Introduzione
ai metodi di
Modellizzazione Discreta

8-10 Giugno 1999

Costruire un modello vuol dire tentare di descrivere un fenomeno mediante

- quantità che ne caratterizzino l'andamento

- equazioni disequazioni o, più in generale regole che tali quantità devono rispettare

Le fasi di una modellizzazione possono essere schematizzate come segue

Identificazione dei meccanismi e delle leggi che regolano il problema da modellizzare.

Formulazione del problema a parole, documentazione dei dati.

Formulazione di ipotesi. Individuazione degli elementi fondamentali e di quelli trascurabili

Costruzione del modello: formalizzazione matematica

Analisi del modello: soluzione del problema matematico

Interpretazione del modello: confronto della soluzione del problema matematico con la descrizione del fenomeno.

Validazione del modello: confronto delle previsioni con i dati che si possono ricavare dal fenomeno reale osservato in diverse condizioni.

Implementazione del modello: uso del modello per prevedere l'evoluzione del fenomeno in tempi futuri o diverse condizioni.

Discreto

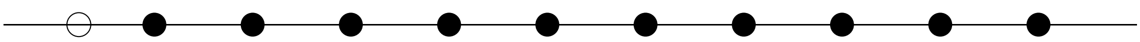
Vuol dire

”Fatto di punti isolati”

in contrapposizione con continuo.

È una caratteristica dei Numeri Naturali $\mathbb{N}$ in contrapposizione con la caratteristica di continuità dei Numeri Reali $\mathbb{R}$.

Possiamo farcene un'idea pensando a come si rappresentano $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{N}$ su una retta



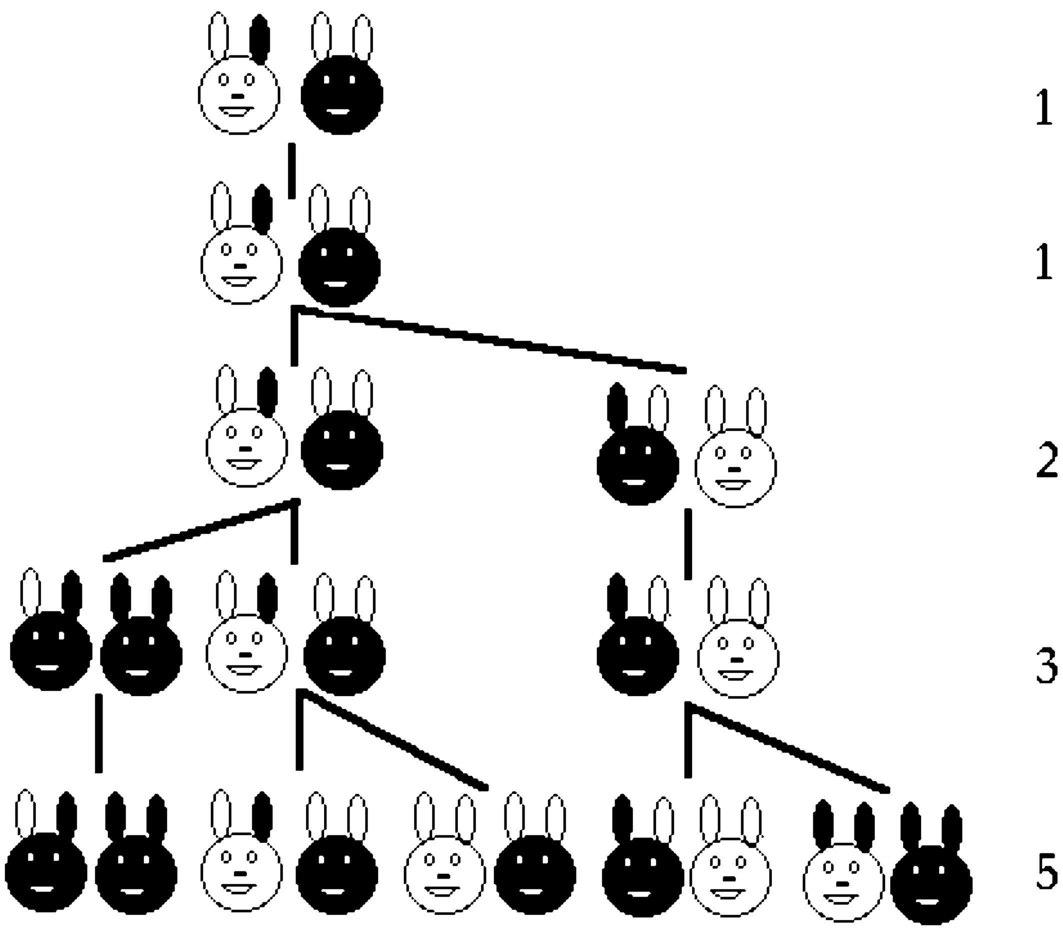
Esempi di Modelli Discreti (Equazioni alle Differenze Finite)

I Conigli di Fibonacci

Nel Liber Abaci è contenuto il seguente problema:

Quante coppie di conigli verranno prodotte in un anno a partire da un'unica coppia, se ogni mese ciascuna coppia genera una nuova coppia che si riproduce a partire dal suo secondo mese di vita?

La seguente figura illustra l'andamento del numero di conigli nei primi 5 mesi



Consideriamo la sequenza F_n del numero di coppie di conigli presenti in ciascun mese.

Avremo

$F_1 = 1$ Il primo mese ci sarà una sola coppia di conigli

$F_2 = 1$ Il secondo mese la coppia non è ancora in grado di riprodursi

$F_3 = 2$ Il terzo mese la coppia si riproduce e le coppie presenti diventano 2

$F_4 = 3$ Il quarto mese la prima coppia si riproduce ancora mentre la seconda non è ancora in grado di farlo

$F_5 = ?$

$$
\begin{aligned}
F_4 &= (\text{numero di coppie presenti al mese 4}) \\
&= (\text{numero di coppie presenti al mese 3}) \\
&+ (\text{numero di coppie presenti al mese 2}) \\
&= F_3 + F_2 \quad (1)
\end{aligned}
$$

Infatti nel mese 4 saranno presenti le coppie che erano presenti al mese 3 ma ci saranno nuove coppie generate da quelle in grado di farlo, cioè quelle presenti al mese 2

In conclusione si ottiene che deve essere

$$F_4 = F_3 + F_2$$

e quindi possiamo prevedere che

$$F_5 = F_4 + F_3$$

In generale si dovrà avere

$$\begin{cases} F_{n+1} = F_{n-1} + F_n \\ F_1 = F_2 = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Le precedenti uguaglianze definiscono F_n per ricorrenza.

In altre parole ci permettono di calcolare tutti i valori di F_n, infatti

- F_1 ed F_2 sono noti,
- F_3 è la somma di F_2 e di F_1
- F_4 è la somma di F_3 e di F_2
- F_{n+1} è la somma di F_n e di F_{n-1}

Ogni termine della successione è la somma dei due termini precedenti.

La successione F_n fu chiamata successione di Fibonacci da E.E.A Lucas

Possiamo cercare di esplicitare i valori assunti dai suoi termini:

Cerchiamo $x \in \mathbb{R}$ tale che

$$F_n = x^n$$

Perchè la 2 sia soddisfatta deve essere verificata sia la regola di ricorrenza

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n \tag{3}$$

che le condizioni iniziali

$$F_1 = F_2 = 1 \tag{4}$$

Affinchè la 3 sia soddisfatta dovrà allora risultare

$$x^{n+1} = x^n + x^{n-1} \tag{5}$$

e quindi, se escludiamo la soluzione banale $x = 0$,

$$x^2 = x + 1 \tag{6}$$

da cui

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \tag{7}$$

Pertanto

$$f_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad \text{e} \qquad g_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{8}$$

sono due possibili successioni che soddisfano la regola di ricorrenza 3

Purtroppo nessuna delle due soddisfa le condizioni iniziali 4

Osserviamo che anche

$$a f_n \qquad \text{e} \qquad b g_n \tag{9}$$

soddisfano la 3, infatti

$$af_{n+1} = af_{n-1} + af_n \tag{10}$$

e

$$bg_{n+1} = bg_{n-1} + bg_n \tag{11}$$

ed anche

$$af_n + bg_n \tag{12}$$

soddisfa la 3, infatti sommando 10 ed 11

$$af_{n+1} + bg_{n+1} = af_{n-1} + bg_{n-1} + af_n + bg_n \tag{13}$$

E tutto questo per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

Possiamo sfruttare la disponibilità di a e b per sistemare i dati iniziali, infatti avremo che

$$1 = F_1 = af_1 + bg_1 = a\frac{1+\sqrt{5}}{2} + b\frac{1-\sqrt{5}}{2} \tag{14}$$

$$1 = F_2 = af_2 + bg_2 = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \tag{15}$$

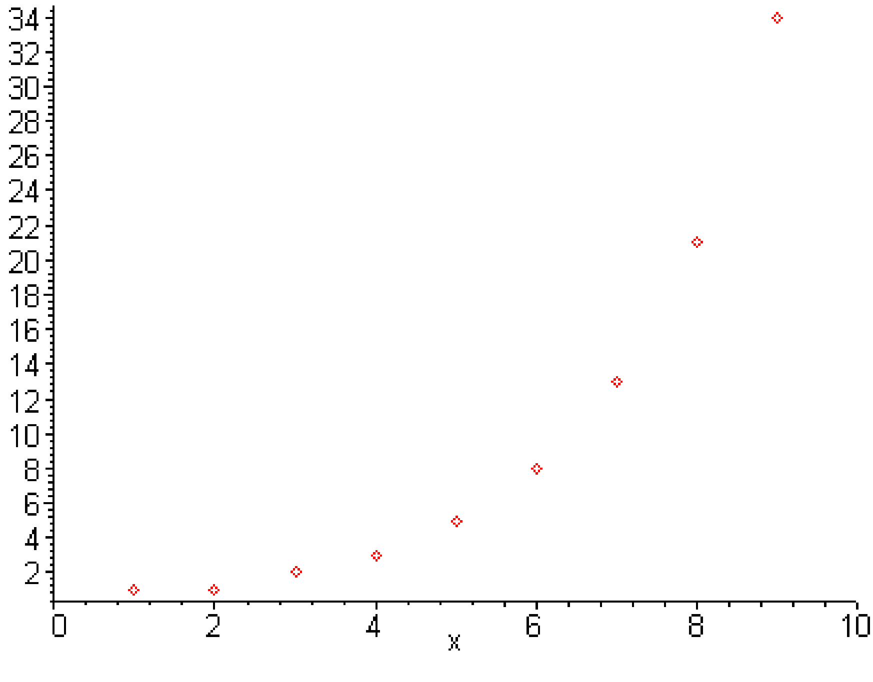
e, risolvendo il sistema lineare si può ricavare che

