

# Cap. 2 - FONDAMENTI DI CINEMATICA

- 2.1 Cinematica del moto rigido piano
- 2.2 Moto relativo fra i membri
- 2.3 Analisi di posizione, velocità, accelerazione
- 2.4 Sintesi dei meccanismi piani

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 – Cap. 2 - pag. 1

## 2.1 - CINEMATICA DEL MOTO RIGIDO PIANO

La cinematica consiste nello studio di posizioni, velocità, accelerazioni di un sistema di corpi interconnessi, che formano un meccanismo, indipendentemente dalle forze che producono il moto.

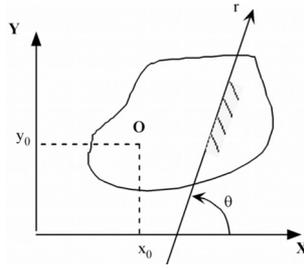
**ANALISI CINEMATICA** = trovare posizioni, velocità ed accelerazioni di punti di un assegnato meccanismo

**SINTESI CINEMATICA** = trovare la geometria e la struttura di un meccanismo per realizzare assegnate leggi di moto

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 – Cap. 2 - pag. 2

# DESCRIZIONE DEL MOTO RIGIDO PIANO

Definizione delle coordinate libere



$$\frac{d}{dt}x_0 = \dot{x}_0 = v_x$$

$$\frac{d}{dt}y_0 = \dot{y}_0 = v_y$$

$$\frac{d}{dt}\theta = \dot{\theta} = \omega$$

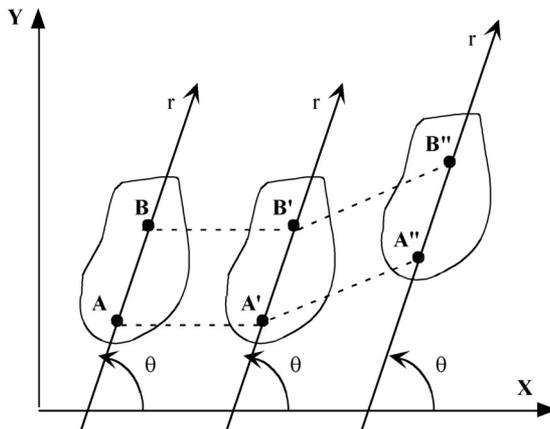
Le 3 coordinate  $x_0$ ,  $y_0$  e  $\theta$  individuano i 3 gradi di libertà che ha il corpo nel piano e dipendono dalla posizione del punto solidale al corpo O scelto come riferimento ( $x_0$  e  $y_0$ ) e dall'orientamento della retta di riferimento  $r$  (fissa al corpo) prescelta ( $\theta$ ).

Passando alle derivate delle coordinate, le **velocità lineari** dipendono ancora dal punto O prescelto (in generale, cioè,  $\dot{x}_0 \neq \dot{x}_O$ ,  $\dot{y}_0 \neq \dot{y}_O$ ) mentre ciò non accade per la derivata della coordinata angolare  $\theta$ , che viene chiamata **velocità angolare**  $\omega$ : essa, pertanto, non va riferita a nessun punto particolare ma caratterizza il moto dell'intero corpo.

Le stesse considerazioni valgono per le derivate seconde e cioè per le **accelerazioni lineari**  $a_x = \ddot{x}_0$ ,  $a_y = \ddot{y}_0$  e per l'**accelerazione angolare**  $\dot{\omega}$ .

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 - Cap. 2 - pag. 3

## MOTO TRASLATORIO



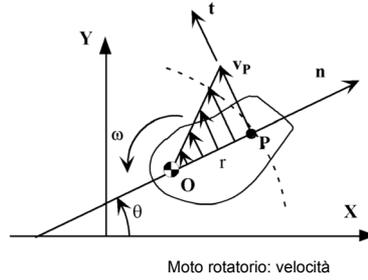
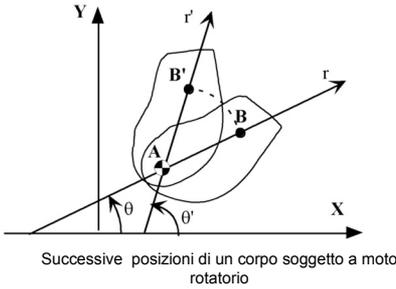
Successive posizioni di un corpo soggetto a moto traslatorio

Il moto si chiama **traslatorio** quando l'orientamento  $\theta$  del corpo rimane costante.

Nel moto traslatorio tutti i punti del sistema hanno la stessa velocità ed accelerazione.

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 - Cap. 2 - pag. 4

# MOTO ROTATORIO



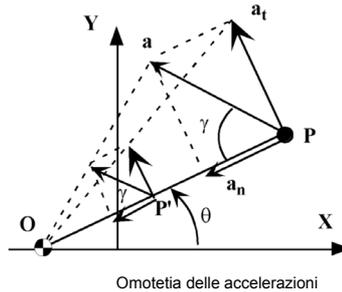
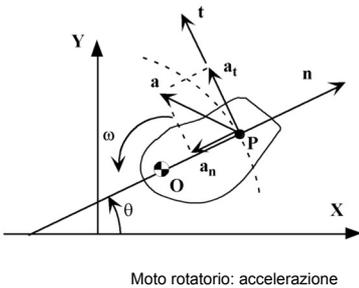
Quando un corpo rigido ruota attorno ad un asse fisso tutti i suoi punti si muovono su traiettorie circolari.

In questo caso è opportuno descrivere il moto con riferimento ad una terna cartesiana locale, definita dai versori  $\{t, n\}$ , che ha gli assi diretti secondo le direzioni normale e tangenziale relativamente al moto.

Ove sia necessario conoscere le grandezze cinematiche rispetto alla terna globale  $\{X, Y\}$  si operano le opportune trasformazioni di coordinate.

La velocità ha direzione tangenziale e vale:  $v_p = \omega \wedge (P - O) = \omega r t$

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 - Cap. 2 - pag. 5



L'accelerazione del punto P ha una componente centripeta ed una tangenziale, che valgono rispettivamente:

$$\begin{cases} a_{pn} = -\omega^2 (P - O) = -\omega^2 r n \\ a_{pt} = \dot{\omega} \wedge (P - O) = \dot{\omega} r t \end{cases}$$

Il modulo dell'accelerazione vale quindi:

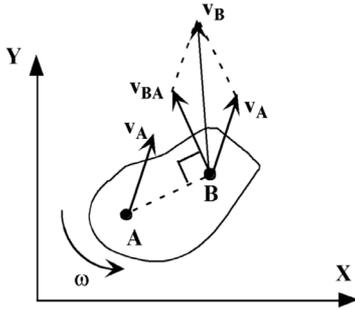
$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{\omega^4 + \dot{\omega}^2} r$$

e pertanto cresce linearmente con la distanza del punto considerato da O. La direzione dell'accelerazione, invece, è costante rispetto alla distanza da O del punto considerato (*omotetia*), e vale:

$$\tan \gamma = \frac{a_t}{a_n} = \frac{\dot{\omega}}{\omega^2}$$

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 - Cap. 2 - pag. 6

## MOTO GENERALE



Distribuzione delle velocità nel moto generale

Consideriamo un corpo in movimento ed osserviamo il moto di un suo punto da una postazione solidale al corpo stesso ma distinta, la quale sarà (in generale) traslante: tale moto non può essere che circolare in quanto la distanza tra i due punti non cambia. Pertanto il generico moto piano di un corpo rigido è una combinazione di una traslazione e di una rotazione, cioè è un moto di **rototraslazione**.

Nel caso generale (anche per moti spaziali) valgono le seguenti **distribuzioni di velocità ed accelerazioni** dei corpi rigidi:

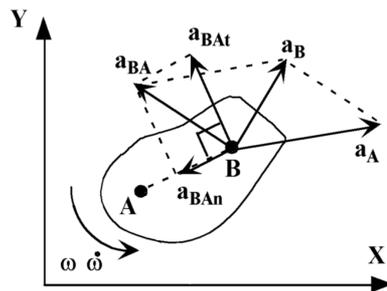
$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)$$

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)] + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P - O)$$

L'accelerazione, nel caso piano, si semplifica in:

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_O - \omega^2 (P - O) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P - O)$$

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 - Cap. 2 - pag. 7



Distribuzione delle accelerazioni nel moto generale

Le formule precedenti sono fondamentali per la cinematica e possono essere espresse mettendo in risalto in modo esplicito la velocità e l'accelerazione relative nel moto di un punto intorno all'altro.

