega_n=(k/m)^{0.5}$ è calcolata a partire dalla costante k dell'albero che è schematizzato come una trave soggetta a flessione, vincolata in modo congruente con i vincoli fra telaio e albero (vedi cap. 7.3.1). Il relativo grafico in funzione di ω/ω_n , è identico a quello di Fig. 7.17. Dato che nel modello di Fig. 7.18 lo smorzamento delle vibrazioni può derivare solo dagli attriti interni al materiale costituente l'albero e che questi sono spesso molto bassi (z attorno a qualche centesimo), si può considerare valido per la determinazione di X il grafico con $z=0$, di Fig. 7.18, per il quale valgono conclusioni analoghe a quelle riportate al capitolo 7-3.3 e qui riassunte:

- esiste un valore della velocità angolare per il quale lo spostamento del rotore diventa infinito (questo vale per il modello lineare che è stato adottato: in realtà una macchina reale si romperebbe o comunque si danneggerebbe prima di arrivare a questa condizione): la velocità angolare per la quale si ha questo effetto viene detta *velocità critica* ω_{crit} e coincide con la pulsazione naturale del sistema albero + rotore, per cui $\omega_{crit}=(k/m)^{0.5}$;
- per basse velocità angolari la deformazione dell'albero è piccola e cresce con la velocità fino a ω_{crit} , dove (teoricamente) diventa infinita; il campo di funzionamento in cui $\omega < \omega_{crit}$ è chiamato *zona subcritica*;
- per velocità angolari superiori alla velocità critica la deformazione dell'albero decresce con la velocità e tende al valore dell'eccentricità per velocità molto elevate; il campo di funzionamento in cui $\omega > \omega_{crit}$ è chiamato *zona ipercritica*.

Una macchina può funzionare in zona subcritica o in zona ipercritica, ma comunque deve ruotare con velocità sufficientemente diversa dalla velocità critica. Per avere piccola deformazione X nel caso di funzionamento ipercritico occorre che l'eccentricità sia piccola. Inoltre una macchina che funzioni in zona ipercritica dovrà passare per la velocità critica quando viene avviata. Per evitare che si producano oscillazioni eccessive è necessario che il passaggio avvenga molto rapidamente, ragion per cui la macchina deve avere elevata accelerazione. Inoltre è conveniente che il passaggio per la velocità critica non avvenga ripetutamente durante il funzionamento, il che comporta che la

macchina funzioni normalmente in condizione di regime piuttosto che di moto vario e che la velocità di regime sia sufficientemente più elevata della velocità critica.

7-3.5 VIBRAZIONI INDOTTE DAL MOVIMENTO DEL VINCOLO. ISOLAMENTO PASSIVO

Nelle analisi effettuate in precedenza si è sempre ammesso che il vincolo del sistema elastico fosse fisso. In realtà al vincolo può essere impresso un movimento da altre parti della macchina o per effetto del moto dei motori o per effetto delle vibrazioni di altre parti della macchina. Il modello del sistema vibrante deve dunque essere generalizzato in modo da comprendere almeno la traslazione del vincolo rispetto ad un riferimento fisso.