$$a = -b = \frac{1}{\sqrt{5}} \tag{16}$$

pertanto

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \qquad (17)$$

F_n è nota come la successione di Fibonacci



La successione di Fibonacci è caratterizzata dalla relazione di ricorrenza

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Dividendo per F_n si ricava

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

Posto

$$R_{n+1} = \frac{F_{n+1}}{F_n} \qquad R_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}$$

si ha

$$R_{n+1} = 1 + \frac{1}{R_n}$$

Si può provare che R_n ammette limite e che

$$R_n \to \tau$$

dove

$$\tau = 1 + \frac{1}{\tau}$$

da cui

$$\tau^2 = \tau + 1 \qquad \tau^2 - \tau - 1 = 0 \tag{18}$$

$$\tau = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \tag{19}$$

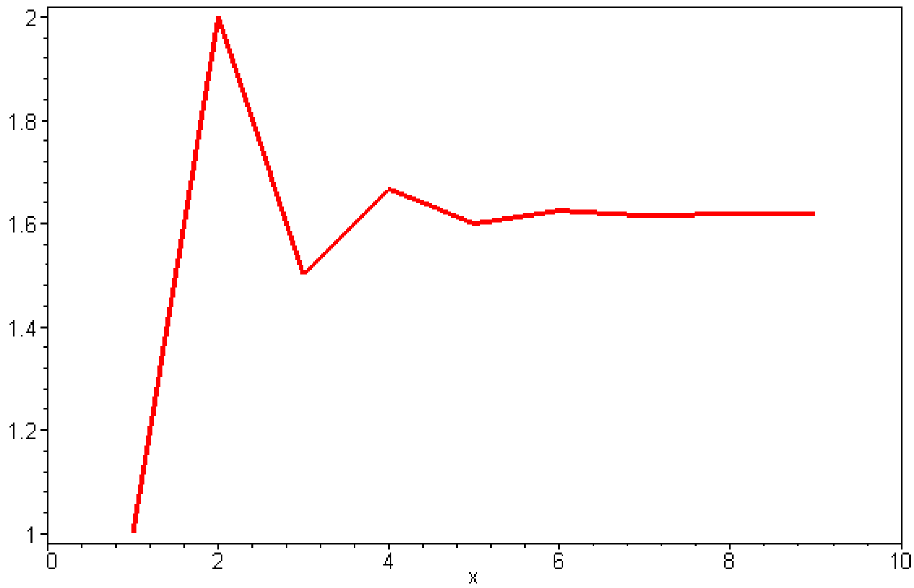
e

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618033987.... > 1 \tag{20}$$

Più precisamente

$$R_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}$$

ha un andamento del tipo



Come si osserva (si dimostra per induzione)

$$R_{2n} \searrow \tau \qquad R_{2n+1} \nearrow \tau \tag{21}$$

e

$$R_{2n+1} < \tau < R_{2n} \tag{22}$$

Altre proprietà
della successione di Fibonacci.

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots F_n = F_{n+2} - 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$$

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

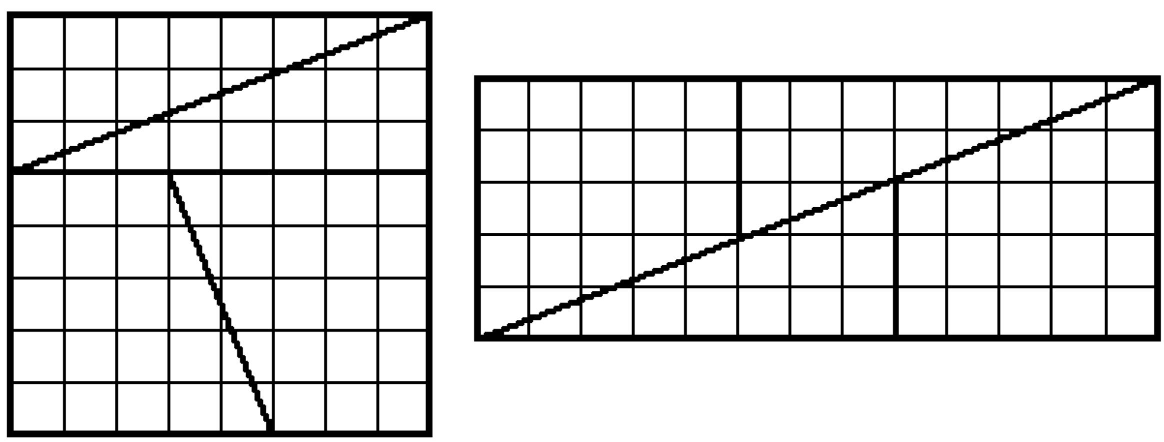
Quest'ultima è nota come

Identità di Cassini

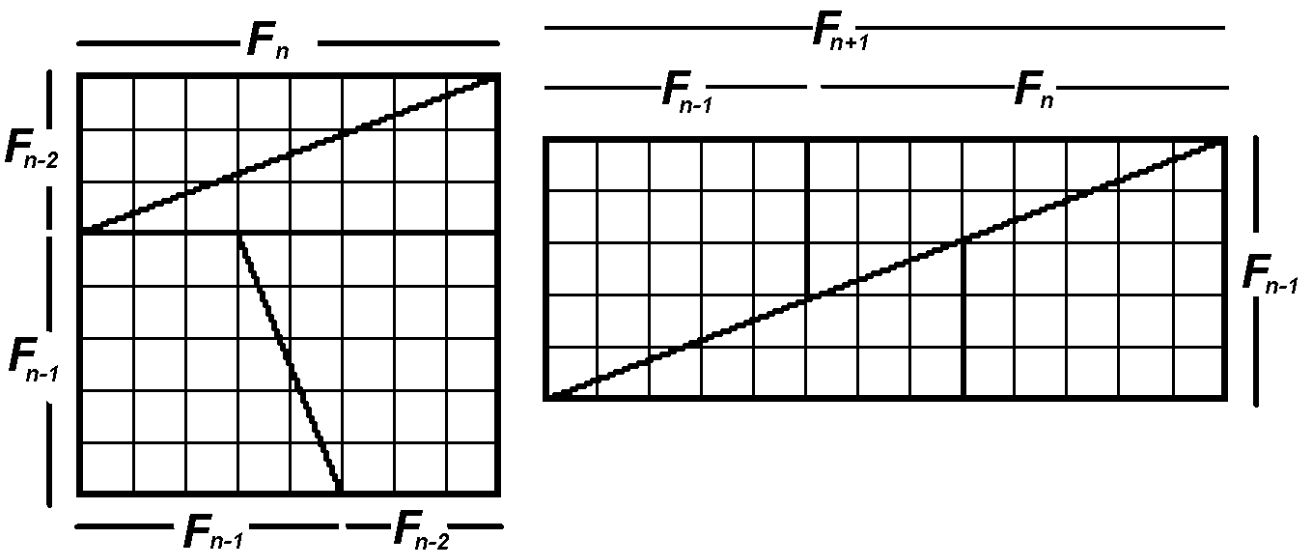
L'uguaglianza di Cassini

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

consente di costruire un puzzle che si puó scomporre e ricomporre perdendo o guadagnando una unità di area come mostra la seguente figura

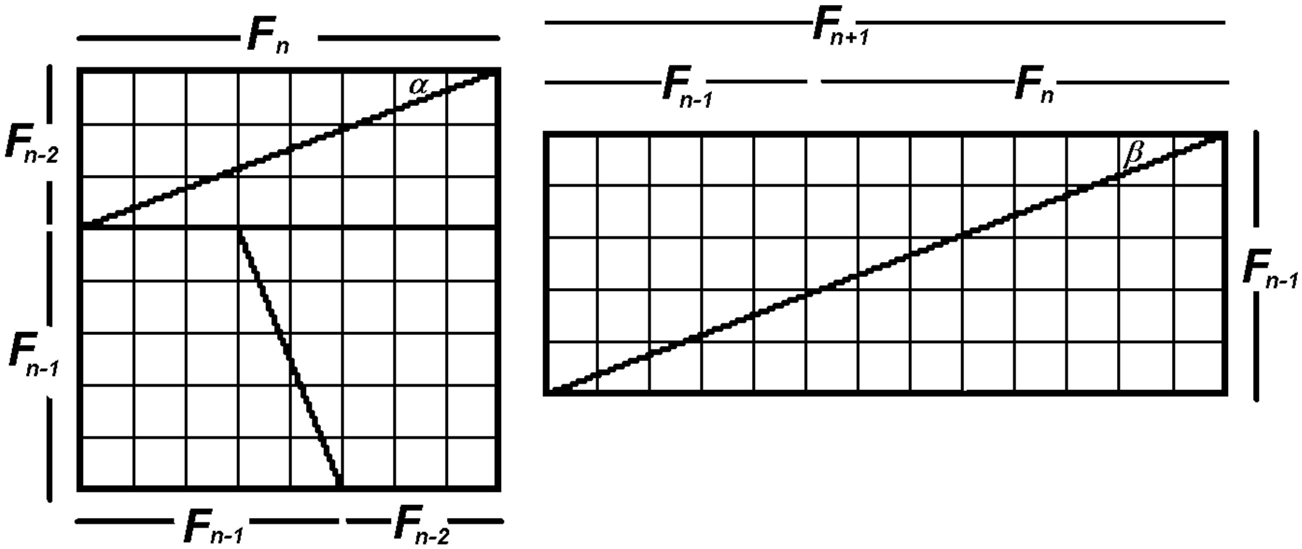


La scomparsa o la ricomparsa di una unità di area dipende dal fatto che la scomposizione è possibile in quanto le dimensioni dei lati sono date da tre numeri di Fibonacci successivi.