**Teorema di Galileo**

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}$$

$$\rightarrow \mathbf{v}_{BA} = \boldsymbol{\omega} \wedge (B - A)$$

**Teorema di Rivals**

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}$$

$$\rightarrow \mathbf{a}_{BA} = \mathbf{a}_{BA_n} + \mathbf{a}_{BA_t}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}_{BA_n} = -\omega^2 (B - A) \\ \mathbf{a}_{BA_t} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (B - A) \end{cases}$$

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 - Cap. 2 - pag. 8

## CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE

Per spostamenti infinitesimi il punto del corpo rigido che non muta posizione si indica come **centro di istantanea rotazione C**.

Le velocità istantanee dei punti P del corpo rigido possono essere espresse in funzione del centro di istantanea rotazione C tramite la:

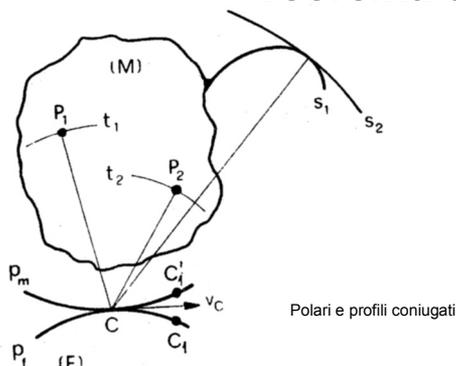
$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{C})$$

Il luogo dei punti occupati nel corso del moto dal centro di istantanea rotazione nel riferimento fisso si indica come **polare fissa** dello spostamento considerato. Il luogo dei punti occupati dal centro di istantanea rotazione nel riferimento locale (mobile) si indica come **polare mobile** dello spostamento considerato.

Lo spostamento effettivo del membro considerato provoca il *puro rotolamento* della polare mobile sulla polare fissa: le due polari risultano *tangenti fra loro* nei successivi punti di contatto, che rappresentano il centro di istantanea rotazione dell'istante considerato.

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 - Cap. 2 - pag. 9

## Teorema di Chasles



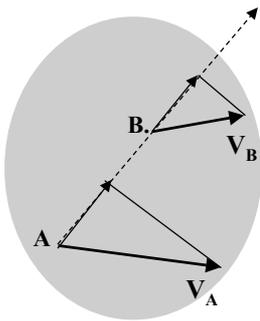
### PRIMA FORMULAZIONE

Le normali alle traiettorie dei punti della figura rigida mobile (M) in ogni istante concorrono nel centro della rotazione istantanea.

### SECONDA FORMULAZIONE

Se  $s_1$  è una qualsiasi linea rigida solidale con la (M) ed  $s_2$  è l'involuppo delle successive posizioni assunte da  $s_1$  durante il moto di (M), le due linee  $s_1$  ed  $s_2$  sono chiamate *profili coniugati*; ora si ha: le normali di contatto di tutti i profili coniugati in un medesimo istante si intersecano nel centro di istantanea rotazione.

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 - Cap. 2 - pag. 10



Se A e B appartengono allo stesso corpo rigido le componenti delle loro velocità secondo la congiungente AB sono uguali, infatti:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{A} - \mathbf{B})$$

$$\mathbf{v}_A \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{v}_B \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B})$$

$$\mathbf{v}_A \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{v}_B \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B})$$

(intuitivamente, se non fosse così la distanza tra A e B cambierebbe, il che contraddirebbe l'ipotesi di corpo rigido)

I punti Q della retta  $n$  normale alla velocità  $\mathbf{v}_P$  del punto P hanno velocità  $\mathbf{v}_Q$  con modulo:

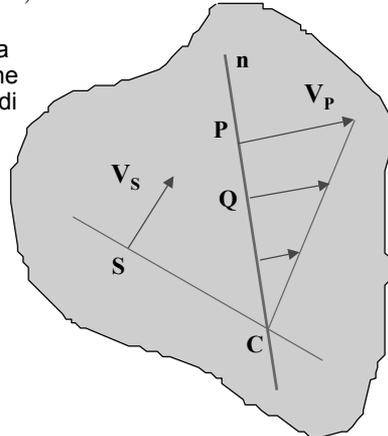
$$v_Q = v_P + \omega PQ$$

per cui esiste su  $n$  un punto C tale che  $v_C = 0$ :

$$v_C = v_P + \omega PC = 0 \quad PC = -\frac{v_P}{\omega}$$

Nota C, per qualsiasi altro punto S del corpo:

$$\mathbf{v}_S = \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{S} - \mathbf{C})$$



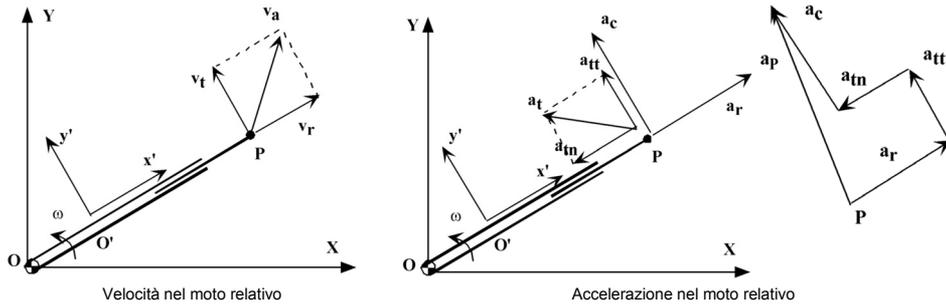
## PROPRIETA' GEOMETRICHE DEI PROFILI CONIUGATI

Valgono le seguenti proprietà:

- nel punto di contatto  $M$  i profili coniugati hanno tangente  $t$  e normale  $\mathbf{n}$  comune
- la normale  $\mathbf{n}$  passa per il centro di istantanea rotazione  $C$  (*teorema di Chasles*)
- se  $\boldsymbol{\omega}$  è la velocità angolare relativa dei due corpi, la velocità relativa fra i profili nel punto di contatto  $M$  vale:

$$\mathbf{v}_s = \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{M} - \mathbf{C})$$

## 2.2 - MOTO RELATIVO FRA I MEMBRI



Sia  $O \{X, Y\}$  una terna fissa e  $O' \{x', y'\}$  una terna mobile; il punto  $P$  sia in moto anche relativamente alla terna mobile  $O'$ . Il **moto assoluto** di  $P$  (cioè riferito alla terna  $O \{X, Y\}$ ) risulta somma del **moto relativo** (alla terna  $O'$ ) e del **moto di trascinamento** che il punto avrebbe se fosse solidale con il sistema di riferimento mobile; nel caso delle accelerazioni, compare anche una **accelerazione complementare** (detta anche **di Coriolis**).

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 - Cap. 2 - pag. 13

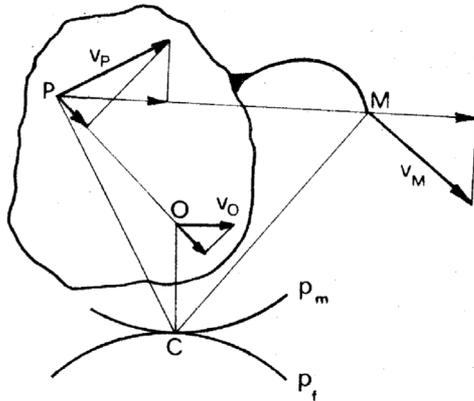
In formule:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_P &= \mathbf{v}_{Pr} + \mathbf{v}_{Pt} && \text{velocità assoluta} \\ &\rightarrow \mathbf{v}_{Pr} && \text{velocità relativa} \\ &\rightarrow \mathbf{v}_{Pt} = \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') && \text{velocità di trascinamento} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_P &= \mathbf{a}_{Pr} + \mathbf{a}_{Pt} + \mathbf{a}_{Pc} && \text{accelerazione assoluta} \\ &\rightarrow \mathbf{a}_{Pr} && \text{accelerazione relativa} \\ &\rightarrow \mathbf{a}_{Pt} = \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}')] + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') && \text{accelerazione di trascinamento} \\ &\rightarrow \mathbf{a}_{Pc} = 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_{Pr} && \text{accelerazione complementare o di Coriolis} \end{aligned}$$

**NOTA:** nel calcolo dell'accelerazione di Coriolis si usa la velocità angolare del corpo rispetto a cui si considera la velocità relativa

## CENTRO DEL MOTO RELATIVO



Primitive del moto

Nello studio dei meccanismi si esamina spesso il moto relativo di un membro rispetto ad un altro considerato fisso.