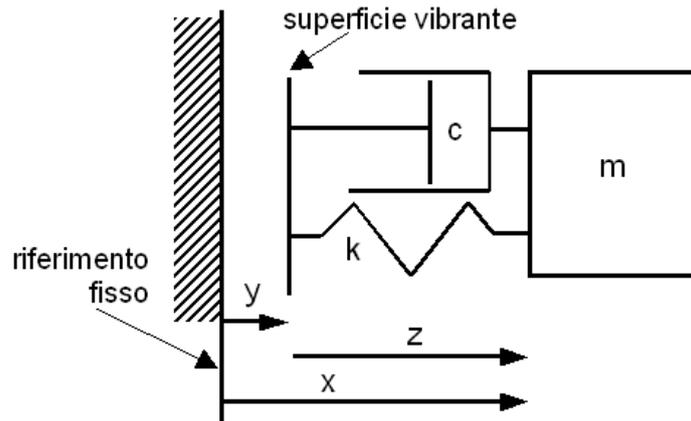


Fig. 7.19 Spostamento del vincolo

In Fig 7.19 sono indicati con y lo spostamento di traslazione del vincolo rispetto ad un riferimento fisso, con x lo spostamento di traslazione della massa rispetto allo stesso riferimento. L'equazione di moto si ottiene nel modo consueto osservando che: la deformazione della molla è data da $x-y$, quindi la forza che la molla esercita sulla massa è $-k(x-y)$; la velocità di deformazione dello smorzatore è data da $\dot{x} - \dot{y}$, quindi la forza che lo smorzatore esercita sulla massa è $-c(\dot{x} - \dot{y})$; si ottiene dunque

$$-c(\dot{x} - \dot{y}) - k(x - y) = m\ddot{x}$$

e, riordinando i termini,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y}$$

Se ora si ammette che il vincolo si sposti sinusoidalmente con legge $y = Y_f \sin(\omega t)$ e che pertanto la velocità del vincolo sia $\dot{y} = \omega Y_f \cos(\omega t)$, l'equazione di moto che si ottiene è

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kY_f \sin(\omega t) + c\omega Y_f \cos(\omega t)$$

Il sistema è lineare e si possono studiare separatamente i due movimenti con forzante sinusoidale:

$$m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 = kY_f \sin(\omega t)$$

$$m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + kx_2 = c\omega Y_f \cos(\omega t)$$

e sovrapporre poi gli effetti e ottenere la soluzione $x = x_1 + x_2$.

Le soluzioni particolari (moto a regime) delle due equazioni possono essere determinate come si è visto per la (7.8) e i risultati sono poi sommati essendo il sistema lineare, ottenendo la soluzione particolare complessiva

$$x_f = X_{f1} \sin(\omega t + \varphi_{f1}) + X_{f2} \cos(\omega t + \varphi_{f2}) = X_f \sin(\omega t + \varphi_f),$$

con $X_f = [(X_{f1})^2 + (X_{f2})^2]^{0.5}$. Usando la (7.10) per determinare $X_{f1} \sin(\omega t + \varphi_{f1}) + X_{f2} \cos(\omega t + \varphi_{f2})$ e sviluppando i calcoli, si ottiene

$$\frac{X_f}{Y_f} = \sqrt{\frac{1 + \left(2z \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2z \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (7.15)$$

L'espressione appena trovata è identica a quella del fattore di trasmissibilità (7.12). La discussione porta ancora a concludere che è possibile ridurre l'ampiezza dello spostamento trasmesso dal vincolo alla massa m (*isolamento passivo* dalle vibrazioni) quando $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$. Anche in questo caso non è necessario avere elevati smorzamenti.