Possiamo osservare che

$$\tan\alpha = \frac{F_{n-2}}{F_n} \qquad \text{e} \qquad \tan\beta = \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$$



Inoltre posto

$$\rho_n = \frac{F_{n-2}}{F_n}$$

avremo, dividendo per F_{n+1} la

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

che

$$1 = \frac{F_n}{F_{n+1}} + \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$$

cioè

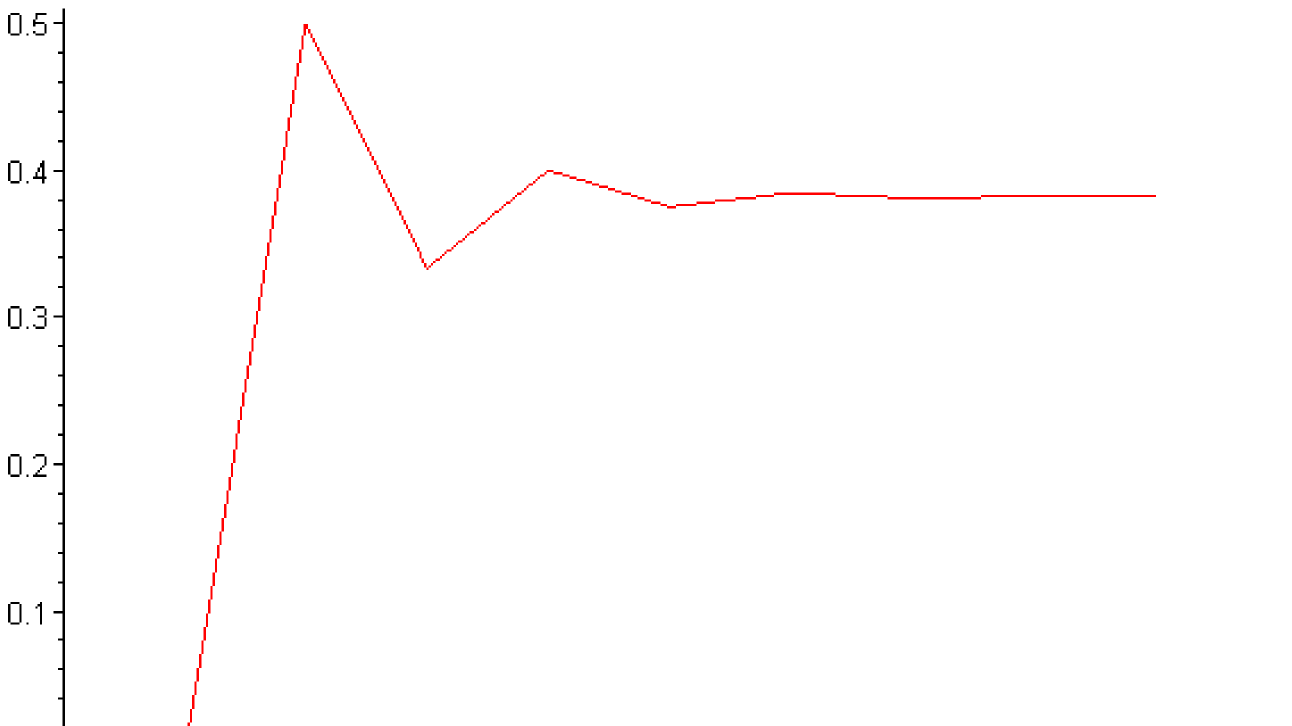
$$1 = \frac{1}{R_{n+1}} + \rho_n$$

da cui

$$\rho_n = 1 - \frac{1}{R_n} = \frac{1}{1 + R_{n-1}}$$

ρ_n eredita pertanto il comportamento oscillante di R_n e si stabilizza attorno al valore

$$\frac{1}{1+\tau} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = .381966011......$$



La successione R_n dei rapporti di due numeri di Fibonacci successivi può essere messa nella forma

$$\begin{cases} R_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{R_n} \\ R_1 = 1 \end{cases}$$

che è la definizione di una

Frazione continua

Possiamo scrivere anche

$$R_n = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots + \cfrac{1}{1}}}}}$$

e per renderci conto del significato della scrittura esplicitiamo qualcuna delle frazioni:

$$R_2 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}$$

$$R_3 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}$$

$$R_4 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}$$

In generale si definisce frazione continua il limite della successione definita da

$$\begin{cases} c_{n+1} = a_n + \dfrac{b_n}{c_n} \\ c_1 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

dove a_n e b_n sono due successioni date.

$$c_n = a_n + \cfrac{b_n}{a_{n-1} + \cfrac{b_{n-1}}{a_{n-2} + + \cdots + \cfrac{b_1}{r_1}}}$$

Nella espressione esplicita della successione di Fibonacci compare il numero

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

che è il Rapporto Aureo

Il Rapporto Aureo permette di risolvere il problema di dividere un segmento in due parti di cui la maggiore è media proporzionale tra la minore ed l'intero segmento

La Sezione Aurea

Problema: Dividere il segmento AB in due parti AT e TB delle quali una sia media proporzionale tra l'altra ed il segmento intero.

Deve essere

$$\frac{AB}{TB} = \frac{TB}{AT}$$

$$\frac{AT + TB}{TB} = \frac{TB}{AT}$$

$$\frac{AT}{TB} + 1 = \frac{TB}{AT}$$

Se chiamiamo

$$\tau = \frac{TB}{AT}$$

avremo

$$\tau = 1 + \frac{1}{\tau}$$

da cui

$$\tau = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} 1.618033987.... \\ -0.618033987.... \end{cases}$$

e

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618033987$$

Trasmissione di segnali

Supponiamo di voler trasmettere un segnale su un canale discreto usando due simboli

$$S_1 \quad S_2$$

di uguale durata

$$d_1 = d_2 = t \quad secondi$$

per un tempo T Potremo trasmettere

$$m = \frac{T}{t} \quad segnali$$

cioè

$$N(T) = 2^m$$

messaggi diversi. Pertanto la velocità di trasmissione si potrà calcolare mediante il rapporto

$$\frac{m}{T} = \frac{\log_2 2^m}{T} = \frac{\log_2 N(T)}{T}$$

Se invece si volessero usare due segnali di diversa durata

$d_1 \neq d_2$ ad esempio $d_1 = 1$ $d_2 = 2$

potremmo, trasmettere i seguenti messaggi

Unità di tempo	Messaggi
1	-
2	- - ——
3	- —— - - - —— -

E potremmo calcolare il numero di messaggi mediante le formule di ricorrenza

$$\begin{cases} N(1) = 1 \\ N(2) = 2 \\ N(T) = N(T-1) + N(T-2) \end{cases}$$

La velocità di trasmissione si esprime mediante la

$$\frac{\log_2 N(T)}{T}$$

che per T grande si stabilizza attorno al valore 0.69 o, più precisamente, attorno a

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Prezzi di Equilibrio tra Domanda e Offerta

È molto comune trovare situazioni del genere:

- Una azienda agricola decide l'estensione del terreno da dedicare alla coltivazione di un certo ortaggio in base al prezzo di tale ortaggio nell'anno corrente.

- Il successivo anno la quantità di ortaggio prodotta è eccessiva e ciò causa la diminuzione del suo prezzo

- L'azienda diminuisce l'estensione del terreno dedicato all'ortaggio, e ne diminuisce la produzione per l'anno seguente

- La minore disponibilità fa aumentare il prezzo dell'ortaggio e provocherà un nuovo aumento dell'estensione del terreno coltivato.

- ....

- ....

Per descrivere mediante un modello la situazione dobbiamo introdurre tre funzioni ed alcune ipotesi

S_n è l'offerta (supply) di prodotto nell'anno n

D_n è la domanda di prodotto nell'anno n

p_n è il prezzo del prodotto nell'anno n

Le ipotesi che si assumono sono

- Esiste una relazione tra domanda D_n e prezzo p_n

$$D_n = f(p_n) \tag{23}$$

ovviamente f è decrescente (la domanda diminuisce, all'aumentare del prezzo)

- Esiste una relazione tra offerta S_{n+1} e prezzo p_n

$$S_{n+1} = g(p_n) \tag{24}$$

ovviamente g è crescente (l'offerta aumenta, all'aumentare del prezzo)

- Il prezzo di mercato è determinato dall'offerta e le contrattazioni avvengono al prezzo in cui domanda ed offerta sono uguali cioè avvengono al prezzo p_n in corrispondenza del quale si ha

$$S_n = D_n \tag{25}$$

Se è assegnato un prezzo iniziale

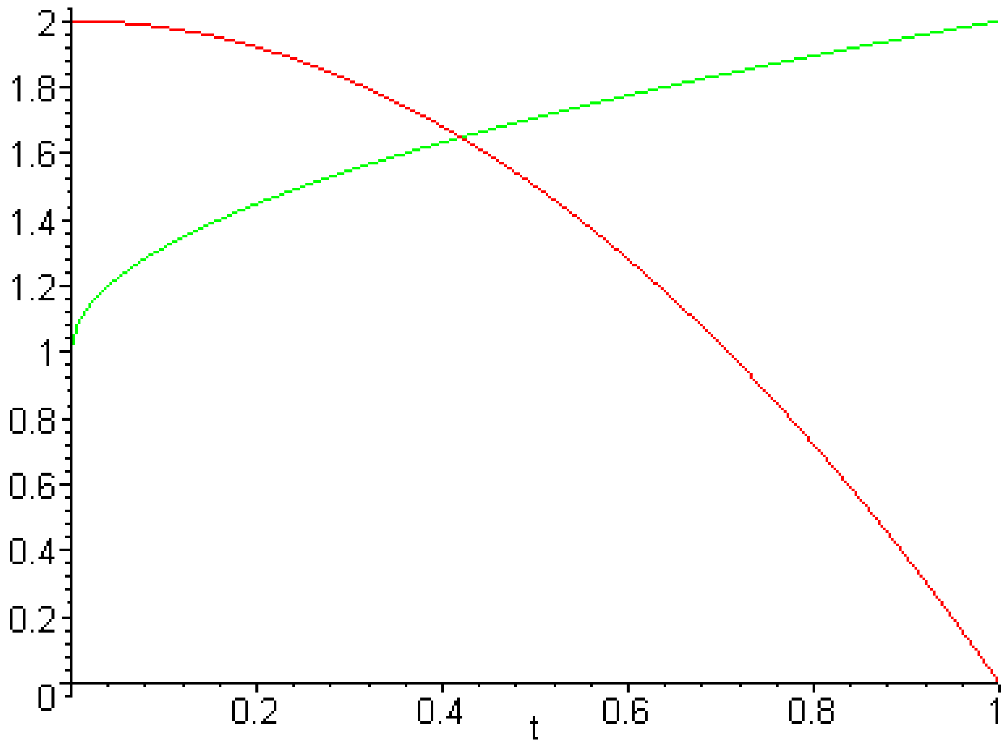
$$p_0$$

possiamo trovare ricorsivamente

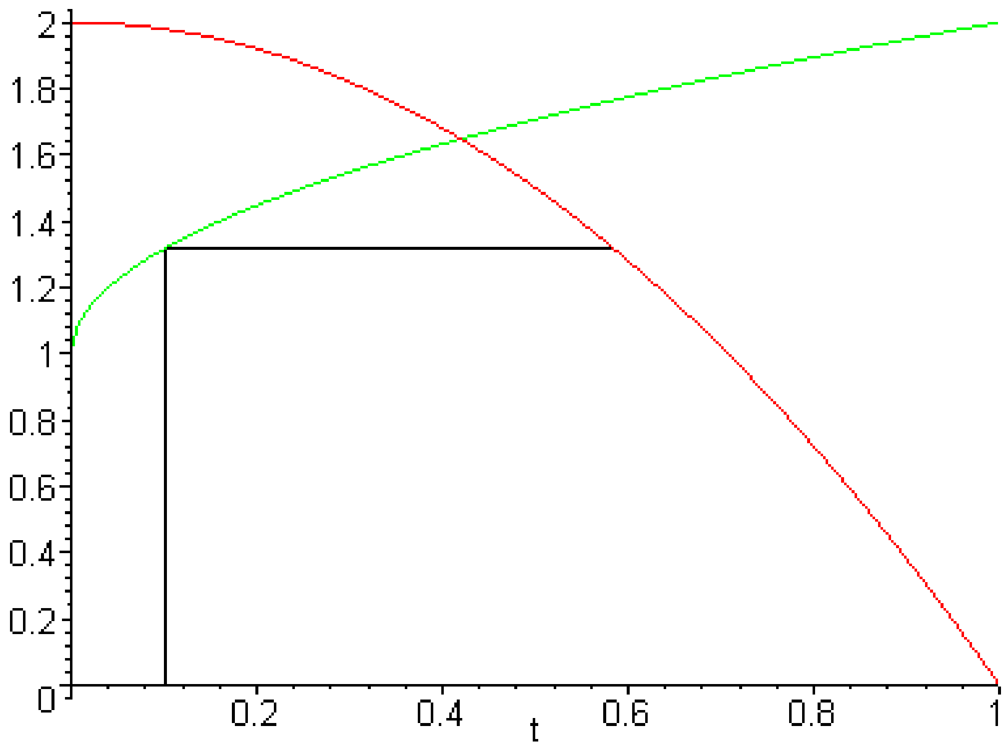
$$p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots, p_n, \ldots..$$