Le polari prendono il nome di **primitive** se si riferiscono al moto relativo di 2 membri entrambi in moto rispetto al telaio ed il centro di istantanea rotazione assume il nome di **centro del moto relativo**.

Anche in questo caso valgono le proprietà già enunciate nel caso del moto di un corpo rigido.

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 - Cap. 2 - pag. 15

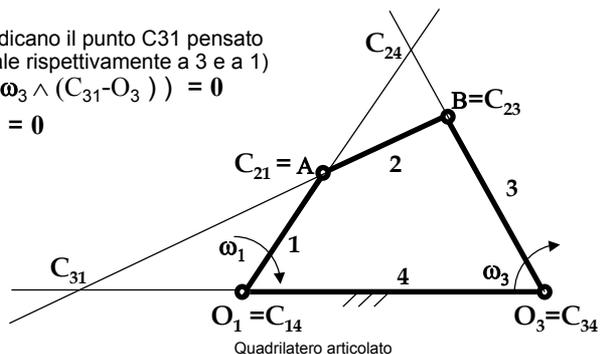
### Esempio: quadrilatero articolato

Nel moto assoluto (considerato 4 come telaio)  $O_1$  e  $O_3$  sono centri di istantanea rotazione di 1 e di 3:  $C_{14}$  e  $C_{34}$ ; il moto di 2 avviene con centro di istantanea rotazione  $C_{24}$  sulla normale alle traiettorie dei punti A e B della biella (si può dimostrare facilmente mediante il teorema di Chasles, considerando le velocità assolute di A e B).

Per calcolare il rapporto tra le velocità angolari di 1 e 3 è invece utile studiare il moto relativo di 3 rispetto ad 1 (considerando cioè 1 come telaio): gli estremi B e  $O_3$  dell'asta 3 compiono traiettorie circolari con centri di istantanea rotazione in  $A=C_{21}$  e  $O_1=C_{41}$  (si noti che  $C_{ab} = C_{ba}$  sempre). In  $C_{31}$  è nulla la velocità relativa di 1 e 3 per cui:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{C13} &= \mathbf{v}_{C1} - \mathbf{v}_{C3} = \mathbf{0} && (C1 \text{ e } C3 \text{ indicano il punto } C31 \text{ pensato} \\ &&& \text{come solidale rispettivamente a } 3 \text{ e a } 1) \\ \Rightarrow (\mathbf{v}_{O1} + \boldsymbol{\omega}_1 \wedge (\mathbf{C}_{31} - \mathbf{O}_1)) - (\mathbf{v}_{O3} + \boldsymbol{\omega}_3 \wedge (\mathbf{C}_{31} - \mathbf{O}_3)) &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_1 \wedge (\mathbf{C}_{31} - \mathbf{O}_1) - \boldsymbol{\omega}_3 \wedge (\mathbf{C}_{31} - \mathbf{O}_3) &= \mathbf{0} \\ \frac{\omega_3}{\omega_1} &= \frac{O_1 C_{31}}{O_3 C_{31}} \end{aligned}$$

Il rapporto tra le velocità angolari di due membri di un meccanismo viene chiamato **rapporto di trasmissione**.

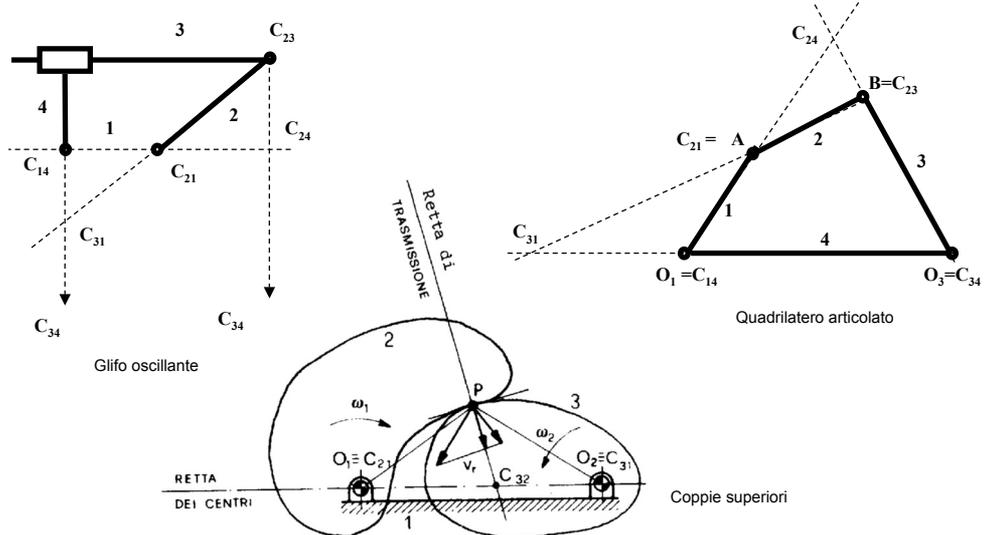


Quadrilatero articolato

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 - Cap. 2 - pag. 16

## Teorema di Kennedy-Aronhold

I centri di istantanea rotazione di 3 corpi rigidi in moto relativo sono allineati.



Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 - Cap. 2 - pag. 17

## 2.3 - ANALISI DI POSIZIONE, VELOCITÀ, ACCELERAZIONE

Si distinguono i metodi di analisi a seconda che si tratti di:

➤ **Meccanismi con coppie inferiori (o elementari)**

Sono detti meccanismi articolati e sono i più semplici da studiare.

➤ **Meccanismi con coppie superiori**

L'analisi di posizione è sempre complessa, mentre quella di velocità ed accelerazione è riconducibile a meccanismi con coppie inferiori.

Inoltre è possibile affrontare l'analisi con:

➤ **Metodi matematici**

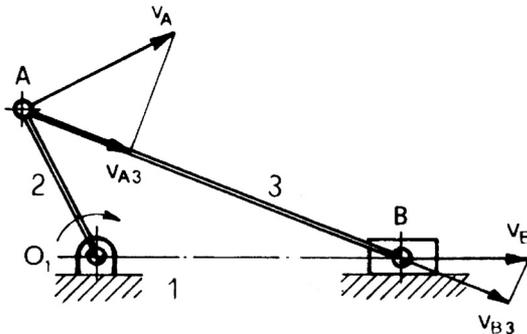
Sono più potenti, precisi e complessi; inoltre, essendo di uso generale, sono adatti ad essere implementati in pacchetti software.