7-3.6 ACCELEROMETRO

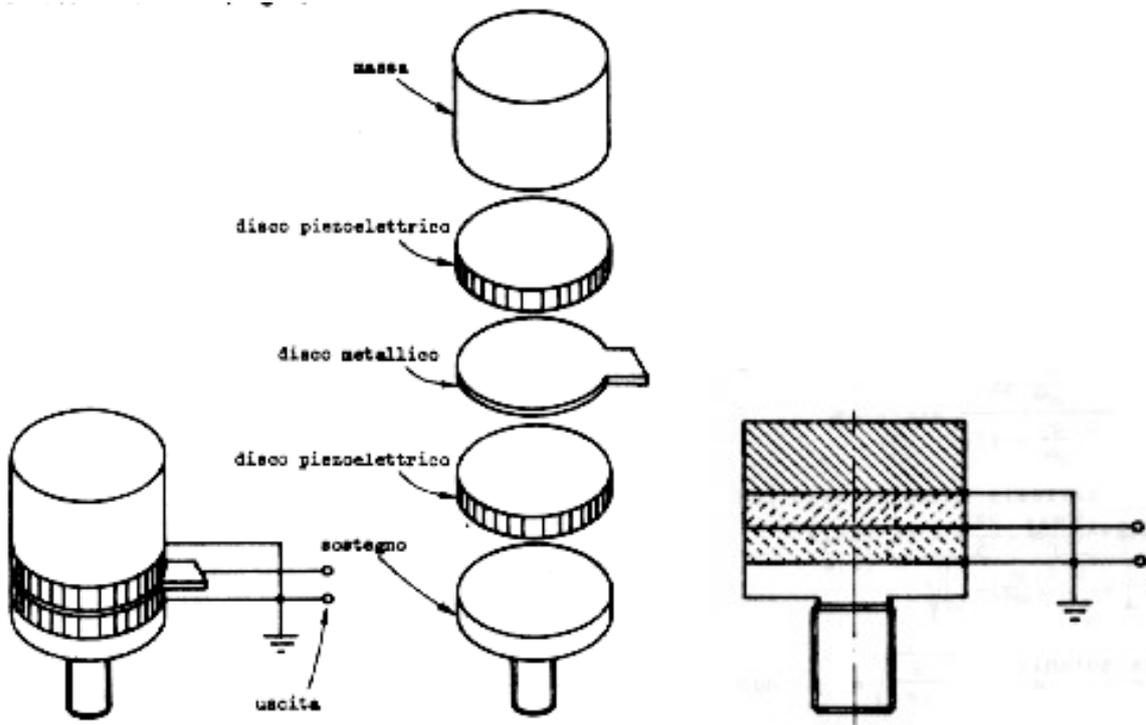


Fig. 7.20 Accelerometro

La Fig. 7.20 presenta un esempio di strumento per la misura delle vibrazioni: si tratta di un *accelerometro* che viene utilizzato per misurare le accelerazioni di una superficie vibrante senza utilizzare un riferimento fisso. E' costituito da una base predisposta per il collegamento alla superficie vibrante, da una massa (detta sismica) e da un elemento piezoelettrico, interposto fra la base e la massa sismica, costituito da due dischi sovrapposti di quarzo. Le oscillazioni relative fra la base e la massa deformano il materiale piezoelettrico generando una differenza di tensione fra le sue basi. Nel semplice caso qui esaminato si ammette che il materiale piezoelettrico possa subire sia compressioni che dilatazioni.

Dato che le deformazioni del materiale piezoelettrico determinano variazioni di tensione elettrica fra le sue basi che possono essere amplificate e misurate con adeguati strumenti, è necessario trovare la relazione fra le accelerazioni delle vibrazioni della superficie a cui l'accelerometro è collegato e le deformazioni indotte nel materiale dalle interazioni fra il movimento della base e della massa sismica. Il corrispondente modello si trova immediatamente ricorrendo allo schema di sistema con eccitazione per spostamento del vincolo (fig. 7.19), dove lo spostamento del vincolo $y(t)$ (rispetto ad un riferimento assoluto) è quello della superficie vibrante della macchina a cui lo strumento è applicato, lo spostamento $x(t)$ è quello della massa sismica, lo spostamento $z(t)$ è quello relativo fra massa e superficie vibrante (cioè lo schiacciamento del materiale piezoelettrico). In questo caso occorre mettere in relazione la variabile z (che rappresenta la deformazione del quarzo)

con la derivata seconda di y (l'accelerazione che si vuol misurare con lo strumento)

L'equazione di moto della massa è ancora

$$-c(\dot{x} - \dot{y}) - k(x - y) = m\ddot{x}$$

che viene espressa in funzione di $z=x-y$ e di y

$$-c\dot{z} - kz = m\ddot{z} + m\ddot{y}$$

ovvero, riordinando i termini

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y}$$

Per spostamento sinusoidale della superficie vibrante, $y=Y_f \sin(\omega t)$, l'accelerazione dello stesso è $\ddot{y} = -\omega^2 Y_f \sin(\omega t) = -A_f \sin(\omega t)$, avendo indicato con A_f l'ampiezza dell'accelerazione della superficie vibrante che si vuol misurare. Pertanto l'equazione di moto è