e possiamo studiare il comportamento oscillatorio di p_n

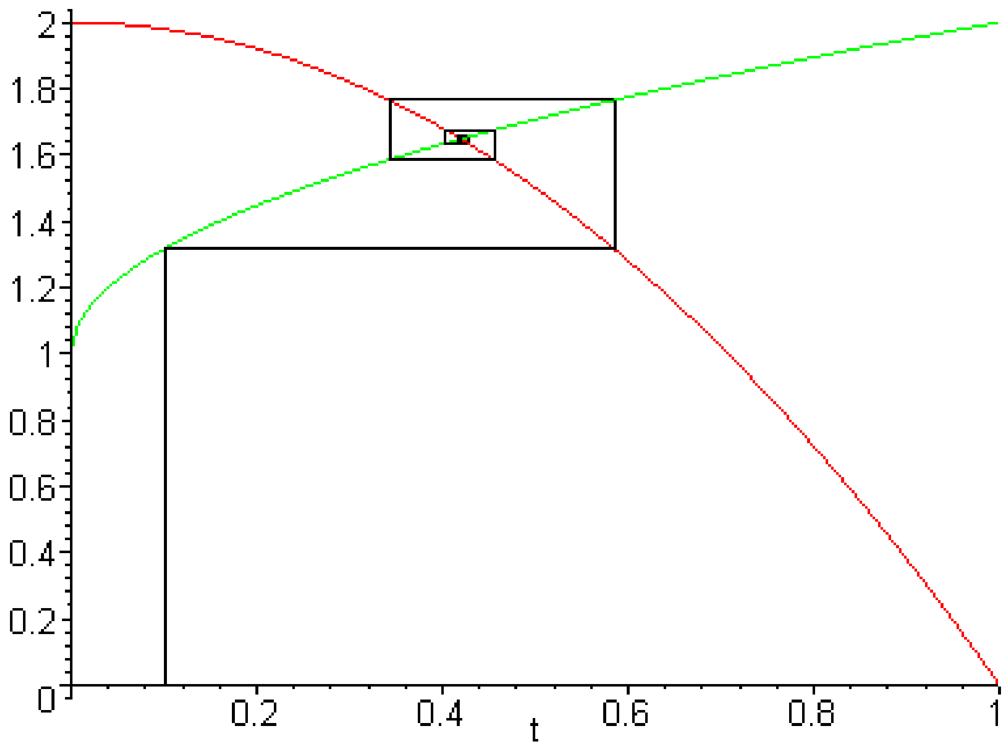
La situazione può essere illustrata dai seguenti grafici



Le prime iterazioni sono illustrate da



e si prosegue con



Facciamo ora alcune

Ipotesi Semplificative

- Supponiamo lineare la funzione che definisce la domanda in 23

$$f(p) = -ap + b \qquad a, b > 0 \tag{26}$$

- Supponiamo lineare la funzione che definisce l'offerta in 24

$$g(p) = cp + d \qquad c, d > 0 \tag{27}$$

Con queste ipotesi l'andamento del mercato per l'ortaggio in considerazione è descritto da

$$\begin{cases} D_n = -ap_n + b \\ S_{n+1} = cp_n + d \\ S_{n+1} = D_{n+1} \end{cases} \tag{28}$$

possiamo ricavare il prezzo di equilibrio dalla

$$S_{n+1} = D_{n+1}$$

Avremo

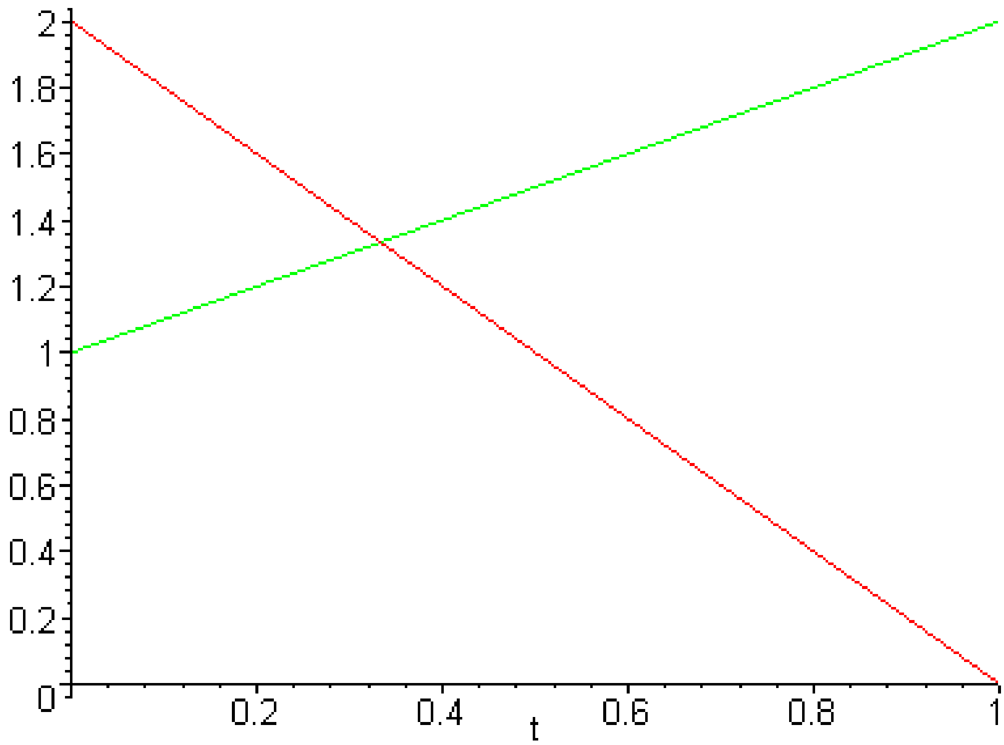
$$-ap_{n+1} + b = cp_n + d \tag{29}$$

per cui

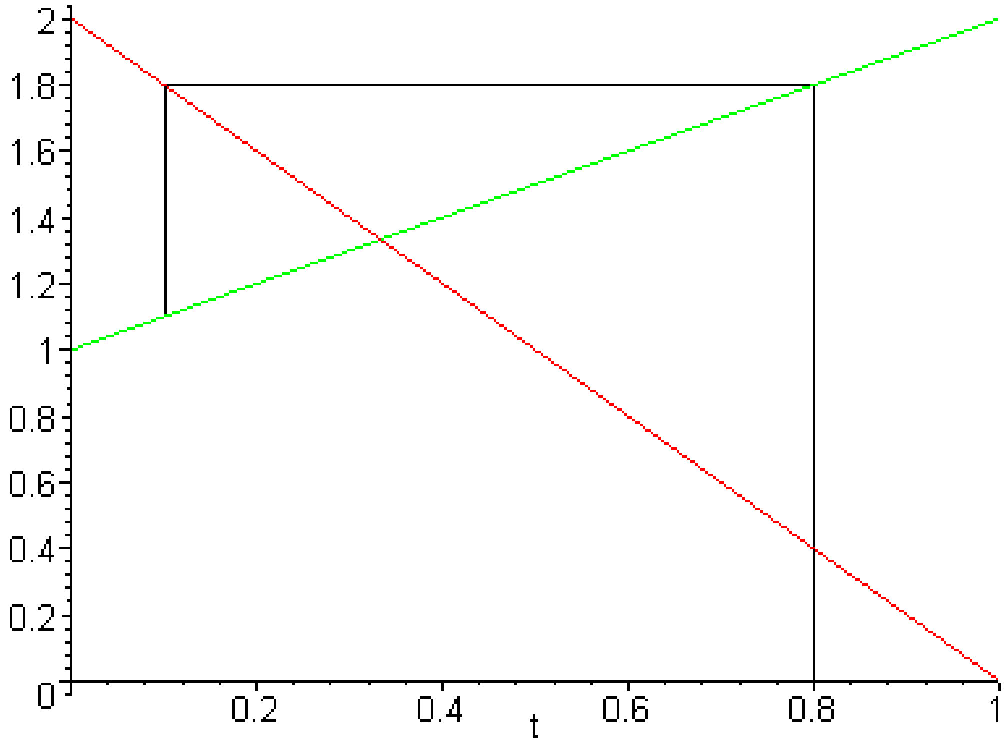
$$p_{n+1} = -\frac{c}{a}p_n + \frac{b-d}{a} = Ap_n + B \tag{30}$$

possiamo rappresentare l'andamento del mercato mediante semplici grafici.