➤ **Metodi grafici**

Sono più semplici e intuitivi, **ma risolvono i meccanismi in una sola configurazione per volta.**

# METODI GRAFICI DI ANALISI CINEMATICA

## Analisi di velocità: metodo delle proiezioni



Manovellismo ordinario: metodo delle proiezioni

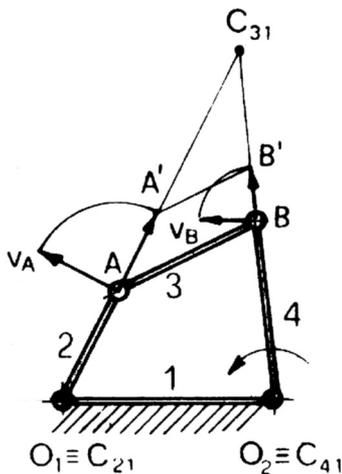
Le velocità di 2 punti qualsiasi di un sistema rigido hanno la stessa componente secondo la congiungente i due punti (altrimenti la loro distanza cambierebbe)

**Problema:** nota  $v_A$ , trovare  $v_B$   
La componente di  $v_A$  lungo la biella vale:

$$v_{A3} = v_{B3}$$

Essendo nota la direzione di  $v_B$ ,  $v_B$  può essere determinata tracciando dall'estremo di  $v_{B3}$  la perpendicolare al vettore stesso

## Analisi di velocità: metodo dei centri di istantanea rotazione

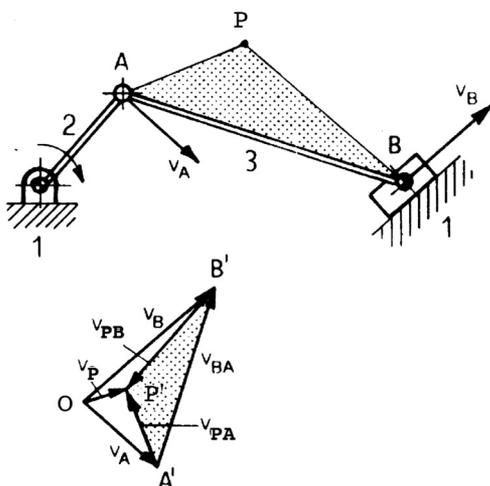


Quadrilatero articolato: metodo dei centri di istantanea rotazione

- Il centro di istantanea rotazione è il punto nel quale non vi è moto fra i due membri considerati
- Il modulo della velocità di ogni punto di un membro rigido è proporzionale alla distanza dal centro di istantanea rotazione

**Problema:** nota  $v_A$ , trovare  $v_B$   
• Si considerino i punti A e B come appartenenti entrambi all'asta 3 e si utilizzi il punto  $C_{31}$ : il moduli delle velocità dei due punti sono pertanto proporzionali alle distanze da  $C_{31}$  e si può sfruttare la similitudine dei triangoli.

## Analisi di velocità: metodo dei poligoni di velocità



L'equazione del **moto relativo** si risolve a partire da un polo  $O$  arbitrario e disegnando le componenti vettoriali che rappresentano le velocità dei punti del meccanismo.

**Problema:** nota  $v_A$ , trovare  $v_P$   
Occorre trovare prima  $v_B$ , di cui si conosce la direzione, applicando graficamente l'equazione di Galileo:

$$v_B = v_A + v_{BA}$$

con  $v_{BA} \perp (B-A)$  e  $v_B$  di direzione nota. Quindi la velocità di  $P$  si può ottenere rappresentandola a partire da  $A$  e da  $B$ :

$$\begin{aligned} v_P &= v_A + v_{PA} & \text{con } v_{PA} \perp (P-A) \\ v_P &= v_B + v_{PB} & \text{con } v_{PB} \perp (P-B) \end{aligned}$$

Meccanismo biella-manovella: metodo dei poligoni di velocità

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 - Cap. 2 - pag. 21

## Analisi di accelerazione: metodo dei poligoni di accelerazione

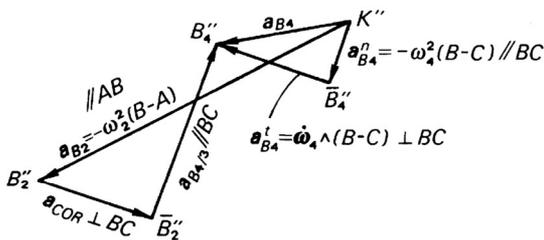
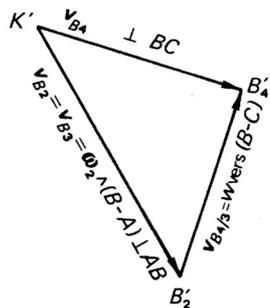
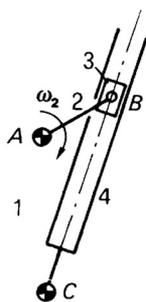
Il metodo dei poligoni di velocità ed accelerazione può essere applicato ogni volta che si riesca a scrivere equazioni vettoriali di velocità ed accelerazione in cui compaiono solo 2 incognite. In particolare, l'accelerazione assoluta di ogni punto di un membro mobile può essere determinata ogni volta che si conosca:

- l'accelerazione di un punto  $A$  qualsiasi e velocità ed accelerazione angolare
- l'accelerazione di 2 punti qualsiasi  $A$  e  $B$
- l'accelerazione di un punto  $A$  qualsiasi, la velocità angolare e la direzione dell'accelerazione di un altro punto  $B$ .

Nel caso in cui nel meccanismo vi siano coppie prismatiche occorre ricordare che velocità ed accelerazioni relative dei due membri della coppia sono dirette secondo l'asse della coppia stessa e che per l'accelerazione deve essere introdotto il termine complementare, calcolabile previa analisi delle velocità.

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 - Cap. 2 - pag. 22

## Esempio: analisi del meccanismo a glifo



Meccanismo a glifo

La manovella 2 ruota, non accelerata, con velocità angolare  $\omega_2$ ; eseguire graficamente l'analisi di velocità ed accelerazione.

Si ricava subito la velocità  $v_{B2}$  del punto  $B$  pensato appartenente al membro 2; si ha ovviamente  $v_{B2} = v_{B3}$  ed è facile ricavare  $v_{B4}$  avendo la direzione della velocità relativa  $v_{B4/3}$  e la direzione di  $v_{B4}$  stesso, che deve essere perpendicolare alla guida  $BC$ . Per la successiva analisi di accelerazione è utile calcolare la velocità angolare del membro 4:

$$\omega_4 = \frac{v_{B4}}{BC} = \omega_3$$

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 - Cap. 2 - pag. 23

Per quanto riguarda le accelerazioni, si ricava subito l'accelerazione centripeta  $a_{B2}$ :

$$a_{B2} = -\omega_2^2 (B - A)$$

per cui si traccia il primo vettore  $K''B_2''$  del poligono delle accelerazioni, a partire da un polo arbitrario  $K''$ .

Il poligono viene completato tenendo conto che  $a_{B3} = a_{B2}$  e che:

$$\begin{cases} a_{B4} = a_{B3} + a_{B4/3} + a_{Cor} \\ a_{B4} = -\omega_4^2 (B_4 - C) + \dot{\omega}_4 \wedge (B_4 - C) \\ a_{B4/3} = a \text{ vers}(B - C) \end{cases}$$

$$a_{Cor} = 2\omega_4 \wedge v_{B4/3} \quad (\text{nota in quanto prodotto vettoriale di termini noti})$$

Da  $B_2''$  si porta il vettore  $a_{Cor}$  ottenendo  $\bar{B}_2''$ ; da  $K''$  si porta il vettore  $a_{B4}^n = -\omega_4^2 (B_4 - C)$  ottenendo il punto  $\bar{B}_4''$ ; infine, da  $\bar{B}_2''$  e  $\bar{B}_4''$  si portano 2 rette, la prima parallela a  $BC$  e la seconda perpendicolare a  $BC$ , ottenendo alla loro intersezione il punto  $B_4''$  e completando il poligono. Si possono poi ricavare  $\dot{\omega}_3 = \dot{\omega}_4$  con la relazione:

$$\dot{\omega}_4 = \frac{a_{B4}^t}{BC}$$

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 - Cap. 2 - pag. 24

# METODI MATEMATICI DI ANALISI CINEMATICA

Si descrive il comportamento cinematico del meccanismo attraverso un **modello cinematico** scritto in **equazioni vettoriali** (nei vettori posizione, velocità e accelerazione).

Ci sono due metodi:

- **EQUAZIONI INDIPENDENTI DI POSIZIONE**
- **VELOCITA' ED ACCELERAZIONI RELATIVE**

Entrambi i metodi possono usare le due notazioni:

- scalare
- complessa

Nel seguito si farà riferimento alla notazione scalare.