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = mA_f \sin(\omega t)$$

Questa relazione è identica alla (7.8) purché al posto della forzante di ampiezza F_0 si consideri una forzante di ampiezza mA_f . La relazione tra ampiezza dell'accelerazione A_f e ampiezza della deformazione del quarzo Z è deducibile dalla (7.10)

$$Z_f = \frac{A_f / \omega_n^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2z \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad \varphi_f = a \tan \frac{2z\omega / \omega_n}{\left(\omega / \omega_n\right)^2 - 1} \quad (7.16)$$

il cui grafico è ancora dato dalla Fig. 7.9. Il campo di funzionamento dell'accelerometro sarà quello in cui il rapporto fra Z e A_f è praticamente costante, in modo che non vi siano significative distorsioni di ampiezza nella misura delle varie componenti sinusoidali di un generico segnale di ingresso periodico. Ciò, per bassi smorzamenti, è possibile solo per valori di ω decisamente inferiori a quelli della frequenza naturale dell'accelerometro, per cui un accelerometro deve avere una elevata pulsazione naturale. Dai grafici si può però vedere che per smorzamento $z=0.65-0.7$ la banda utile di frequenza per lo strumento è massima.

Considerazioni analoghe possono esser fatte per la fase, allo scopo di evitare distorsioni di fase.

Esempio

Calcolare la pulsazione naturale di un accelerometro con due dischi uguali (Fig. 7.20). Sono dati:

m , massa sismica = 50 g

t , spessore dei dischi piezoelettrici = 9 mm

D , diametro dei dischi piezoelettrici = 20 mm

E , modulo di elasticità del materiale piezoelettrico = 113 kN/mm²

La costante elastica di un disco piezoelettrico si calcola usando il modello di trave soggetta a trazione (capitolo 7-3.1) in cui la lunghezza della trave coincide con lo spessore t del disco e l'area della sezione è l'area della base del disco

$$k_1 = EA/L = E\pi D^2/(4t) = 3940 \text{ kN/mm}$$

La costante elastica equivalente ai due dischi in serie è

$$K = k_1/2 = 1970 \text{ kN/mm}$$

La pulsazione naturale del sistema è $\omega_n = (K/m)^{0.5} = 6280 \text{ rad/s}$, la frequenza naturale è 1000 Hz.

7-3.7 EFFETTI DELLE VIBRAZIONI

Le vibrazioni provocano effetti nocivi sull'uomo, sulle strutture e sulle macchine. Gli effetti delle vibrazioni sul corpo umano dipendono dalla loro frequenza. Le vibrazioni a frequenza molto bassa (1-2 Hz) provocano la cinetosi, comunemente detta mal di mare o mal d'auto; quelle a bassa frequenza (2-20 Hz) provocano una distorsione delle normali risposte biologiche e psicofisiologiche agli stimoli, quali alterazioni osteoarticolari, disturbi cardiocircolatori, affezioni all'apparato digerente; le vibrazioni ad alta frequenza (oltre 20 Hz) determinano lesioni osteoarticolari e artrosi. La Fig. 7.21 riporta i tempi limite di tollerabilità per l'esposizione a vibrazioni in funzione della

loro frequenza e ampiezza. In ordinate è riportato il valore quadratico medio (RMS) della vibrazione. A seconda del tempo di esposizione alla vibrazione e della frequenza cambia l'ampiezza sopportabile. Si noti che:

- vibrazioni a basse o ad alte frequenze sono più tollerabili di vibrazioni a frequenze intermedie;
- si possono sopportare ampiezze maggiori per tempi inferiori.

Gli effetti delle vibrazioni sulle macchine devono essere valutati caso per caso. Il linea di largha massima si possono dare indicazioni qualitative per verificare se le vibrazioni di una macchina rientrano nella norma o se devono essere considerate eccessive. La Fig. 7.22 fa riferimento al valore quadratico medio (RMS) della velocità di vibrazione per alcuni tipi di macchina, riportando gli intervalli di valori per i quali la macchina funziona in condizioni buone, accettabili o limite. I quattro tipi di macchina corrispondono a : 1) singoli componenti; 2) macchine di dimensioni e potenza media (motori elettrici da 15 a 75 kW e macchine in genere fino a 300 kW); 3) macchine su fondazioni rigide; 4) macchine con masse sbilanciate o su fondazioni con pulsazione naturale inferiore alla velocità angolare della macchina. Per esempio il funzionamento di un componente meccanico (tipo 1) è buono se la velocità di vibrazione (RMS) è inferiore a 0.7 mm/s, è accettabile se inferiore a 1.8 mm/s, è al limite di tollerabilità se arriva a 4.5 mm/s.