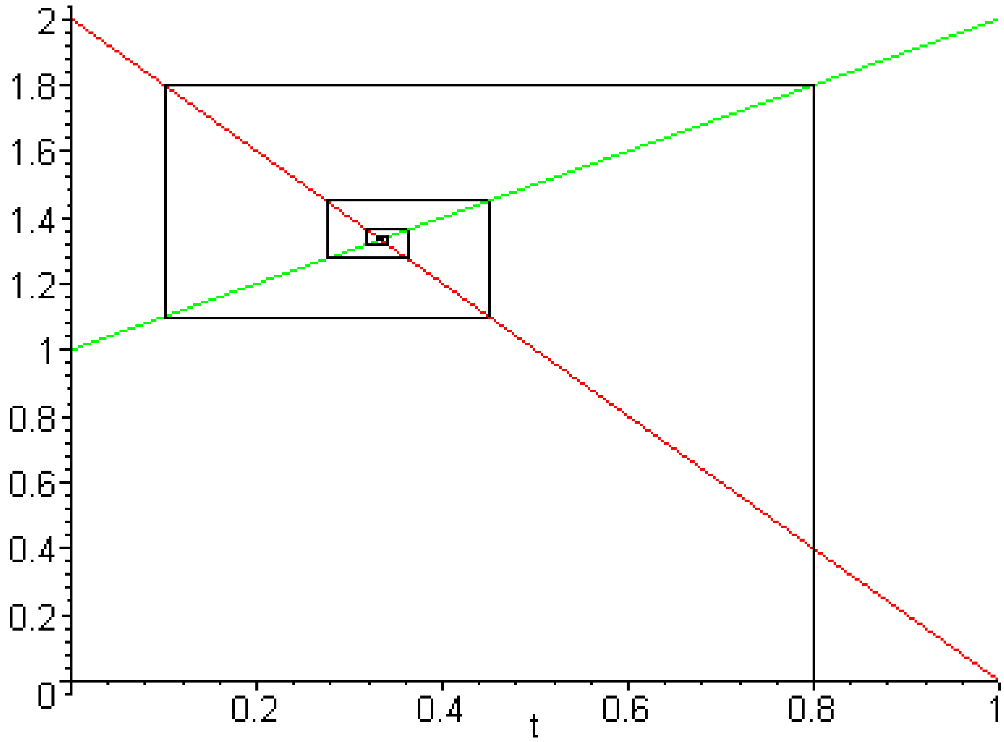
Funzione Domanda e Funzione Offerta



Calcolo Iterativo di valori della successione



Ciclo Cob-Web



Un Modello Classico di crescita economica in un'economia in espansione

Possiamo considerare

il reddito nazionale

costituito da due componenti

i consumi e gli investimenti

Indichiamo con

$$Y_n, \qquad , \qquad C_n \qquad , \qquad I_n \tag{31}$$

Il reddito, i consumi e gli investimenti relativi all'anno n

Avremo che

$$Y_n = C_n + I_n \tag{32}$$

Possiamo supporre che

$$C_n = c + mY_n \qquad (33)$$

Cioè i consumi sono proporzionali al reddito a meno di una quota fissa.

La costante m misura la propensione al consumo mentre c misura il consumo minimale in assenza di reddito.

Supponiamo

$$c > 0 \qquad , \qquad 0 < m < 1$$

L'incremento di reddito è legato agli investimenti da

$$\Delta Y_n = Y_{n+1} - Y_n = rI_n \tag{34}$$

Possiamo ricavare che

$$\begin{aligned} Y_{n+1} - Y_n = rI_n = \\ = r(Y_n - C_n) = \\ = rY_n - r(c + mY_n) \end{aligned} \tag{35}$$

e quindi

$$Y_{n+1} = [1 + r(1 - m)]Y_n - rc \tag{36}$$

Equivalentemente si può ricavare che

$$I_{n+1} - I_n = (Y_{n+1} - C_{n+1}) - (Y_n - C_n) = \\ = (Y_{n+1} - Y_n) - (C_{n+1} - C_n) \quad (37)$$

e quindi

$$I_{n+1} - I_n = \\ = rI_n - m(Y_{n+1} - Y_n) = \\ = rI_n - mrI_n \quad (38)$$

ed infine

$$I_{n+1} = [(1 + r(1 - m)]I_n \qquad (39)$$

La soluzione dell'equazione 39 è data da

$$I_n = [(1 + r(1 - m)]^n I_0 \tag{40}$$

La soluzione dell'equazione 36 è data da

$$Y_n = [(1 + r(1 - m)]^n (Y_0 - Y^*) + Y^* \tag{41}$$

dove $Y^* = \frac{c}{1-m}$

Un Modello
di Crescita del Reddito Nazionale

Possiamo considerare il reddito nazionale costituito da tre componenti

i consumi,

gli investimenti

le spese governative

Indichiamo con

$$Y_n, \qquad , \qquad C_n \qquad , \qquad I_n, \qquad , \qquad G_n \tag{42}$$

Il reddito, i consumi, investimenti e le Spese Governative relativi all'anno n

Avremo che

$$Y_n = C_n + I_n + G_n \tag{43}$$

Seguendo un classico articolo di Samuelson possono essere fatte le seguenti ipotesi.

- I consumi in un certo periodo sono proporzionali al reddito del precedente periodo.

- gli investimenti in un certo periodo sono indotti in maniera proporzionale all'aumento dei consumi in quel periodo rispetto al periodo precedente.

- Le spese governative sono costanti.

Possiamo tradurre le ipotesi fatte mediante le seguenti equazioni

- $$C_n = \alpha Y_{n-1}$$

- $$I_n = \beta(C_n - C_{n-1})$$

- $$G_n = 1$$

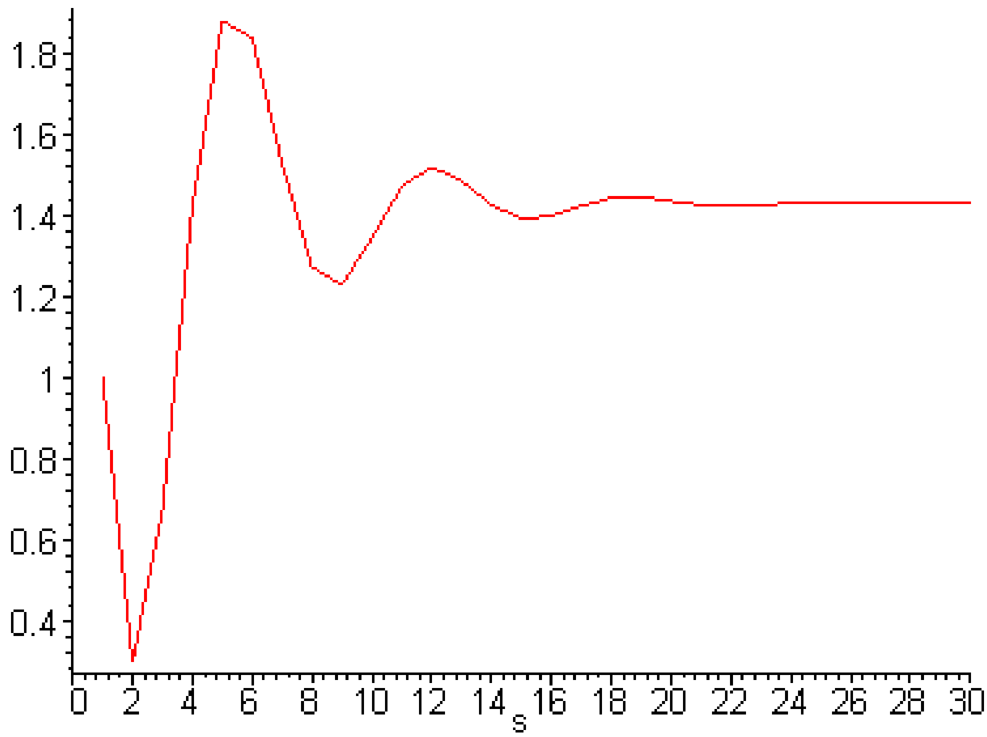
Possiamo allora ricavare dalla 43 la seguente equazione

$$\begin{aligned} Y_n &= \alpha Y_{n-1} + \beta(C_n - C_{n-1}) + 1 \\ &= \alpha Y_{n-1} + \beta(\alpha Y_{n-1} - \alpha Y_{n-2}) + 1 \end{aligned} \tag{44}$$

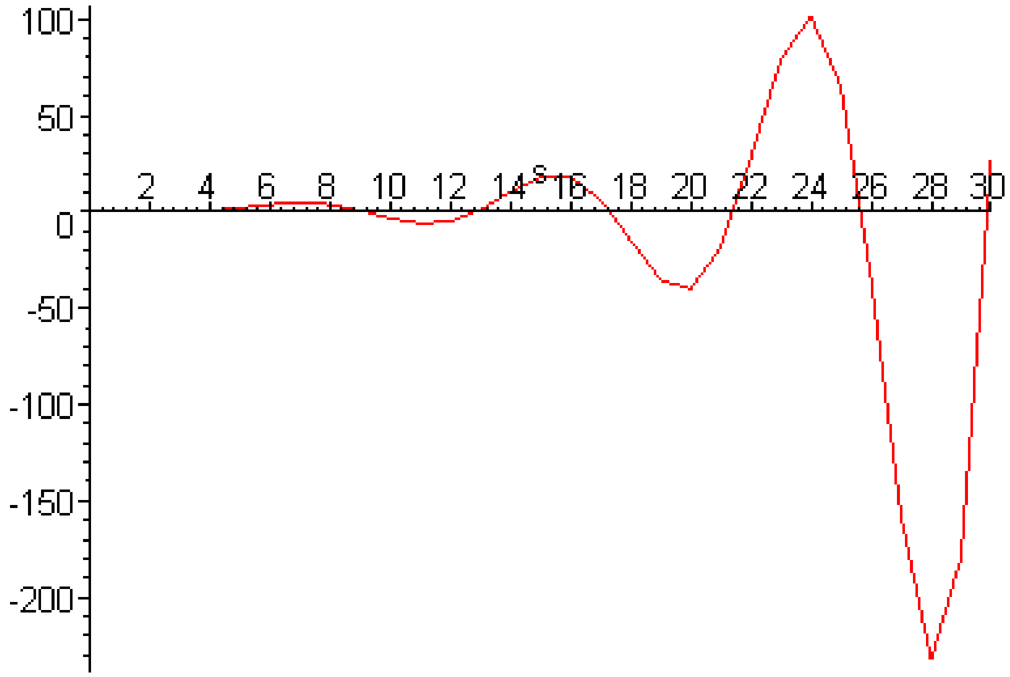
$$Y_n = \alpha(1+\beta)Y_{n-1} - \alpha\beta Y_{n-2} + 1 \tag{45}$$

Si può verificare che tale successione ha un andamento oscillante.