## EQUAZIONI INDIPENDENTI DI POSIZIONE

- Il modello descrive le *posizioni* (coordinate) dei punti significativi dei membri in esame e le informazioni di *velocità* ed *accelerazione* si ottengono derivando tali equazioni (un'equazione vettoriale corrisponde nel piano a due equazioni scalari).
- L'equazione vettoriale di posizione nasce dalla *descrizione geometrica* del meccanismo: a partire da un punto di cui è nota la posizione, tramite una successione di vettori posizione, si descrive un percorso che lungo i successivi membri del meccanismo porta al punto iniziale: per questo motivo queste equazioni vengono anche chiamate **equazioni di chiusura**.
- I meccanismi *composti* (con accoppiamenti multipli) richiedono per la loro completa modellazione più equazioni di chiusura (un insieme sufficiente di equazioni indipendenti è fornito da tutte le *maglie semplici*)

## VELOCITÀ ED ACCELERAZIONI RELATIVE

Il modello è ottenuto applicando direttamente le leggi della cinematica che legano velocità e accelerazioni dei vari punti del sistema. Si usa:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})$$

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})] + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})$$

all'interno dello stesso membro rigido, mentre per passare da un membro ad uno collegato si utilizza:

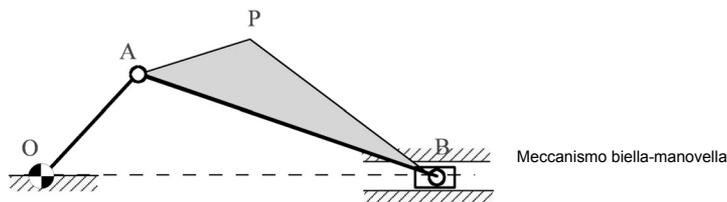
$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{Pr} + \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}')$$

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{Pr} + \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}')] + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_{Pr}$$

Questo metodo equivale a quelli grafici dei poligoni delle velocità e delle accelerazioni ed è facilmente correlabile al metodo delle equazioni di chiusura.

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 - Cap. 2 - pag. 27

### ESEMPIO: MANOVELLISMO ORDINARIO CENTRATO



Si desidera studiare la cinematica del sistema biella-manovella mostrato in figura ed in particolare determinare il moto del punto P, assegnata la rotazione della manovella OA.

Si indichi con L la lunghezza della biella (AB) e con R il raggio di manovella (OA); inoltre sia  $p_y$  l'altezza del triangolo APB relativa alla base AB e  $p_x$  la proiezione del lato AP sul lato AB.

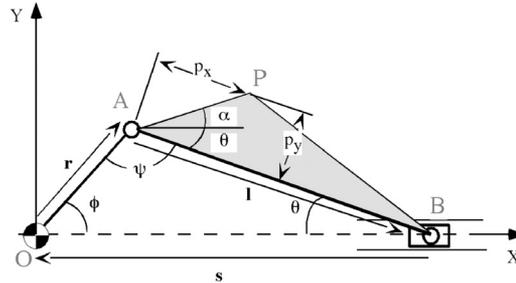
Il problema viene affrontato in 3 modi diversi:

- > equazioni indipendenti di posizione
- > velocità relative
- > metodo grafico

*In ogni caso è sempre necessario "risolvere" la cinematica della catena chiusa OABO prima di poter determinare il moto del punto P.*

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 - Cap. 2 - pag. 28

## EQUAZIONI INDIPENDENTI DI POSIZIONE



Variabili e parametri geometrici

### Analisi di posizione

La soluzione della cinematica di posizione si ottiene risolvendo il triangolo  $OAB$  mostrato in figura, in cui è assegnata la rotazione di manovella  $\phi$  mentre compaiono come incognite l'angolo  $\theta$  ed il lato  $s$  (spostamento del piede di biella)

$$r + l + s = 0 \quad (1)$$

Proiettando l'equazione sui 2 assi coordinati, si ottengono 2 equazioni tramite le quali si riesce ad esprimere  $\theta$  ed  $s$  in funzione di  $\phi$ :

$$\begin{cases} R \cos \phi + L \cos \theta - s = 0 \\ R \sin \phi - L \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 - Cap. 2 - pag. 29

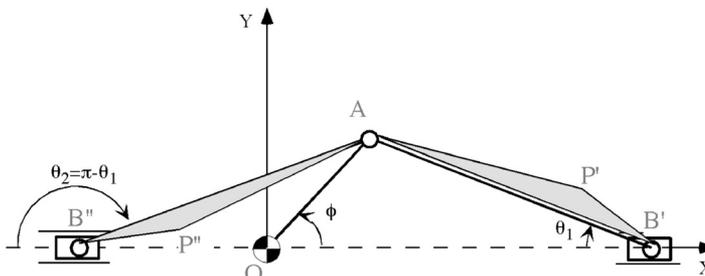
Dalla seconda equazione in (2), chiamando  $a = l/R$ , si ricava:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\sin \phi}{a}\right) = \operatorname{atan} 2\left(\sin \phi, \sqrt{a^2 - \sin^2 \phi}\right) \quad (3)$$

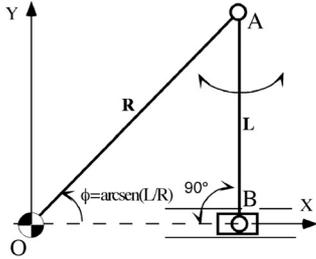
che sostituito nella prima delle (2) fornisce:

$$s = R\left(\cos \phi + \sqrt{a^2 - \sin^2 \phi}\right) \quad (4)$$

Nelle (3) e (4) è stato considerato il valore dell'angolo  $\theta$  che corrisponde ad un coseno positivo: una seconda possibile configurazione del meccanismo si ottiene considerando per  $\theta$  il valore supplementare. Le 2 soluzioni mostrate corrispondono ai 2 possibili (e differenti) modi di "montaggio" del meccanismo: ovviamente, assegnato il sistema da studiare, una sola delle due soluzioni dovrà essere considerata.



Le 2 configurazioni del meccanismo



Le soluzioni ricavate in (4) sono sempre definite se  $L \geq R$ , altrimenti deve essere verificato:

$$-\arcsen\left(\frac{L}{R}\right) + k\pi \leq \phi \leq \arcsen\left(\frac{L}{R}\right) + k\pi \quad (5)$$

Le 2 configurazioni limite del meccanismo, estremi dell'intervallo presentato in (5), si verificano quando la biella viene ad essere ortogonale alla direzione di scorrimento del pattino.

La posizione del punto P è individuata dalla relazione vettoriale:

$$(\mathbf{P}-\mathbf{O}) = (\mathbf{P}-\mathbf{A}) + (\mathbf{A}-\mathbf{O}) \quad (6)$$

che proiettata sui due assi fornisce:

$$x_p = OA \cos(\phi) + AP \cos(\alpha) \quad (7a)$$

$$y_p = OA \sin(\phi) + AP \sin(\alpha) \quad (7b)$$

dove:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right) - \theta \quad AP = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

Oppure, proiettando AP sulla direzione di AB e su quella perpendicolare ad AB:

$$x_p = R \cos(\phi) + p_x \cos(\theta) + p_y \sin(\theta) \quad (8)$$

$$y_p = R \sin(\phi) - p_x \sin(\theta) + p_y \cos(\theta)$$

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 - Cap. 2 - pag. 31

## Analisi di velocità

Lo studio della cinematica di velocità parte dalla derivazione delle equazioni di posizione (2):

$$\begin{cases} (-R \sin \phi) \dot{\phi} - (L \sin \theta) \dot{\theta} - \dot{s} = 0 \\ (R \cos \phi) \dot{\phi} - (L \cos \theta) \dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Queste equazioni rappresentano la chiusura del triangolo di velocità:

$$\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA} - \mathbf{v}_B = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}$$

In questo caso il sistema è lineare (considerati noti gli angoli dall'analisi di posizione e incognite le loro derivate), e può essere facilmente risolto per ricavare:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{R \cos \phi}{L \cos \theta} \dot{\phi} \\ \dot{s} = -R (\sin \phi + \tan \theta \cos \phi) \dot{\phi} \end{cases} \quad (10)$$

La soluzione (10) risulta espressa anche in funzione di  $\theta$ , ma questo è già noto (in funzione di  $\phi$ ) dall'analisi di posizione; la sostituzione di tale espressione nella (10) è possibile ma quasi mai necessaria.

Si noti, inoltre, che la soluzione è definita solo per  $\cos \theta \neq 0$ , il che, espresso in funzione dell'angolo di manovella  $\phi$ , corrisponde alle condizioni limite (5) già individuate per l'analisi di posizione.