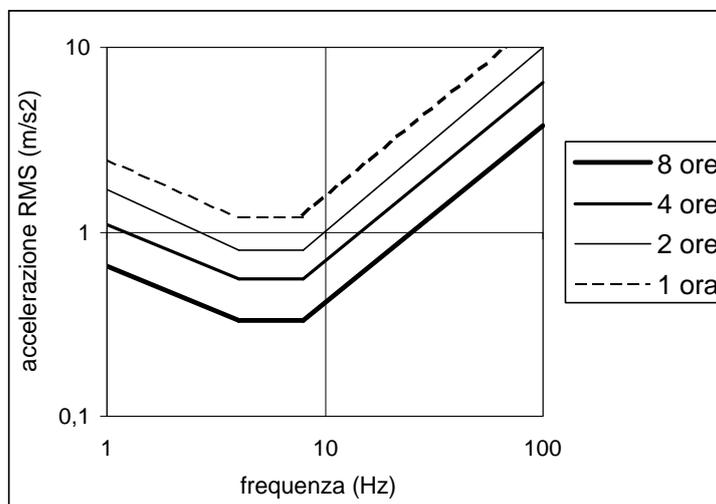


Fig. 7.21 Limiti di esposizione alle vibrazioni

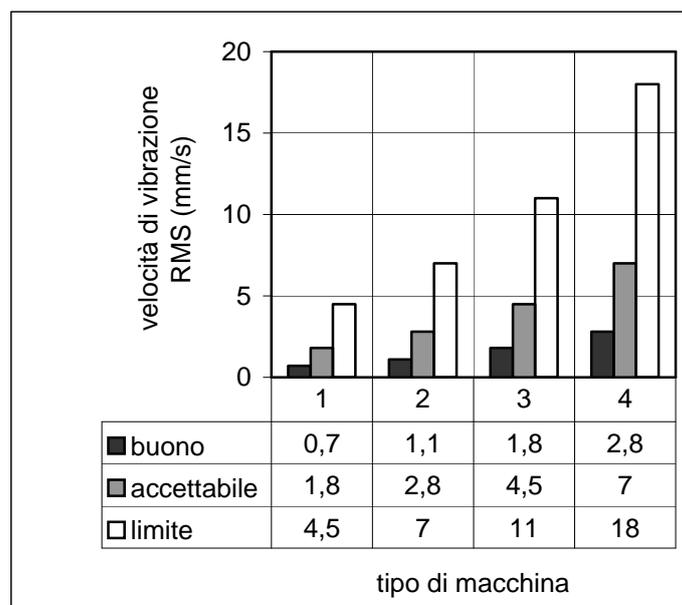


Fig. 7.22 Livelli ammissibili di vibrazione per tipi di macchine

7-4 Sistemi rotanti

Lo studio delle vibrazioni presentato nei capitoli precedenti ha sempre fatto riferimento a sistemi con masse traslanti mentre nelle macchine si hanno anche vibrazioni di sistemi rotanti e rototraslanti. Se si considera lo schema motore rotante e carico rotante a cui si è spesso fatto riferimento, è evidente che le parti di collegamento fra motore e carico possono deformarsi e introdurre un effetto elastico che origina vibrazioni. Molto spesso fra motore e carico si interpongono giunti elastici (esaminati in un successivo capitolo) che, grazie alla loro elasticità, hanno lo scopo di diminuire la trasmissione di picchi di forza, ma che possono originare vibrazioni. Lo studio delle vibrazioni di sistemi rotanti ad un grado di libertà con asse di rotazione fisso è del tutto analogo a quello dei sistemi traslanti: basta sostituire alla massa m (kg) il momento di inerzia J (kg m^2) del corpo attorno al suo asse di rotazione, alla costante elastica k (N/m) la costante elastica torsionale k_t (Nm/rad), al coefficiente di smorzamento c (Ns/m) il coefficiente di smorzamento torsionale c_t (Nms/rad). Con queste sostituzioni si possono trasformare le relazioni trovate per i sistemi traslanti in relazioni dei corrispondenti sistemi rotanti. Per esempio il sistema di Fig. 7.4 assume l'aspetto di Fig. 7.23, la sua l'equazione di moto diventa