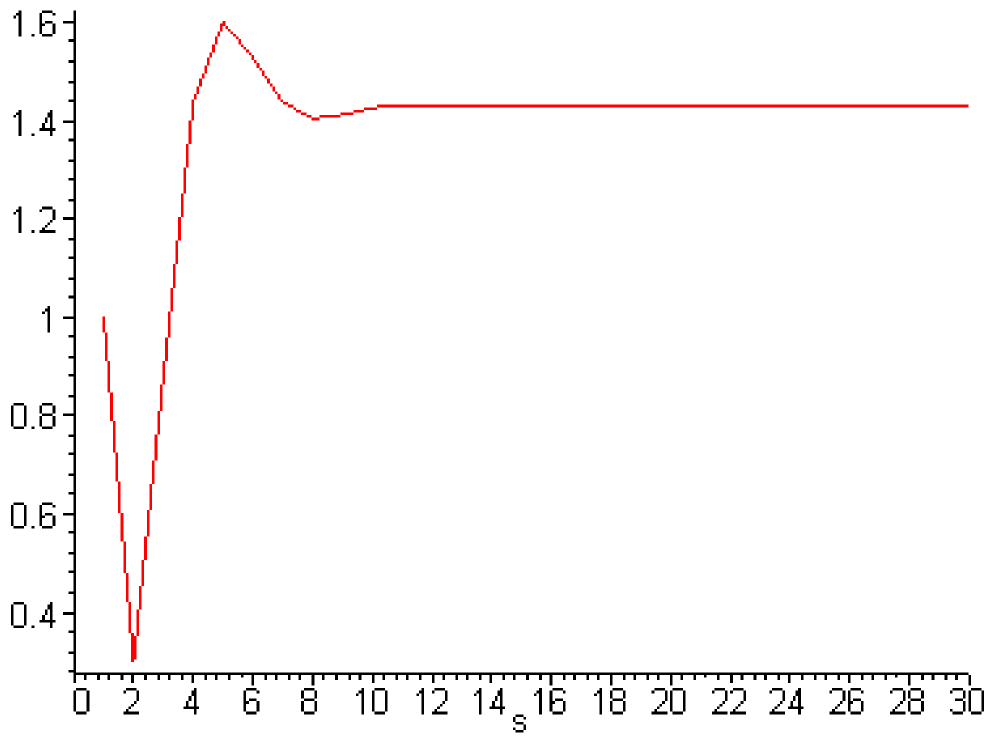
Andamento del Reddito Nazionale in corrispondenza
dei valori $\alpha = 3$ e $\beta = 2$ con dati iniziali
$I_0 = 1$ ed $I_1 = .3$



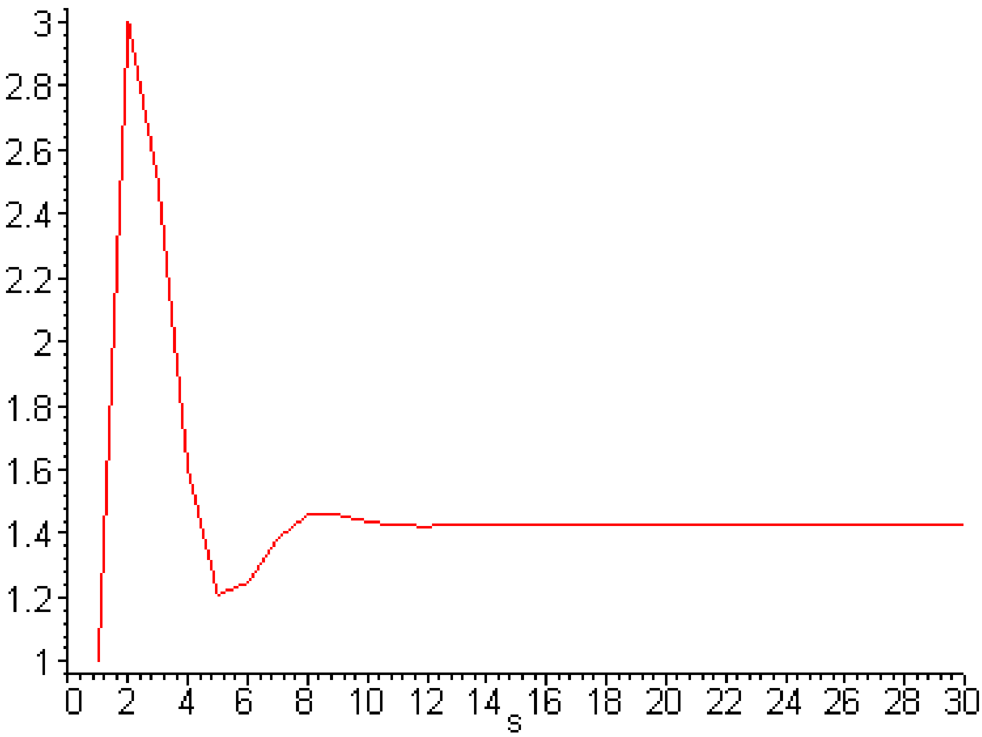
Andamento del Reddito Nazionale in corrispondenza
dei valori $\alpha = 1$ e $\beta = 5$ con dati iniziali
$I_0 = 1$ ed $I_1 = .3$



Andamento del Reddito Nazionale in corrispondenza
dei valori $\alpha = 5$ e $\beta = 1$ con dati iniziali $I_0 = 1$ ed $I_1 = .3$



Andamento del Reddito Nazionale in corrispondenza
dei valori $\alpha = 5$ e $\beta = 1$
con dati iniziali $I_0 = 1$ ed $I_1 = 3$



Un Modello
Per la Gestione delle Scorte

Ogni impresa produce beni per due scopi

1. Per destinarli alla vendita

2. Per destinarli al mantenimento di livelli di scorta ottimali.

Supponendo di usare appropriate unità di misura possiamo individuare nella

produzione totale

tre distinte componenti

La parte destinata alla vendita,

La parte destinata alle scorte

Una parte costante non indotta

Indichiamo con

$$Y_n, \quad , \quad U_n \quad , \quad S_n, \quad , \quad V_0 \tag{46}$$

La produzione totale, La parte desinata alla vendita, La parte desinata alle scorte e la quota di produzione fissa relative all'anno n

Avremo che

$$Y_n = U_n + S_n + V_0 \tag{47}$$

Un'estesa analisi dei cicli di mantenimento delle scorte è stata proposta da L.A.Metzeler.

Per illustrarne i rudimenti possiamo cominciare con il considerare alcune ipotesi

- La quota destinata alla vendita è proporzionale all'intera produzione del periodo precedente.

- La quota destinata alle scorte è decisa all'inizio di ogni periodo ed è destinata a mantenere costante il livello delle scorte

Possiamo tradurre le ipotesi fatte mediante le seguenti equazioni

- $$U_n = \beta Y_{n-1}$$

- $$S_n = U_{n-1} - U_{n-2} = \beta(Y_{n-1} - Y_{n-2})$$

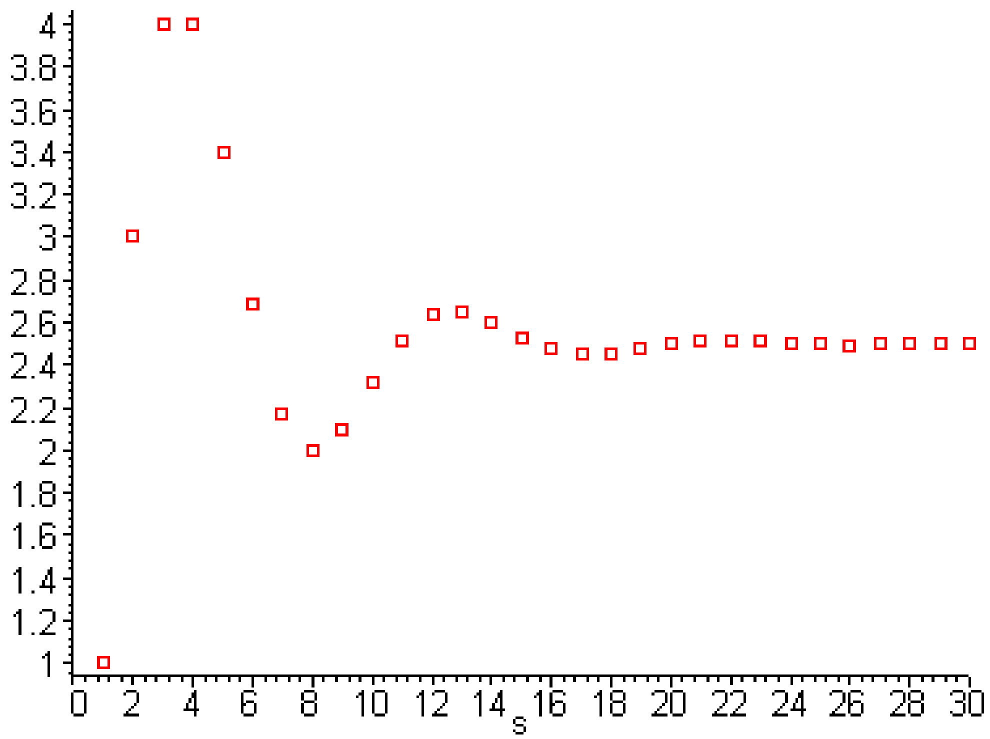
Possiamo allora ricavare dalla 47 la seguente equazione

$$\begin{aligned} Y_n = \beta Y_{n-1} + \beta(Y_{n-1} - Y_{n-2}) + V_0 \\ = 2\beta Y_{n-1} - \beta Y_{n-2} + V_0 \end{aligned} \quad (48)$$

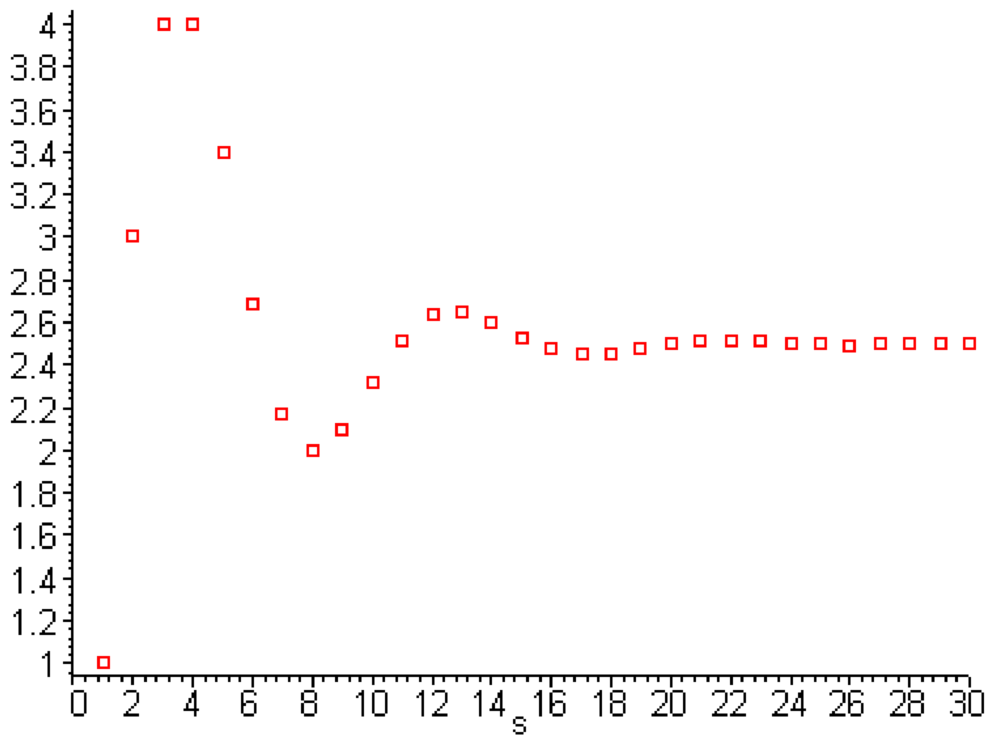
$$Y_n = 2\beta Y_{n-1} - \beta Y_{n-2} + V_0 \quad (49)$$

Si può verificare che tale successione ha un andamento oscillante.