Le velocità possono essere ricavate anche dalla derivazione diretta delle espressioni della posizione (3) e (4), ottenendo:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\cos \phi}{\sqrt{a^2 - \sin^2 \phi}} \dot{\phi} & \left( \frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \\ \dot{s} = -R \sin \phi \left( 1 + \frac{\cos \phi}{\sqrt{a^2 - \sin^2 \phi}} \right) \dot{\phi} \end{cases} \quad (10\text{bis})$$

che risulta, ovviamente, equivalente alla (10), come si può dimostrare facilmente.

Si noti, tuttavia, che per meccanismi un po' più complessi questa derivazione risulta molto complicata e quindi calcolabile con difficoltà, per cui si preferisce utilizzare il metodo precedente.

Per ricavare la velocità del punto  $P$  basta derivare la (8) rispetto al tempo, ottenendo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= (-R \sin \phi) \dot{\phi} + (-p_x \sin \theta + p_y \cos \theta) \dot{\theta} \\ \dot{y}_p &= (R \cos \phi) \dot{\phi} + (-p_x \cos \theta - p_y \sin \theta) \dot{\theta} \end{aligned} \quad (11)$$

Si nota che la soluzione trovata è funzione di  $\phi$ ,  $\theta$  e delle loro derivate, che sono assegnate o comunque note a questo punto dello studio.

## Analisi di accelerazione

Derivando le equazioni di velocità (9) si ottiene:

$$\begin{cases} (-R \cos \phi) \dot{\phi}^2 - (R \sin \phi) \ddot{\phi} - (L \cos \theta) \dot{\theta}^2 - (L \sin \theta) \ddot{\theta} - \ddot{s} = 0 \\ (-R \sin \phi) \dot{\phi}^2 + (R \cos \phi) \ddot{\phi} + (L \sin \theta) \dot{\theta}^2 - (L \cos \theta) \ddot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Anche in questo caso il sistema è lineare, per cui si trova facilmente:

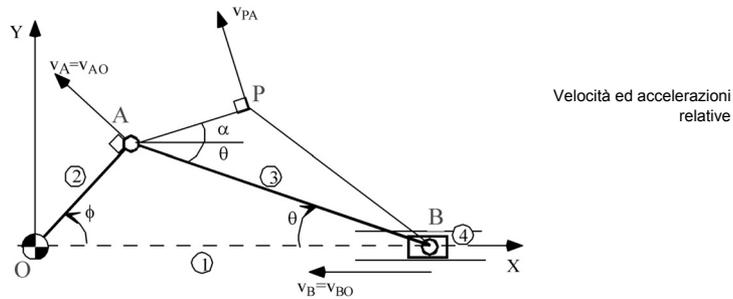
$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{\cos \phi}{a \cos \theta} \ddot{\phi} + \left( \tan \theta \dot{\theta}^2 - \frac{\sin \phi}{a \cos \theta} \dot{\phi}^2 \right) \\ \ddot{s} = -R (\sin \phi + \tan \theta \cos \phi) \ddot{\phi} - R \left[ a \cos \theta (1 + \tan^2 \theta) \dot{\theta}^2 + \cos \phi (1 - \tan \theta \tan \phi) \dot{\phi}^2 \right] \end{cases} \quad (13)$$

Per il campo di esistenza della soluzione valgono le stesse considerazioni fatte per l'analisi di velocità. Per quanto riguarda l'accelerazione del punto  $P$ , si deriva ulteriormente l'equazione (11), ottenendo:

$$\begin{cases} \ddot{x}_p = -(R \cos \phi) \dot{\phi}^2 - (R \sin \phi) \ddot{\phi} - (p_x \cos \theta + p_y \sin \theta) \dot{\theta}^2 + (-p_x \sin \theta + p_y \cos \theta) \ddot{\theta} \\ \ddot{y}_p = -(R \sin \phi) \dot{\phi}^2 + (R \cos \phi) \ddot{\phi} + (p_x \sin \theta - p_y \cos \theta) \dot{\theta}^2 - (p_x \cos \theta + p_y \sin \theta) \ddot{\theta} \end{cases} \quad (14)$$

## VELOCITÀ ED ACCELERAZIONI RELATIVE

Questo metodo può essere applicato solo per l'analisi di velocità e di accelerazione, e quindi presuppone che sia già stato risolto per altra via il problema cinematico di posizione.



### Analisi cinematica di velocità

Si scrivono le equazioni di chiusura sulle velocità percorrendo tutta la catena cinematica chiusa, tramite le velocità relative:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{AO} = \boldsymbol{\omega}_2 \wedge (\mathbf{A} - \mathbf{O}) \\ \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_3 \wedge (\mathbf{B} - \mathbf{A}) \\ \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{BO} = \frac{\mathbf{B} - \mathbf{O}}{|\mathbf{B} - \mathbf{O}|} v \end{cases} \quad (15)$$

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 - Cap. 2 - pag. 35

Il sistema (15), di 3 equazioni vettoriali nelle incognite  $\mathbf{v}_A$ ,  $\mathbf{v}_B$ ,  $\omega_3$  e  $v$ , corrisponde al sistema seguente:

$$\begin{cases} v_{Ax} = -\omega_2 R \sin \phi \\ v_{Ay} = \omega_2 R \cos \phi \\ v_{Bx} = v_{Ax} + \omega_3 L \sin \theta \\ v_{By} = v_{Ay} + \omega_3 L \cos \theta \\ v_{By} = 0 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} v_{Ax} = -R \sin \phi \omega_2 \\ v_{Ay} = R \cos \phi \omega_2 \\ v_{Bx} = -R (\tan \theta \cos \phi + \sin \phi) \omega_2 \\ v_{By} = 0 \\ \omega_3 = -\frac{R \cos \phi}{L \cos \theta} \omega_2 \end{cases} \quad (16)$$

(Nota: la quinta equazione si ricava derivando  $R \sin \phi = L \sin \theta$  e considerando che  $\omega_2 = \dot{\phi}$  e  $\omega_3 = -\dot{\theta}$ ).

La velocità del punto P a questo punto è facilmente ricavabile da:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{PA} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_3 \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{A})$$

e quindi:

$$\begin{cases} v_{Px} = -R \sin \phi \omega_2 - \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \sin \alpha \omega_3 \\ v_{Py} = R \cos \phi \omega_2 + \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \cos \alpha \omega_3 \end{cases} \quad (17)$$

in cui il valore di  $\alpha$  è ricavabile come precedentemente mostrato.

## Analisi cinematica di accelerazione

Le equazioni di chiusura diventano in questo caso:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \dot{\omega}_2 \wedge (A - O) - \omega_2^2 (A - O) \\ \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\omega}_3 \wedge (B - A) - \omega_3^2 (B - A) \\ \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_O + \frac{B - O}{|B - O|} a \end{cases} \quad (18)$$

Il sistema (18), di 3 equazioni vettoriali nelle incognite  $\mathbf{a}_A$ ,  $\mathbf{a}_B$ ,  $\dot{\omega}_3$  ed  $a$ , corrisponde al seguente sistema di equazioni scalari:

$$\begin{cases} a_{Ax} = -\dot{\omega}_2 R \sin \phi - \omega_2^2 R \cos \phi \\ a_{Ay} = \dot{\omega}_2 R \cos \phi - \omega_2^2 R \sin \phi \\ a_{Bx} = a_{Ax} + \dot{\omega}_3 L \sin \theta - \omega_3^2 L \cos \theta \\ a_{By} = a_{Ay} + \dot{\omega}_3 L \cos \theta + \omega_3^2 L \sin \theta \\ a_{By} = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 - Cap. 2 - pag. 37

Il sistema (19) può essere risolto per trovare:

$$\begin{cases} a_{Ax} = -R \sin \phi \dot{\omega}_2 - R \cos \phi \omega_2^2 \\ a_{Ay} = R \cos \phi \dot{\omega}_2 - R \sin \phi \omega_2^2 \\ a_{Bx} = -R (\sin \phi + \tan \theta \cos \phi) \dot{\omega}_2 - R (\cos \phi - \tan \theta \sin \phi) \omega_2^2 - L (\sin \theta \tan \theta + \cos \theta) \omega_3^2 \\ a_{By} = 0 \\ \dot{\omega}_3 = -\frac{R \cos \phi}{L \cos \theta} \dot{\omega}_2 + \frac{R \sin \phi}{L \cos \theta} \omega_2^2 - \tan \theta \omega_3^2 \end{cases} \quad (20)$$