$$J\ddot{\theta} + k_t\theta = 0$$

e la definizione di pulsazione naturale è

$$\omega_n = (k_t/J)^{0.5}$$

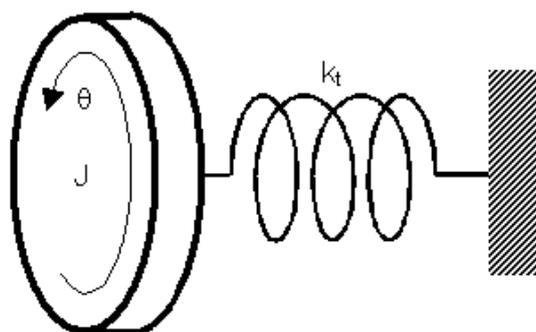


Fig. 7.23 Sistema rotante con elasticità ed inerzia

7-5 Sistemi a più gradi di libertà

Nelle stesse ipotesi discusse precedentemente, la posizione dei corpi di un sistema a n gradi di libertà viene espressa da n variabili x_1, x_2, \dots, x_n , e si possono scrivere n equazioni differenziali lineari di moto aventi come variabili le x_i e le loro derivate prime e seconde. In assenza di forze esterne (*sistema libero*) e senza smorzamenti (*sistema non smorzato*) la soluzione delle equazioni può essere ricavata facilmente e si ottengono i seguenti risultati

- il movimento di ciascuna variabile è dato dalla sovrapposizione di n oscillazioni sinusoidali:
$$x_1 = X_{11} \sin(\omega_1 t + \phi_1) + X_{12} \sin(\omega_2 t + \phi_2) + \dots + X_{1n} \sin(\omega_n t + \phi_n)$$
$$x_2 = X_{21} \sin(\omega_1 t + \phi_1) + X_{22} \sin(\omega_2 t + \phi_2) + \dots + X_{2n} \sin(\omega_n t + \phi_n)$$
$$\dots \dots$$
$$x_n = X_{n1} \sin(\omega_1 t + \phi_1) + X_{n2} \sin(\omega_2 t + \phi_2) + \dots + X_{nn} \sin(\omega_n t + \phi_n)$$
- esistono e si possono calcolare n valori delle *pulsazioni naturali* $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, che dipendono dalle caratteristiche elastiche e di massa del sistema, ma non dalle condizioni iniziali
- le ampiezze delle oscillazioni $X_{11}, X_{21}, \dots, X_{n1}$, sono determinate, a meno di una costante arbitraria, dalle caratteristiche del sistema; la costante arbitraria dipende dalle condizioni iniziali; lo stesso vale per le ampiezze $X_{12}, X_{22}, \dots, X_{n2}$, e così via per tutte le altre
- i gruppi di valori $\omega_1, X_{11}, X_{21}, \dots, X_{n1}$; $\omega_2, X_{12}, X_{22}, \dots, X_{n2}$; $\dots, \omega_n, X_{1n}, X_{2n}, \dots, X_{nn}$ sono detti *modi di vibrare* o *modi naturali* o *modi principali* del sistema.

Nel caso di oscillazioni forzate con forzante sinusoidale con pulsazione ω la soluzione particolare delle equazioni di moto (corrispondente alla soluzione a regime) è data, per una generica variabile x_i , da

$$x_{fi} = X_{fi} \sin(\omega t + \phi_i)$$

e l'ampiezza di oscillazione X_{fi} è funzione di ω e delle $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$; essa tende ad infinito quando la pulsazione della forzante tende ad una qualunque delle pulsazioni naturali. Esistono pertanto n condizioni di risonanza.