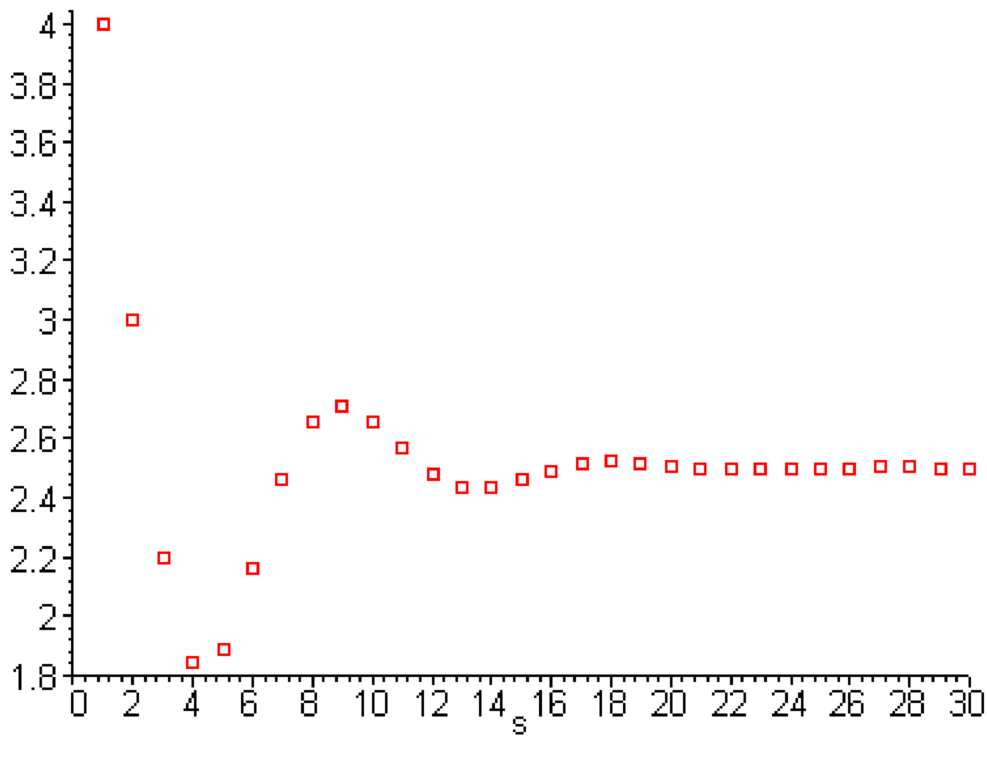
Andamento delle Scorte in corrispondenza dei valori $\alpha = .6$ e $V_0 = 1$ con dati iniziali $Y_0 = 1$ ed $Y_1 = 3$



Andamento delle Scorte in corrispondenza dei valori $\alpha = .6$ e $V_0 = 1$ con dati iniziali $Y_0 = 3$ ed $Y_1 = 1$



Andamento delle Scorte in corrispondenza
dei valori $\alpha = .6$ e $V_0 = 1$
con dati iniziali $Y_0 = 4$ ed $Y_1 = 3$



Le equazioni alle differenze

Le equazioni alle differenze del primo ordine

Cominciamo con il considerare le equazioni alle differenze del primo ordine, cioè le equazioni del tipo

Per $a \in \mathbb{R}$ e per f_n successione assegnata, Determinare una successione y_n in modo che

$$y_n = a y_{n-1} + f_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{50}$$

Il numero a e la successione f_n sono i dati dell'equazione e parallelamente consideriamo il problema di

Per $a \in \mathbb{R}$ e per f_n successione assegnata, Determinare una successione y_n in modo che

$$\begin{cases} y_n = a y_{n-1} + f_n & \forall n \in \mathbb{N} \\ y_0 = \alpha \end{cases} \tag{51}$$

Il numer0 a e la successione f_n sono i dati dell'equazione

Possiamo facilmente provare che

Teorema 1 *Per $a \in \mathbb{R}$ e per f_n successione assegnata, Esiste una ed una sola successione y_n tale che*

$$\begin{cases} y_n = a y_{n-1} + f_n & \forall n \in \mathbb{N} \\ y_0 = \alpha \end{cases} \tag{52}$$

Possiamo dimostrare il teorema come sgue

L'esistenza della soluzione si può far discendere dal principio di induzione.

Infatti

1. y_0 è definito dal dato iniziale

2. se sono definiti y_{n-1} allora la 50 permette di definire y_n

Per quanto riguarda l'unicità se y_n e z_n sono soluzioni della 51 si ha

$$\begin{cases} y_n = a y_{n-1} + f_n & \forall n \in \mathbb{N} \\ y_0 = \alpha \end{cases} \tag{53}$$

$$\begin{cases} z_n = a z_{n-1} + f_n & \forall n \in \mathbb{N} \\ z_0 = \alpha \end{cases} \tag{54}$$

e possiamo verificare per sottrazione membro a membro che

$$u_n = y_n - z_n$$

soddisfa le condizioni

$$\begin{cases} u_n = a y_{n-1} & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases} \tag{55}$$

Si verifica facilmente per induzione che

$$u_n = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi che

$$y_n = z_n$$

Per determinare le soluzioni dell'equazione 50 cominciamo a considerare il caso in cui

$$f_n = 0$$

avremo che deve essere

$$\begin{cases} y_n = a y_{n-1} & \forall n \in \mathbb{N} \\ y_0 = \alpha \end{cases} \tag{56}$$

Poichè si ha

$$y_0 = \alpha \tag{57}$$

$$y_1 = ay_0 = \alpha a \tag{58}$$

$$y_2 = ay_1 = \alpha a^2 \tag{59}$$

$$y_3 = ay_2 = \alpha a^3 \tag{60}$$

è evidente che

$$y_n = \alpha y_n \tag{61}$$

e si può verificare per induzione che la 61 risolve effettivamente il problema dato.

Nello stesso modo, possiamo risolvere l'equazione completa ad esempio nel caso in cui

$$f_n = b^n \tag{62}$$

Cioè se

$$\begin{cases} y_n = a y_{n-1} + b^n & \forall n \in \mathbb{N} \\ y_0 = \alpha \end{cases} \tag{63}$$

Si ha

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha \\ y_1 &= a y_0 + b = \alpha a + b \\ y_2 &= a y_1 = \alpha a^2 + ba + b^2 \\ y_3 &= a y_2 = \alpha a^3 + ab^2 + b^3 \\ y_4 &= \alpha a^4 + ba^3 + a^2 b^2 + ab^3 + b^4 \end{aligned} \tag{64}$$

ed è evidente che

$$
\begin{aligned}
y_n &= \alpha a^n + ba^{n-1} + b^2 a^{n-2} + \cdots + ab^{n-1} + b^n \\
&= \alpha a^n + a^n \left(\frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \cdots + \frac{b^n}{a^n} \right) = \\
&= \alpha a^n + a^n \left(\frac{\frac{b}{a} - \frac{b^{n+1}}{a^{n+1}}}{1 - \frac{b}{a}} \right) = \\
&= \alpha a^n + a^n \left(\frac{a^n b - b^{n+1}}{b-a} \right) = \\
&= (\alpha + \frac{b}{b-a}) a^n + \frac{b}{b-a} b^n \quad (65)
\end{aligned}
$$

e si può verificare per induzione che la 61 risolve effettivamente il problema dato.

La struttura della soluzione 61

$$y_n = (\alpha + \frac{b}{b-a})a^n + \frac{b}{b-a}b^n \qquad (66)$$

suggerisce alcune considerazioni.

1. La soluzione non è definita nel caso in cui $a = b$

2. Nella soluzione si riconosce

   - una parte
   $$(\alpha + \frac{b}{b-a})a^n$$
   che risolve l'equazione omogenea e dipende da una costante α

   - ed una parte
   $$\frac{b}{b-a}b^n$$
   che risolve l'equazione completa e che non dipende da nessuna costante.

Nel caso in cui $b = a$, dovremo risolvere l'equazione

$$\begin{cases} y_n = a y_{n-1} + a^n & \forall n \in \mathbb{N} \\ y_0 = \alpha \end{cases} \tag{67}$$

e possiamo facilmente verificare che si avrà

$$y_0 = \alpha \tag{68}$$

$$y_1 = a y_0 + a = \alpha a + a \tag{69}$$

$$y_2 = a y_1 = \alpha a^2 + a^2 + a^2 = \alpha a^2 + 2a^2 \tag{70}$$

$$y_3 = a y_2 = \alpha a^3 + 2a^3 + a^3 = \alpha a^3 + 3a^3 \tag{71}$$

$$y_4 = \alpha a^4 + b3a^4 +^4 = \alpha a^4 + 4a^4 \tag{72}$$

Si intuisce e si prova facilmente per induzione che

$$y_n = \alpha a^n + n a^n \qquad (73)$$

infatti

- $y_0 = \alpha a^0 + 0a^0 = \alpha$
- se $y_n = \alpha a^n + n a^n$ allora

$$y_{n+1} = a(\alpha a^n + n a^n) + a^{n+1} = \alpha a^{n+1} + (n+1)a^{n+1} \qquad (74)$$

Le equazioni alle differenze del secondo ordine

Consideriamo per illustrare l'argomento, un'equazione alle differenze di secondo ordine:

Consideriamo cioè il problema di

Per $a, b \in \mathbb{R}$ e per f_n successione assegnata, Determinare una successione y_n in modo che

$$y_n = ay_{n-1} + by_{n-2} + f_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{75}$$

I numeri a, b e la successione f_n sono i dati dell'equazione e parallelamente consideriamo il problema di

Per $a, b \in \mathbb{R}$ e per f_n successione assegnata, Determinare una successione y_n in modo che

$$\begin{cases} y_n = a y_{n-1} + b y_{n-2} + f_n & \forall n \in \mathbb{N} \\ y_0 = \alpha \\ y_1 = \beta \end{cases} \tag{76}$$

I numeri a, b e la successione f_n sono i dati dell'equazione

Possiamo facilmente provare che

Teorema 2 *Per $a, b \in \mathbb{R}$ e per f_n successione assegnata, Esiste una ed una sola successione y_n tale che*

$$\begin{cases} y_n = ay_{n-1} + by_{n-2} + f_n & \forall n \in \mathbb{N} \\ y_0 = \alpha \\ y_1 = \beta \end{cases} \tag{77}$$

L'esistenza della soluzione si può far discendere dal principio di induzione.