Pertanto, l'accelerazione del punto  $P$  è data da:

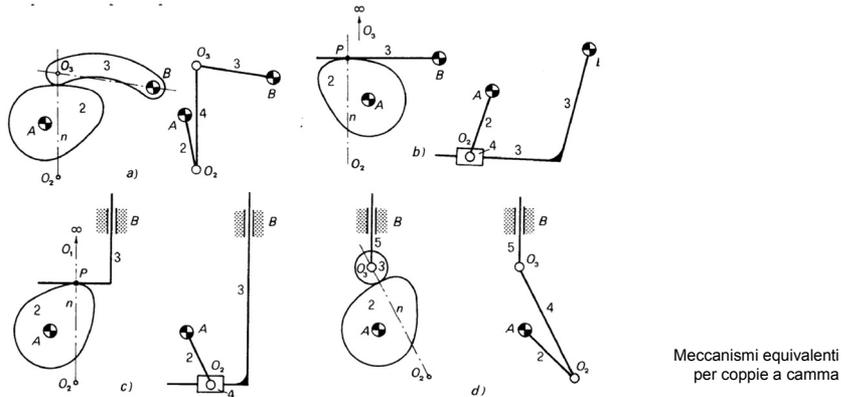
$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_A + \dot{\omega}_3 \wedge (P - A) - \omega_3^2 (P - A) \quad (21)$$

che proiettata nelle due direzioni fornisce:

$$\begin{cases} a_{Px} = -R \sin \phi \dot{\omega}_2 - R \cos \phi \omega_2^2 - \overline{PA} \sin \alpha \dot{\omega}_3 - \overline{PA} \cos \alpha \omega_3^2 \\ a_{Py} = R \cos \phi \dot{\omega}_2 - R \sin \phi \omega_2^2 + \overline{PA} \cos \alpha \dot{\omega}_3 - \overline{PA} \sin \alpha \omega_3^2 \end{cases} \quad (22)$$

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 - Cap. 2 - pag. 38

# MECCANISMI CON COPPIE SUPERIORI



Per meccanismi a membri rigidi, i casi più comuni sono i meccanismi a camma ed i rotismi, entrambi realizzati tramite accoppiamenti del tipo “camma piana”.

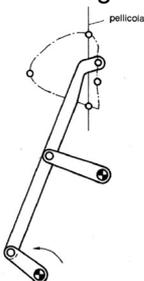
In questo caso si introduce un meccanismo equivalente costituito da 3 membri collegati con coppie inferiori; il centro geometrico delle coppie coincide con il centro di curvatura dei profili coniugati della camma stessa.

Il meccanismo equivalente corrisponde solo alla posizione considerata; nell’arco del moto esistono quindi infiniti meccanismi equivalenti.

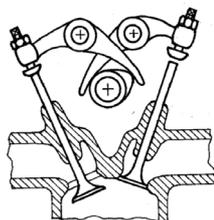
## 2.4 - SINTESI DEI MECCANISMI PIANI

Le specifiche della sintesi cinematica impongono che esista una relazione prestabilita fra le variabili di posizione, velocità ed accelerazione di punti o direzioni appartenenti a membri del meccanismo.

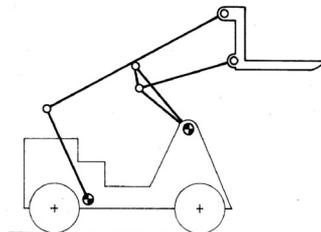
- *generazione di traiettoria*: si impone una relazione fra le coordinate di posizione  $x$  ed  $y$  di un punto di un membro;
- *generazione di funzione*: si impone una relazione fra gli spostamenti di più membri;
- *generazione di movimento*: si impone la successione delle posizioni assunte da un assegnato membro.



Generazione di traiettoria: trascinamento pellicola cinematografica



Generazione di funzione: comando valvole



Generazione di movimento: carrello elevatore

## PROBLEMI TIPICI DELLA CINEMATICA DELLE COPPIE RIGIDE E DEI MECCANISMI PIANI

### ➤ **Analisi cinematica**

Assegnati il meccanismo e la legge oraria di un membro (che ne definisce esplicitamente la posizione in funzione del tempo), determinare la legge del moto (ossia la distribuzione delle velocità e delle accelerazioni) dei punti di ogni membro.

### ➤ **Sintesi cinematica**

Fissata una coppia cinematica rigida (A, B) e la legge del moto di A relativamente a B, determinare i profili coniugati atti a realizzare la legge voluta: tale problema ammette in generale infinite soluzioni equivalenti cinematicamente ma non dinamicamente.

Occorre determinare dapprima le *polari* del moto di un membro relativo all'altro: dette polari prendono il nome di *primitive* della coppia e costituiscono una particolare coppia di profili coniugati, fra i quali hanno luogo contatti di puro rotolamento.

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 – Cap. 2 - pag. 41

## TRACCIAMENTO DEI PROFILI CONIUGATI

Ottenute le primitive della coppia, corrispondenti alla legge voluta del moto relativo, si possono determinare infinite coppie di profili coniugati atti a realizzare la legge stessa: si può, infatti, riconoscere che, sotto opportune limitazioni, si può assumere arbitrariamente uno dei due profili, restando allora l'altro univocamente determinato da quello prefissato e dalla legge del moto che si vuole ottenere.

Il caso più semplice è quello in cui uno dei due profili (ad esempio quello solidale ad A) si riduce ad un punto *P*: il profilo coniugato non è allora altro che la traiettoria descritta da *P* nel moto di A relativo a B, ossia nel rotolamento della polare mobile, solidale ad A, sulla polare fissa: a tale traiettoria si dà il nome di *rolletta*.

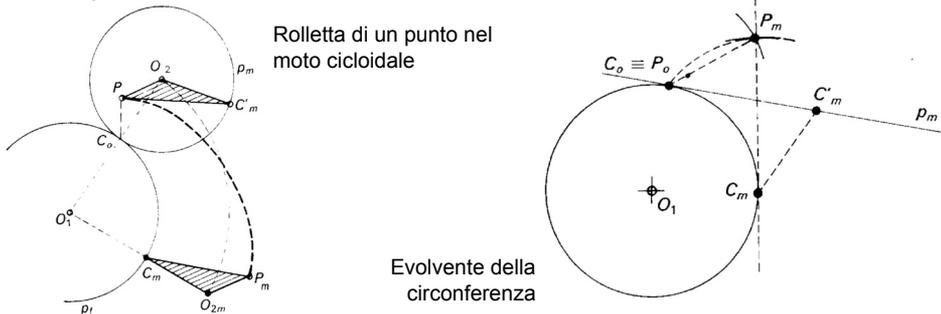
Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 – Cap. 2 - pag. 42

## EPICICLOIDI

Gli *epicicloidi* sono curve generate dal moto di un punto rigidamente connesso ad una curva mobile (*epiciclo*) che rotola senza strisciare sopra una curva fissa (*base*). Generalmente epiciclo e base sono circonferenze.

Nel caso le due polari (epiciclo e base) siano circonferenze si ha un *moto cicloidale* e le rollette appartengono alla famiglia delle *cicloidi*.

In particolare, se il raggio dell'epiciclo tende a infinito, l'epiciclo è una retta e l'epicicloide si chiama *evolvente della circonferenza*.



Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 - Cap. 2 - pag. 43

## Tracciamento indipendente dei profili coniugati

Alcuni metodi di sintesi per la determinazione della coppia di profili coniugati, richiedono sia prefissato uno dei due: invece è conveniente individuare procedimenti che consentano la sintesi simultanea ed indipendente dei due profili, assegnate le primitive, in modo tale che i due profili, tracciati con la stessa regola su due primitive qualsiasi, e pensati ciascuno solidale con la primitiva corrispondente, risultino fra loro coniugati quando queste si accoppiano.

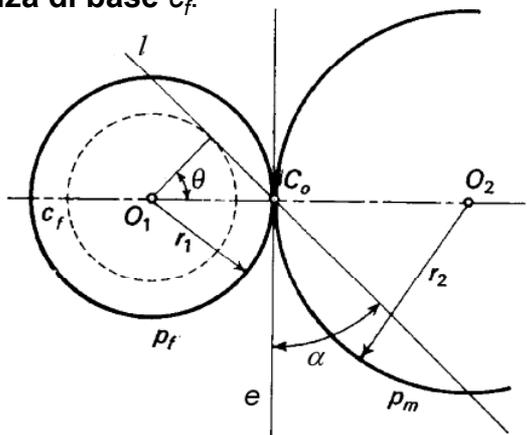
In questo modo si possono costruire serie di profili tutti fra loro accoppiabili e corrispondenti a prefissate leggi di trasmissione del moto (*elementi di assortimento*): l'applicazione più evidente e di maggior rilevanza è riferita alla sintesi dei profili dei denti degli ingranaggi.

L'epiciclo sia la retta  $e$ ; si consideri l'involuppo della retta  $l$  con essa solidale e formante l'angolo  $\alpha$ .

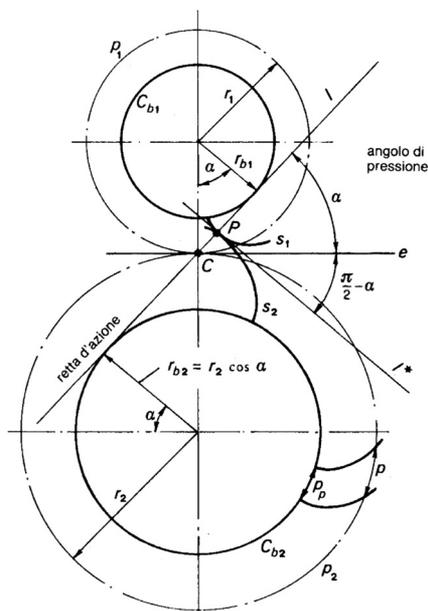
Le due polari, fissa e mobile, sono due circonferenze  $p_f$  e  $p_m$  di raggio  $r_1$  ed  $r_2$ ; mentre la  $e$  rotola, per esempio, sulla  $p_f$ , la normale di contatto  $l$ , che ha dal centro  $O_1$  di  $p_f$  una distanza uguale ad  $r_1 \cos \alpha$ , e quindi costante, involuppa una circonferenza, sempre di centro  $O_1$ , che viene chiamata **circonferenza di base**  $c_f$ .

La circonferenza di base può essere costruita anche relativamente alla circonferenza  $p_m$ ; in tal caso il suo raggio è  $r_2 \cos \alpha$ .

I profili coniugati rispetto alla coppia di circonferenze  $p_f$  e  $p_m$ , come primitive sono le **evolventi** delle corrispondenti circonferenze di base.



## SINTESI DELLE RUOTE DENTATE A EVOLVENTE - 1



Dentature ad evolvente

L'epiciclo  $e$  è una retta tangente comune alle primitive nel punto  $C$ .

$l^*$ : retta solidale ad  $e$ , inclinata rispetto ad  $e$  di  $\mu = (\pi/2) - \alpha$ ;

mentre  $e$  rotola sulle due primitive  $l^*$  involuppa i profili coniugati  $s_1$  ed  $s_2$ ;

$l$  è detta **retta di azione**; è normale ai profili nel punto  $P$  di contatto, è normale ad  $l^*$ , passa per  $C$ , è inclinata di  $\alpha$  (**angolo di pressione**, solitamente  $20^\circ$ ) rispetto ad  $e$ ;

mentre  $e$  rotola su  $p_1$ ,  $l$  involuppa  $C_{b1}$ , circonferenza di raggio  $r_1 \cos \alpha$ ;

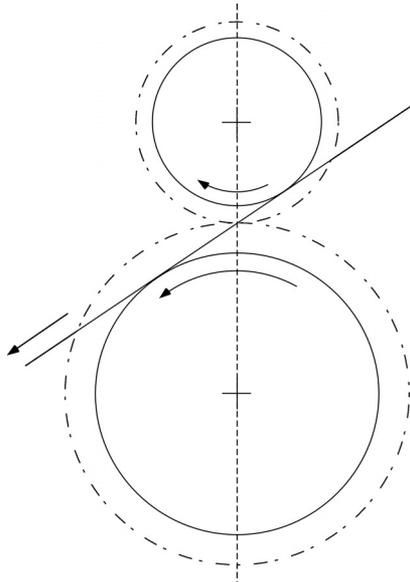
mentre  $e$  rotola su  $p_2$ ,  $l$  involuppa  $C_{b2}$ , circonferenza di raggio  $r_2 \cos \alpha$ ;

$C_{b1}$  e  $C_{b2}$  sono le **circonferenze di base**;

$s_1$  ed  $s_2$ , luogo dei punti  $P$ , coniugati rispetto alle primitive  $p_1$  e  $p_2$ , sono le evolventi di  $C_{b1}$  e  $C_{b2}$ . e costituiscono i profili dei denti delle ruote.

**NOTA:** al girare delle ruote,  $p_1$  rotola su  $p_2$  senza strisciare; il punto  $P$  si sposta ma rimanendo sulla retta  $l$ ;  $s_1$  ed  $s_2$  hanno sempre tangente comune ma strisciano (tranne che quando  $P$  coincide con  $C$ ); quindi i denti delle ruote dentate hanno un leggero strisciamento nel funzionamento.

## SINTESI DELLE RUOTE DENTATE A EVOLVENTE - 2



Dentature ad evolvente

- le circonferenze di base e primitiva di ciascuna ruota dentata sono solidali alla ruota dentata stessa, pertanto ruotano alla stessa velocità angolare
- imponendo uguale velocità tangenziale per le primitive nel punto di contatto, che rotolano senza strisciare tra loro, si ottiene:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

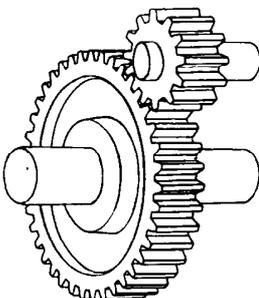
- $r$  è il raggio della circonferenza primitiva
- $d$  è il diametro della circonferenza primitiva
- $z$  è il numero di denti, con  $\pi d = pz$ , dove  $p$  è il passo, uguale per le due ruote dentate

- si può pensare che la retta d'azione trasli rimanendo in contatto di rotolamento puro con le due circonferenze di base a cui è tangente (vedi figura a lato)

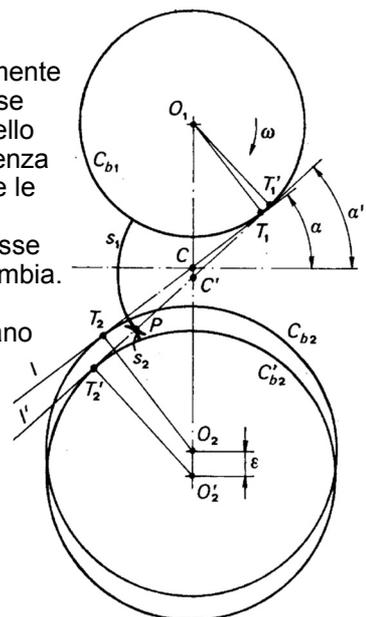
Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 - Cap. 2 - pag. 47

Le dentature con profilo ad evolvente sono le più usate perché:

- il funzionamento dell'ingranaggio risulta cinematicamente corretto e con uguale rapporto di trasmissione anche se l'interasse delle ruote non è esattamente uguale a quello nominale ma varia di poco (se varia molto c'è interferenza o distacco delle ruote): si può facilmente verificare che le circonferenze di base rimangono le stesse, le circonferenze primitive variano ma mantenendo le stesse proporzioni e quindi il rapporto di trasmissione non cambia.
- i fianchi dei denti sono simultaneamente tracciati ed appartengono ad una stessa linea: i due fianchi risultano coniugati su tutta la lunghezza.



Coppia di ruote dentate (ingranaggio) con profilo ad evolvente



Effetto della variazione dell'interasse

Meccanica Applicata alle Macchine 1 - A.A. 2006/2007 - Cap. 2 - pag. 48