Infatti

1. y_0, y_1 sono definiti

2. se sono definiti y_{n-1} ed y_{n-2}4 allora la 75 permette di definire y_n

Per quanto riguarda l'unicità se y_n e z_n sono soluzioni della 76 si ha

$$\begin{cases} y_n = ay_{n-1} + by_{n-2} + f_n & \forall n \in \mathbb{N} \\ y_0 = \alpha \\ y_1 = \beta \end{cases} \tag{78}$$

$$\begin{cases} z_n = az_{n-1} + bz_{n-2} + f_n & \forall n \in \mathbb{N} \\ z_0 = \alpha \\ z_1 = \beta \end{cases} \tag{79}$$

e possiamo verificare per sottrazione membro a membro che

$$u_n = y_n - z_n$$

soddisfa le condizioni

$$\begin{cases} u_n = ay_{n-1} + bu_{n-2} & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \\ u_1 = 0 \end{cases} \tag{80}$$

Si verifica facilmente per induzione che

$$u_n = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi che

$$y_n = z_n$$

Per caratterizzare le soluzioni di 75 introduciamo l'equazione omogenea associata, che sarà data da

$$y_n = ay_{n-1} + by_{n-2} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{81}$$

e definiamo

Definizione 1

$$\mathcal{S} = \{y_n \quad : \quad y_n = ay_{n-1} + by_{n-2}\} \tag{82}$$

$$\mathcal{T} = \{y_n \quad : \quad y_n = ay_{n-1} + by_{n-2} + f_n\} \tag{83}$$

Lo Spazio $\mathcal{S}$ è uno spazio vettoriale di dimensione 2

infatti se $y_n, z_n \in \mathcal{S}$ avremo che

$$y_n = ay_{n-1} + by_{n-2}$$
$$z_n = az_{n-1} + bz_{n-2} \quad (84)$$

e quindi

$$\alpha y_n + \beta z_n \in \mathcal{S}$$

Inoltre si vede che se $y_n, z_n \in \mathcal{T}$ avremo

$$y_n = ay_{n-1} + by_{n-2} + f_n$$
$$z_n = az_{n-1} + bz_{n-2} + f_n \quad (85)$$

per cui

$$(y_n - z_n) = a(y_{n-1} - z_{n-1}) + b(y_{n-2} - z_{n-2}) \quad (86)$$

e

$$y_n - z_n \in \mathcal{S}$$

Ne deduciamo che $\mathcal{S}$ è uno spazio vettoriale e $\mathcal{T}$ è uno spazio lineare affine in quanto per ogni fissata $z_n^* \in \mathcal{T}$ e per ogni $y_n \in \mathcal{T}$ si ha

$$y_n - z_n^* \in \mathcal{S}$$

e quindi

$$y_n \in z_n^* + \mathcal{S}$$

Sia

Definizione 2 *Definiamo*

$$T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^2 \tag{87}$$

mediante la

$$y_n \in \mathcal{S} \mapsto T(y_n) = (y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2 \tag{88}$$

Teorema 3 $T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^2$

- *è lineare*

- *è surgettiva*

- *è iniettiva*

Pertanto è un isomorfismo tra spazi vettoriali e risulta $dim\ \mathcal{S} = 2$

- T è lineare in quanto se $y_n, z_n \in \mathcal{S}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avremo

$$
\begin{aligned}
T(\alpha y_n + \beta z_n) = (\alpha y_0 + \beta z_0, \alpha y_1 + \beta z_1) = \\
= \alpha(y_0, y_1) + \beta(z_0, z_1) = \\
= \alpha T(y_n) + \beta T(z_n)
\end{aligned} \tag{89}
$$

- T è surgettiva, in quanto se $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, per il teorema 2 $\exists y_n$ tale che

$$
\begin{cases}
y_n = a y_{n-1} + b y_{n-2} & \forall n \in \mathbb{N} \\
y_0 = \alpha \\
y_1 = \beta
\end{cases} \tag{90}
$$

  Per cui $y_n \in \mathcal{S}$ ed inoltre

$$T(y_n) = (y_0, y_1) = (\alpha, \beta)$$

- T è iniettiva in quanto se $y_n, z_n \in \mathcal{S}$ e $T(y_n) = T(z_n)$ avremo che

$$\begin{cases} y_n = ay_{n-1} + by_{n-2} & \forall n \in \mathbb{N} \\ y_0 = \alpha \\ y_1 = \beta \end{cases} \tag{91}$$

e

$$\begin{cases} z_n = az_{n-1} + bz_{n-2} & \forall n \in \mathbb{N} \\ z_0 = \alpha \\ z_1 = \beta \end{cases} \tag{92}$$

e per il teorema 2 la soluzione è unica

Pertanto il problema di descrivere lo spazio $\mathcal{S}$ si riduce al problema di trovare due soluzioni y_n^1 ed y_n^2 linearmente indipendenti dell'equazione

$$y_n = ay_{n-1} + by_{n-2} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (93)$$

ed una soluzione della

$$y_n = ay_{n-1} + by_{n-2} + f_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad (94)$$

A questo scopo si cercano soluzioni della

$$y_n = ay_{n-1} + by_{n-2} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{95}$$

della forma

$$\begin{aligned} y_n = \zeta^n = (e^{\alpha + i\beta})^n = \\ = e^{n(\alpha + i\beta)} = e^{\alpha n}(\cos\beta n + i \sin\beta n) \\ \zeta \in \mathbb{C}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{96}$$

Dovrà risultare

$$\zeta^n = a\zeta^{n-1} + b\zeta^{n-2} \tag{97}$$

e, scartando la soluzione banale nulla

$$\zeta^2 = a\zeta + b \tag{98}$$

Si possono presentare tre casi:

1. l'equazione 97 ha due radici reali e distinte $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu$;

2. l'equazione 97 ha due radici complesse e coniugate $\alpha \pm \beta = \rho(\cos\theta \pm i \sin\theta)$

3. l'equazione 97 ha due radici reali e coincidenti $\lambda \in \mathbb{R}$ con molteplicità 2

cui corrispondono altrettante coppie di successioni che risolvono l'equazione

1. le successioni

$$y_n = \lambda^n \qquad z_n = \mu^n$$

   sono soluzioni dell'equazione

2. Le successioni

$$y_n = \rho^n \cos i\,\theta n \qquad z_n = \rho^n sin\, i\,\theta n$$

sono soluzioni del problema

3. Le successioni

$$y_n = \lambda^n \qquad z_n = n\lambda^n$$

sono soluzioni del problema

Nel caso delle radici reali e distinte è evidente come si ricavano le due soluzioni

$$y_n = \lambda^n \qquad z_n = \mu^n$$

mentre è meno chiaro come si procede negli altri due casi.

Consideriamoli più attentamente.

Sia

$$\alpha \pm i\,\beta = \rho(\cos\theta \pm i\,\sin\theta)$$

la coppia di soluzioni complesse e coniugate dell'equazione 97

Avremo allora che le successioni complesse

$$\xi_n = (\alpha + i\,\beta)^n \qquad \zeta_n = (\alpha - i\,\beta)n$$

risolvono l'equazione 50.

Avremo

$$\xi_n = e^{\alpha n}(\cos i\,\theta n + \sin i\,\theta n)$$

$$\zeta_n = e^{\alpha n}(\cos i\,\theta n - \sin i\,\theta n) \quad (99)$$

e

$$\xi_n = \rho^n(\cos i\,\theta n + \sin i\,\theta n)$$

$$\zeta_n = \rho^n(\cos i\,\theta n - \sin i\,\theta n) \quad (100)$$

Per la linearità anche

$$y_n = \rho^n \cos i\,\theta n \qquad z_n = \rho^n sin\, i\,\theta n$$

soddisfano l'equazione 75

Nel caso in cui l'equazione 97 ammetta una sola soluzione reale con molteplicità 2 possiamo scrivere la 75

nella forma

$$y_n = 2ay_{n-1} - a^2 y_{n-2} = 0 \tag{101}$$

da cui

$$y_n - 2ay_{n-1} + a^2 y_{n-2} = 0 \tag{102}$$

e

$$y_n - ay_{n-1} - ay_{n-1} + a^2 y_{n-2} = 0 \tag{103}$$
$$(y_n - ay_{n-1}) - a(y_{n-1} - ay_{n-2}) = 0 \tag{104}$$

e posto $u_n = y_n - ay_{n-1}$

$$u_n - u_{n-1} = 0 \tag{105}$$

Se ne ricava che

$$u_n = ka^n$$

$$y_n - ay_{n-1} = ka^n$$

ed ancora

$$y_n = c_1 a^n + c_2 n a^n$$

Qualche Profilo Storico

François Édouard Anatole Lucas

nato ad Amiens il 4 Aprile 1842

morto a Parigi il 3 Ottobre 1891

Lucas fu educato alla scuola Normale Superiore di Amiens e lavorò all'Osservatorio di Parigi

Fu Ufficiale di artiglieria durante la guerra Franco-Prussiana (1870-1871) e successivamente insegnò nei licei a Parigi.

si occupò principalmente di Teoria dei Numeri e dimostrò che $2^{127} - 1$ è un numero primo usando metodi da lui sviluppati.

$2^{127} - 1$ è a tutt'oggi il più grande numero primo trovato senza l'ausilio di un computer.

Lucas è anche ben noto per l'invenzione della Torre di Hanoi e di altri giochi di carattere matematico.

Leonardo da Pisa detto Fibonacci
cioè
figlio di Bonaccio

- Nacque a Pisa attorno al 1170
- Morì a Pisa attorno al 1250
- Fu educato in Nord Africa da precettori mussulmani
- Ebbe modo di conoscere ed apprezzare il sistema di numerazione indo-arabica che introdusse per primo in Europa.
- Le sue opere maggiori sono
  - Liber Abaci (1202)
  - Practica Geometriae (1220)
  - Liber Quadratorum (1225)

Paul Anthony Samuelson

Nacque a Gary nell.Indiana nel 1915

Premio Nobel per l'economia nel 1970

Il Suo lavoro più noto è contenuto nel libro

Foundation of Economic Analysis

Ha incrementato in maniera notevole l'uso della Matematica nell'economia

Secondo Samuelson quasi ogni comportamento può essere interpretato nei termini di un problema di massimo o di minimo soggetto a vincoli.